

L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, **il est IMPERATIF de souligner les résultats obtenus**. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez admettre le résultat dans la suite de l'énoncé. Lisez bien tout le sujet avant de commencer et identifiez les parties plus simples pour vous, et commencez par ces parties.

I Questions préliminaires

Exercice n°1 :

- 1) On cherche ici à utiliser le théorème fondamental de l'analyse. En tant que composée de fonctions continues et de sommes de fonctions continues, la fonction $f : t \mapsto \ln(\operatorname{ch}(\sin(t^8)) + e^t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, $g : x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Ainsi cette fonction est bien dérivable, de dérivée f .

- 2) Dans cette question, il faut faire attention au fait qu'on est sur le deuxième type de changement de variable.

On pose donc le changement de variable $x = \cos(t)$, $dx = -\sin(t)$ et on remarque que $\cos(0) = 1$ et $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\frac{1-\cos(t)}{1+\cos(t)}} (-\sin(t)dt) \\ &\text{Formule de l'angle moitié} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\frac{1-\tan^2(\frac{t}{2})}{1+\tan^2(\frac{t}{2})}}{1+\frac{1-\tan^2(\frac{t}{2})}{1+\tan^2(\frac{t}{2})}}} 2\sin(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(t))dt \\ &= [t - \sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

- 3) a) On peut procéder par changement de variable en posant $u = \ln(x)$ ou simplement remarquer que $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u : x \mapsto \ln(x)$.
Une primitive de cette fonction sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$ est donc $x \mapsto \ln(|\ln(x)|)$.
- b) On cherche une primitive de $x \mapsto -\frac{1+\ln(x)}{x^2 \ln(x)^2}$. On a :

$$\begin{aligned} \int^x -\frac{1+\ln(t)}{t^2 \ln(t)^2} dt &= \int^x \frac{1}{(t \ln(t))^2} ((1+\ln(t))dt) \\ u &= t \ln(t), du = (1+\ln(t))dt \int^{x \ln(x)} \frac{1}{u^2} du \\ &= \left[-\frac{1}{u} \right]^{x \ln(x)} \\ &= \frac{-1}{x \ln(x)} \end{aligned}$$

- c) On va étudier cette EDL sur $I_1 =]0, 1[$ et $I_2 =]1, +\infty[$ afin de pouvoir diviser par $x \ln(x)$ et se ramener à une EDL sous forme normalisée. Sur chacun de ces intervalles donc, (E) peut se réécrire :

$$y' - \frac{1}{x \ln(x)} y = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2 \ln(x)}.$$

D'après la question 1, on a que les solutions de l'équation homogène sur I_1 et I_2 sont :

Sur I_1 :

$$S_h^1 = \{\lambda \exp(\ln(-\ln(x)))\} = \{\lambda(-\ln(x))\} \text{ Si } \lambda \text{ parcourt } \mathbb{R}, -\lambda \text{ parcourt } \mathbb{R}\{\lambda \ln(x)\}.$$

Sur I_2 :

$$S_h^2 = \{\lambda \exp(\ln(\ln(x)))\} = \{\lambda \ln(x)\}.$$

- d) Pour résoudre ces équations différentielles sur chacun de ces intervalles, on va effectuer une méthode de variation de la constante :

Soit y de la forme $x \mapsto \lambda(x) \ln(x)$ où λ est une fonction de classe $\mathbb{C}_1$.

En appliquant la méthode de la variation de la constante (sur I_1 ou I_2 et en simplifiant ce qui se simplifie toujours dans une méthode de variation de la constante, on obtient que :

$$\begin{aligned} y \text{ solution} &\Leftrightarrow \lambda'(x) \ln(x) = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2 \ln(x)} \\ &\Leftrightarrow \lambda' = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2 \ln^2(x)}. \end{aligned}$$

Or on a vu une primitive de cette fonction dans la question b. Une primitive λ possible de λ' est donc $\lambda : x \mapsto \frac{-1}{x \ln(x)}$. Il suit que y est de la forme $x \mapsto \frac{-\ln(x)}{x \ln(x)} = \frac{-1}{x}$. Les solutions de cette équation sont donc (sur I_1 ou I_2) :

$$S_E = \{x \mapsto \frac{-1}{x} + \lambda \ln(x), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- e) En rajoutant la condition initiale on est ici dans le cadre d'un problème de Cauchy. Il y a donc une unique solution donnée pour λ qui vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{-1}{10} + \lambda \ln(10) &= 1 \\ &\Leftrightarrow \\ \lambda &= \frac{11}{10 \ln(10)}. \end{aligned}$$

L'unique solution est donc $f : x \mapsto \frac{-1}{x} + \frac{11}{10 \ln(10)} \ln(x)$

II Problèmes

Problème n° 1

- 1) a) cf cours
b) cf cours

- c) Ici on se rappelle que quand on a un inverse d'un élément par rapport à une loi (ici la composition), on peut toujours composer/multiplier par cet inverse.

