

Chapitre 19 : Polynômes

F) Polynômes irréductibles

- Polynômes irréductibles, réductibles, constants
- Deux polynômes irréductibles sont associés ou premiers entre eux.
- Lemme d'Euclide
- Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$
- Décomposition en facteurs irréductibles

G) Interpolation de Lagrange

- 1) Polynômes de Lagrange et polynôme interpolateurs de Lagrange.

Chapitre 20 : Fractions rationnelles

A) Le corps des fractions rationnelles

- Définitions et exemples
- Le corps $\mathbb{K}(X)$
- Degré d'une fraction rationnelle
- Partie entière, partie polaire
- racines et pôles
- Fonctions rationnelles

B) Décomposition en éléments simples

- Existence et unicité de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Méthodes pour déterminer les coefficients :
- Pour les pôles simples
- Pour les coefficients de degré maximal pour un pôle multiple
- Méthode sur la parité, sur la limite (sur $\mathbb{R}$), sur l'évaluation en un point précis. (L'identification est à proscrire pour ce chapitre).
- Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$

C) Application de la DES

- Calcul de primitives de fraction rationnelles
- Calcul de dérivée

Questions de cours :

-
- Calcul complet d'une primitive/intégrale au choix du colleur impliquant une fraction rationnelle à l'aide de la décomposition en éléments simple.
- On prouvera les résultats suivants
 - 1) Soit $(F, G) \in \mathbb{K}(X)$ 2 fractions rationnelles, montrer que $\deg(F + G) \leq \max(\deg(F), \deg(G))$ avec égalité si F et G sont de même degré.
 - 2) Montrer l'existence et l'unicité de la partie entière et partie polaire d'une fraction rationnelle.
 - 3) Montrer que l'ensemble des racines et l'ensemble des pôles d'une fraction rationnelle sont disjoints.
- 1) Montrer que si a est un pôle simple de $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ et $Q, B = Q(X - a) \in K[X]$ alors le coefficient γ associé à $\frac{1}{X-a}$ dans la DES de F vaut :

$$[F * (X - a)](a) = \frac{A}{Q}(a) = \frac{A}{B'}(a)$$

- 2) Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ où $P \in \mathbb{K}[x]$ est scindé.