

Chapitre 23 : Dimension finie

A) Espaces vectoriels de dimension finie

- Définition par existence d'une famille génératrice finie
- Familles libres et génératrices en dim finie
- Une famille libre en dim finie est finie, une famille génératrice admet une sous-famille génératrice
- Existence de base en dimension finie
- Lemme de la base incomplète
- Théorème de la base incomplète
- Théorème de la base extrait

B) Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

- Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie sont finies et ont même cardinal, c'est la dimension de l'espace.
- Caractérisation des espaces vectoriels de dimension 0, 1 et 2.
- Familles libres et génératrices en dimension finie(2)
- Lien entre le cardinal d'une famille libre, liée, génératrice, base en fonction du cardinal.
- Pour une famille de cardinal $\dim(E)$, être libre est équivalent à être générateur, est équivalent à être une base.
- Rang d'une famille de vecteurs
- Invariance du rang d'une famille de vecteurs par "opérations élémentaires" (addition d'un vecteur à un autre, multiplication par un scalaire d'un vecteur, échange de 2 vecteurs, suppression de vecteurs combinaisons linéaires d'autres vecteurs de la famille.
- Produit d'espaces vectoriels de dimension finie

C) Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

- Dimension d'un sous-espace vectoriel
- Bases adaptées à un sous-espace vectoriel
- Somme de sous-espaces vectoriels
- Caractérisation somme directe et supplémentaires en dimension finie
- Existence d'un supplémentaire en dimension finie
- Base adaptée à un supplémentaire en dimension finie

Questions de cours :

- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Toute famille libre de E est finie.
- Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Pour toute famille génératrice G de E , il existe une sous-famille $G' \subset G$ finie et encore génératrice de E .
- Preuve du lemme et théorème de la base incomplète et preuve du théorème de la base extraite.
- Preuve de la formule de Grassman :
 - 1) On commence par le prouver dans le cas où les 2 SEV sont en somme directe
 - 2) Dans le cas général, on admet qu'il existe que pour F, G 2 sev de E en dimension finie, il existe S supplémentaire de $F \cap G$ dans G tel que $F \oplus S = F + G$.