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} g \circ f &= \text{Id}_E \\ &\Leftrightarrow \\ g \circ f \circ f^{-1} &= \text{Id}_E \circ f^{-1} \\ &\Leftrightarrow \\ g &= f^{-1}. \end{aligned}$$

- d) Il suffit ici de construire un contre exemple (on peut le faire avec de "petites" applications).

Soit $f : \{1\} \rightarrow \{1, 2\}$ $1 \mapsto 1$ et $g : \{1, 2\} \rightarrow \{1\}$, $x \mapsto 1$.

Alors $g \circ f = \text{Id}_E$ mais $f \circ g(2) = 1 \neq 2$, donc g n'est pas la bijection réciproque de f .

2) Étude d'une application particulière

La fonction f est une fonction polynôme du second degré, son tableau de variations nous donne :

$$f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{9}{4}, +\infty[$$

On veut maintenant déterminer :

$$\begin{aligned} f^{-1}([-1, +\infty[) &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [-1, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 \geq -1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 \geq 0\} \end{aligned}$$

Les racines du trinôme $X^2 + X - 1$ étant $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, on obtient :

$$f^{-1}([-1, +\infty[) =]-\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty[.$$

D'après la question précédente, on a $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ donc : f n'est pas surjective. Par ailleurs, on remarque que $f(1) = f(-2) = 0$ donc 0 admet deux antécédents distincts par f dans $\mathbb{R}$, à savoir 1 et -2 (on a bien $1 \neq -2$) donc : f n'est pas injective. Soit $y \in [-\frac{9}{4}, +\infty[$. On résout l'équation $y = g(x)$ d'inconnue $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$:

$$g(x) = y \iff x^2 + x - 2 = y \iff x^2 + x - 2 - y = 0$$

Le discriminant de l'équation du second degré obtenu vaut $1 - 4(-2 - y) = 9 + 4y \geq 0$ car $y \geq -\frac{9}{4}$. Celle-ci admet donc deux racines réelles (confondues dans le cas particulier $y = -\frac{9}{4}$) qui valent $\frac{-1 \pm \sqrt{9+4y}}{2}$. Une seule de ses racines appartient à l'intervalle $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ à savoir $\frac{-1 + \sqrt{9+4y}}{2}$ (puisque $\sqrt{9+4y} \geq 0$) donc :

$$g(x) = y \iff x = \frac{-1 + \sqrt{9+4y}}{2}$$

Finalement, y admet un unique antécédent par g dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. On peut donc conclure que : l'application g est bijective de réciproque :

$$g^{-1} : \begin{cases} [-\frac{9}{4}, +\infty[& \longrightarrow & [-\frac{1}{2}, +\infty[\\ y & \longmapsto & \frac{-1 + \sqrt{9+4y}}{2} \end{cases}$$

B) Application idempotente

a) On raisonne par double implication.

Supposons que f soit injective. Montrons alors que f est surjective. Soit $y \in E$. Comme $f \circ f = f$, on a $f(f(y)) = f(y)$. Or f est injective donc $f(y) = y$. Ainsi, $y \in E$ est un antécédent de y par f dans E . On en déduit donc que f est surjective.

Supposons maintenant que f est surjective et montrons que f est injective. Soit donc $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$ et montrons que $x = y$. Comme f est surjective, il existe $x', y' \in E$ tels que $x = f(x')$ et $y = f(y')$. L'égalité $f(x) = f(y)$ se réécrit $f(f(x')) = f(f(y'))$. Or $f \circ f = f$ donc $f(f(x')) = f(x')$ et $f(f(y')) = f(y')$. L'égalité $f(f(x')) = f(f(y'))$ se réécrit donc $f(x') = f(y')$, ce qui signifie que $x = y$ par définition de x' et y' . Finalement, f est injective. On a donc démontré que :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective}$$

b) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On démontre l'égalité en raisonnant par double inclusion.

