

Chapitre 24 : Applications linéaire

A) Généralités

- Définition et premiers exemples classique
- Lien entre application linéaire et morphisme de groupes, conséquences
- Sommé et produit par un scalaire d'applications linéaires
- $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.
- Composition d'applications linéaires
- $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (application à la dérivée k-ème d'une fonction de classe C^∞).
- Application linéaire à valeur dans un produit cartésien d'espaces vectoriels (applications composantes linéaires).
- Applications linéaires coordonnées dans une base.
- Isomorphismes, la bijection réciproque d'une application linéaire est une application linéaire.
- Noyau et image d'une application linéaire
- Lien entre injectivité, surjectivité et noyau d'une application linéaire.

B) Endomorphismes particuliers

- Homotéthies, propriétés sur les homotéthies
- Projecteurs et propriétés
- Symétries et propriétés

C) Applications linéaires et familles de vecteurs

- Famille image d'une famille par une application linéaire
- Lien entre être libre/être lié pour la famille $(x_i)_{i \in I}$ et sa famille image par une application linéaire. Cas particulier où l'application est injective.
- Lien entre être générateur pour la famille $(x_i)_{i \in I}$ et sa famille image par une application linéaire. Cas particulier où l'application est surjective.
- Image d'une base par une application linéaire, lien avec injectivité, surjectivité, bijectivité.
- Détermination unique d'une application par l'image d'une base.

D) Applications linéaires et dimension finie

- Injectivité, surjectivité, bijectivité en dimension finie
- Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont la même dimension.
- Isomorphisme de E vers $K^{\dim(E)}$ à l'aide des applications coordonnées dans une base.
- Si $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$
 f injective $\Leftrightarrow f$ surjective $\Leftrightarrow f$ bijective.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, f bijective $\Leftrightarrow f$ inversible à gauche $\Leftrightarrow f$ inversible à droite.
- Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ lorsque les deux espaces sont de dimension finie.
- Rang d'une application linéaire et propriétés de base sur le rang.
- Théorème du rang

Questions de cours :

- Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On prouvera les propositions suivantes :
 - 1) Si $(x_i)_{i \in I}$ est liée, alors $(f(x_i))_{i \in I}$ est liée.
 - 2) Si $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre, alors $(x_i)_{i \in I}$ est libre.
 - 3) Si $(x_i)_{i \in I}$ est libre et f injective, alors $(f(x_i))_{i \in I}$ est libre.
- Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, soit $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On prouvera les propositions suivantes :
 - 1) $f(\text{vect}((x_i)_{i \in I})) = \text{vect}((f(x_i))_{i \in I})$.
 - 2) Si $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice de E , alors $\text{Im } f = \text{vect}((f(x_i))_{i \in I})$.
 - 3) Si $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice de E , alors $(f(x_i))_{i \in I}$ est génératrice si et seulement si f est surjective dans F .
- (Caractérisation des projecteurs). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On prouvera que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) p est un projecteur ;
 - 2) $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(p - \text{id}_E)$;
 - 3) $p \circ p = p$ (p est idempotente).
- (Caractérisation des symétries). Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On prouvera que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - 1) s est une symétrie ;
 - 2) $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$;
 - 3) $s \circ s = \text{id}_E$ (s est involutive). s est alors la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$, et on a de plus que $s^{-1} = s$.
 - On prouvera les deux théorèmes suivants :
 - 1) Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe un supplémentaire S de $\text{Ker } f$ dans E , de sorte que $E = S \oplus \text{Ker } f$. Alors la restriction $f|_S : S \rightarrow \text{Im } f$ est un isomorphisme.
 - 2) Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si E est de dimension finie, alors :

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f.$$