Montrons que $f^{-1}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(A)$. Soit $x \in f^{-1}(f^{-1}(A))$. Alors $f(x) \in f^{-1}(A)$ (par définition de l'image réciproque d'un ensemble), puis $f(f(x)) \in A$ (à nouveau par définition de l'image réciproque). Mais $f(f(x)) = f(x)$ (puisque $f \circ f = f$) donc la dernière appartenance se réécrit $f(x) \in A$, ce qui signifie, par définition de l'image réciproque d'un ensemble, que $x \in f^{-1}(A)$. On a donc bien l'inclusion annoncée, à savoir $f^{-1}(f^{-1}(A)) \subset f^{-1}(A)$.

Montrons maintenant que $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(f^{-1}(A))$. Soit $x \in f^{-1}(A)$. Alors $f(x) \in A$. Mais $f(f(x)) = f(x)$ donc $f(f(x)) \in A$. Ainsi $f(x) \in f^{-1}(A)$ puis $x \in f^{-1}(f^{-1}(A))$, ce qui démontre la seconde inclusion. Finalement :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad f^{-1}(f^{-1}(A)) = f^{-1}(A)$$

Problème n° 2

Etude d'une famille d'intégrale

Partie 1 : Premières relations

- 1) Vérifier que f_α est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. On pourra faire apparaître une identité remarquable.
- 2) Pourquoi peut-on alors définir $J_\alpha = \int_0^\pi f_\alpha(t) dt$, l'intégrale de Poisson associée à α ? On posera J_α ainsi définie dans la suite.
- 3)
 - a) Sans calculer l'intégrale, montrer que si $\alpha \neq 0, J_{\frac{1}{\alpha}} = J_\alpha - 2\pi \ln(|\alpha|)$.
 - b) En posant le changement de variable $t = \pi - x$, montrer que $J_\alpha = J_{-\alpha}$.
 - c) En intégrant par parties, déterminer une relation entre $I_\alpha = \int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{1 - 2\alpha \cos(t) + \alpha^2} dt$ et J_α .

Partie 2 : Expression de J_α comme une limite.

Cette partie peut être ignorée dans un premier temps, on admettra alors le résultat de la question 4d)

- 4) Pour $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$, on pose $\beta_k = e^{\frac{ik\pi}{n}}$ les $2n$ racines $2n$ -ièmes de l'unité (c'est à dire les solutions de $z^{2n} = 1$) et on admet alors que l'on a la factorisation :

$$\forall z \in \mathbb{C}, z^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (z - \beta_k)$$

- a) Donner les valeurs de β_0 et β_n et montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $2n-k \in \llbracket n+1, 2n-1 \rrbracket$ et que $\overline{\beta_k} = \beta_{2n-k}$.
- b) Justifier à l'aide d'un changement d'indice que $\prod_{k=n+1}^{2n-1} (z - \beta_k) = \prod_{k=1}^{n-1} (z - \overline{\beta_k})$.
- c) En déduire que $\frac{\alpha^{2n}-1}{(\alpha+1)(\alpha-1)} = \prod_{k=1}^{n-1} (\alpha - \beta_k)(\alpha - \overline{\beta_k}) = \prod_{k=1}^{n-1} (\alpha^2 - 2\alpha \cos(\frac{k\pi}{n}) + 1)$.
- d) En admettant que $J_\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \ln(\alpha^2 - 2\alpha \cos(\frac{k\pi}{n}) + 1)$ (ce que l'on justifiera plus tard dans l'année à l'aide des sommes de Riemann), justifier que :

$$J_\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{\alpha^{2n} - 1}{(\alpha + 1)(\alpha - 1)} \right).$$

Partie 3 : Calcul de J_α et application

- 5) a) Montrer que $J_\alpha = 0$ si $\alpha \in [0; 1[$.
- b) En déduire l'expression de J_α selon si $|\alpha| < 1$ ou $|\alpha| > 1$. On pourra utiliser les questions précédentes
- 6) Application : À l'aide des résultats précédents, déterminer $\int_0^\pi \frac{t \sin(t)}{5-4\cos(t)} dt$.

Problème n° 3

- 1) L'équation différentielle (E_1) est linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique associée à l'équation homogène est $x^2 - 1 = 0$. Ses racines sont -1 et 1 donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' - y = 0$ est :

$$\{x \mapsto Ae^{-x} + Be^x \mid A, B \in \mathbb{R}\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E_1) de la forme $^1y : x \mapsto ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. La fonction y est clairement deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = 2ax + b \quad \text{et} \quad y''(x) = 2a$$

Le second membre est un polynôme et 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique. donc :

$$\begin{aligned} (y \text{ est solution de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - y(x) = x^2 + x + 1) \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, -ax^2 - bx + (2a - c) = x^2 + x + 1) \\ &\iff \begin{cases} -a = 1 \\ -b = 1 \\ 2a - c = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit qu'une solution particulière de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto -x^2 - x - 3$ On conclut donc que :

$$\text{l'ensemble des solutions de } (E_1) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \{x \mapsto Ae^{-x} + Be^x - x^2 - x - 3 \mid A, B \in \mathbb{R}\}$$

- 2) On a déjà résolu l'équation homogène à la question précédente. Déterminons une solution particulière sous la forme $^2y : x \mapsto Axe^x$ où $A \in \mathbb{R}$. La fonction y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) = A(x+1)e^x \quad \text{et} \quad y''(x) = A(x+2)e^x$$

donc :

$$\begin{aligned} (y \text{ est solution de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R}) &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, y''(x) - y(x) = e^x) \\ &\iff (\forall x \in \mathbb{R}, A(x+2)e^x - Axe^x = e^x) \\ &\iff 2A = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{x}{2}e^x$. On conclut donc que :

$$\text{l'ensemble des solutions de } (E_2) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ x \mapsto Ae^{-x} + Be^x + \frac{x}{2}e^x \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

3) a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) &= \frac{e^a - e^{-a}}{2} \times \frac{e^b + e^{-b}}{2} - \frac{e^a + e^{-a}}{2} \times \frac{e^b - e^{-b}}{2} \\ &= \frac{(e^a - e^{-a})(e^b + e^{-b}) - (e^a + e^{-a})(e^b - e^{-b})}{4} \\ &= \frac{e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} - e^{-a-b} - e^{a+b} + e^{a-b} - e^{-a+b} + e^{-a-b}}{4} \\ &= \frac{e^{a-b} - e^{-(a-b)}}{2} \\ &= \operatorname{sh}(a-b) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b)$$

La deuxième identité se démontre de manière analogue.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2 = 1$$

4) En utilisant la formule établie à la question 3.(a), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x (\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(t) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(t))g(t)dt = \int_0^x (\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(t)g(t) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(t)g(t))dt$$

d'où l'on tire, en utilisant la propriété de linéarité de l'intégrale, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \operatorname{sh}(x) \int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t)dt - \operatorname{ch}(x) \int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t)dt$$

5) Les fonctions $\operatorname{ch} \times g$ et $\operatorname{sh} \times g$ sont continues sur $\mathbb{R}$ comme produits de fonctions qui le sont. On en déduit que les fonctions $x \mapsto \int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t)dt$ et $x \mapsto \int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t)dt$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions ch et sh sont également dérivables sur $\mathbb{R}$, la f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produits de fonctions qui le sont et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \operatorname{ch}(x) \int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t)dt + \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(x)g(x) - \operatorname{sh}(x) \int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t)dt - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(x)g(x) \\
&= \operatorname{ch}(x) \int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t)dt - \operatorname{sh}(x) \int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t)dt \\
&= \int_0^x (\operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(t))g(t)dt \quad (\text{par linéarité de l'intégrale})
\end{aligned}$$

En utilisant la deuxième relation établie à la question 3.(a), on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \int_0^x \operatorname{ch}(x-t)g(t)dt$$

- 6) D'après l'égalité (1), et en utilisant le même raisonnement que celui mené à la question précédente, on obtient que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) &= \operatorname{sh}(x) \int_0^x \operatorname{ch}(t)g(t)dt + \operatorname{ch}(x)^2g(x) - \operatorname{ch}(x) \int_0^x \operatorname{sh}(t)g(t)dt - \operatorname{sh}(x)^2g(x) \\
&= (\operatorname{ch}(x)^2 - \operatorname{sh}(x)^2)g(x) + \int_0^x (\operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(t) - \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(t))g(t)dt \\
&= g(x) + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)dt \\
&= g(x) + f(x)
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) - f(x) = g(x)$$

- 7) D'après ce qui précède, la fonction $x \mapsto \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)dt$ est solution de (E_g) sur $\mathbb{R}$. Quant à l'équation homogène, elle a été résolue à la question 1. On conclut donc que :

$$\text{l'ensemble des solutions de } (E_g) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } \left\{ x \mapsto Ae^{-x} + Be^x + \int_0^x \operatorname{sh}(x-t)g(t)dt \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

Problème n° 4

Solutions d'une équation différentielle non linéaire

- 1) a) Soit $y \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ une solution de (E) ne s'annulant pas sur I . La fonction $z = \frac{1}{y}$ est dérivable sur I comme inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas et $z' = -\frac{y'}{y^2}$. Comme la fonction y vérifie l'équation différentielle (E) sur I , on a :

$$\begin{aligned}
\forall t \in I, \quad z'(t) &= -\frac{y'(t)}{y(t)^2} = -\frac{1}{y(t)^2} \left(\frac{y(t)}{t} - \frac{y(t)^2}{t^2} \right) \\
&= -\frac{1}{t} \times \frac{1}{y(t)} + \frac{1}{t^2} \\
&= -\frac{z(t)}{t} + \frac{1}{t^2}
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall t \in I, \quad z'(t) + \frac{z(t)}{t} = \frac{1}{t^2}$$

- b) L'équation différentielle (F) est linéaire du premier ordre. * Une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur I est $t \mapsto \ln(t)$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée à (F) (à savoir $z' + \frac{z}{t} = 0$) est :

$$\left\{ t \mapsto Ce^{-\ln(t)} \mid C \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \mapsto \frac{C}{t} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

Déterminons maintenant une solution particulière de (E) sur I en utilisant la méthode de la variation de la constante. Soient donc $C \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $z : \begin{cases} I & \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longmapsto \frac{C(t)}{t} \end{cases}$. La fonction z est dérivable sur I comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\forall t \in I, \quad z'(t) = \frac{C'(t)t - C(t)}{t^2}$$

donc :

$$\begin{aligned} (z \text{ est solution de (F) sur } I) &\iff \left(\forall t \in I, z'(t) + \frac{z(t)}{t} = \frac{1}{t^2} \right) \\ &\iff \left(\forall t \in I, \frac{C'(t)}{t} - \frac{C(t)}{t^2} + \frac{C(t)}{t^2} = \frac{1}{t^2} \right) \\ &\iff \left(\forall t \in I, C'(t) = \frac{1}{t} \right) \end{aligned}$$

Par exemple, $C : t \mapsto \ln(t)$. Une solution particulière de (E) sur I est donc $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$. D'après le théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (F), on peut conclure que :

$$\text{l'ensemble des solutions de (F) sur } I \text{ est } \left\{ t \mapsto \frac{C}{t} + \frac{\ln(t)}{t} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

- c) Soient $C \in \mathbb{R}$ et $z_C : t \mapsto \frac{C + \ln(t)}{t}$.

- i) On raisonne par double implication. Si $C \geq 0$, alors pour tout $t \in I$ (i.e. pour tout $t > 1$ par définition de I) on a $\ln(t) > 0$ puis $C + \ln(t) > 0$ et donc $z_C(t) > 0$ comme quotient de nombres strictement positifs. En particulier, la fonction z_C ne s'annule pas sur I .

Réciproquement supposons que $C < 0$. Alors $e^{-C} > 1$ et il est clair que la fonction z_C s'annule en e^{-C} . Par contraposition, si z_C ne s'annule pas sur I , alors $C \geq 0$. Ainsi : la fonction z_C s'annule sur I si et seulement si $C \geq 0$

- 2) La fonction y_C ne s'annule pas et est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \quad y'_C(t) = \frac{C + \ln(t) - t \times \frac{1}{t}}{(C + \ln(t))^2} = \frac{C + \ln(t) - 1}{(C + \ln(t))^2}$$

Pour tout $t \in I$, on a alors :

$$\begin{aligned} y'_C(t) - \frac{y_C(t)}{t} + \frac{y_C(t)^2}{t^2} &= \frac{C + \ln(t) - 1}{(C + \ln(t))^2} - \frac{1}{C + \ln(t)} + \frac{1}{(C + \ln(t))^2} \\ &= \frac{C + \ln(t) - 1 - C - \ln(t) + 1}{(C + \ln(t))^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc : la fonction y_C est solution de (E) sur I

- 2) Résumons : si y est une solution de (E) sur I qui ne s'annule pas (i.e. si y est un élément de $\mathcal{L}_E$), alors la fonction $z = \frac{1}{y}$ est solution de (F) sur I et ne s'annule pas (car $z = \frac{1}{y}$). D'après la question précédente, il existe donc $C \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall t \in I, \quad y(t) = \frac{1}{z(t)} = \frac{t}{C + \ln(t)}$$

On a donc l'inclusion :

$$\mathcal{S}_E \subset \left\{ t \mapsto \frac{t}{C + \ln(t)} \mid C \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

Réciproquement, nous avons montré à la question 1.(c)ii. l'inclusion :

$$\left\{ t \mapsto \frac{t}{C + \ln(t)} \mid C \in \mathbb{R}_+ \right\} \subset \mathcal{S}_E$$

Par double inclusion, on peut conclure que :

$$\mathcal{S}_E = \left\{ t \mapsto \frac{t}{C + \ln(t)} \mid C \in \mathbb{R}_+ \right\}$$