

TD 7 : INTÉGRALES ET PRIMITIVES

1 Trouver une primitive des fonctions suivantes (en précisant l'intervalle considéré), où u est une fonction de classe C^1 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- 1) $2uu'$
- 2) $\sin(u)u'$
- 3) $\frac{u'}{\cos^2(u)}$
- 4) $u^n u'$, $n \in \mathbb{Z}$ (on discutera selon les valeurs de n).
- 5) $\frac{u'}{u}$.

2 Déterminer une primitive des fonctions suivantes (on précisera sur quel intervalle la primitive est définie).

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) $x \mapsto 2(x^2 + 1)x$; 2) $x \mapsto \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; 3) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x} + 1)$; 4) $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$; 5) $x \mapsto 3 \cos(3x) - \frac{1}{\cos^2(x)}$ | <ol style="list-style-type: none"> 6) $x \mapsto \frac{\text{Arctan}(x)}{1+x^2}$. 7) $x \mapsto \cos(x)e^{-\sin(x)}$ 8) $x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$; 9) $x \mapsto \frac{(\text{Arctan}(x))^2}{1+4x^2}$ 10) $x \mapsto \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$ |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

3 Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, déterminer une primitive sur \mathbb{R} de :

$$f : t \mapsto \frac{1}{t - \alpha}$$

4 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) $x \mapsto \sin^3(x) \cos^3(x)$; 2) $x \mapsto \sin^4(x) \cos^3(x)$; 3) $x \mapsto e^{-\sqrt{3}x} \sin(x)$. | <ol style="list-style-type: none"> 4) $x \mapsto \sin^3(x) \cos^4(x)$; 5) $x \mapsto \sin^4(x) \cos^4(x)$; |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

5 (Fractions rationnelles de petit degré). Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) $x \mapsto \frac{2x-1}{7x+3}$; 2) $x \mapsto \frac{x}{x^2-1}$; 3) $x \mapsto \frac{1}{x^2-6x+9}$; | <ol style="list-style-type: none"> 4) $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$; 5) $x \mapsto \frac{x^2}{x^2-1}$ 6) $x \mapsto \frac{1}{2x^2-3x+1}$ | <ol style="list-style-type: none"> 7) $x \mapsto \frac{1-4x}{6x^2-3x+5}$; 8) $x \mapsto \frac{4x^2-9x+6}{x^2-2x+1}$. 9) $x \mapsto \frac{1}{3x^2+4x+2}$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

6 (Intégration par parties). Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

- | | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) $x \mapsto xe^{-x}$ sur \mathbb{R}; 2) $x \mapsto x^2e^{-x}$ sur \mathbb{R}; 3) $x \mapsto x^2 \ln(1+x^2)$ sur \mathbb{R}; 4) Arcsin sur $[-1; 1]$. 5) Arctan sur \mathbb{R}; | <ol style="list-style-type: none"> 6) $x \mapsto x \sin^3(x)$ sur \mathbb{R}; 7) Arccos sur $[-1; 1]$; 8) $x \mapsto \ln(1+x^2)$ sur \mathbb{R}; 9) $x \mapsto \sin(\ln(x))$ sur \mathbb{R}_+^* 10) $\int_0^\pi x^2 e^x \cos x dx$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

7 (Changement de variables). Déterminer soit une primitive des fonctions suivantes, soit le calcul de l'intégrale à l'aide du changement de variable suggéré. :

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> 1) $t \mapsto \frac{1}{\text{ch}(t)}$ sur $I = \mathbb{R}$ avec $u = e^t$; 2) $t \mapsto \frac{1}{\sin(t)}$ sur $I =]0; \pi[$ avec $u = \tan \frac{t}{2}$; 3) $x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ avec $x = \text{sh}(t)$. | <ol style="list-style-type: none"> 4) $\int_0^1 x^2 \sqrt{2x+1} dx$ ($t = 2x + 1$) 5) $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+\text{ch}(x)} dx$ ($u = e^x$); 6) $\int_0^1 \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}} dx$ ($t = 1 + x^2$) 7) $\int_0^\pi \cos^p(t) \sin^q(t) dt$ où p et q sont deux entiers impairs. |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

8 À l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive des fonctions suivantes. On précisera l'ensemble de définition.

- | | | |
|--------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 1) $f_1 : x \mapsto \frac{x}{1+x^4}$ | 7) $f_7 : x \mapsto \frac{1}{\cos^3(x)}$ | 12) $f_{12} : x \mapsto \frac{x}{1+\sqrt{x+1}}$ |
| 2) $f_2 : x \mapsto \frac{1}{e^{2x}+e^{-x}}$ | 8) $f_8 : x \mapsto \frac{\text{th}(x)}{1+\text{ch}(x)}$ | 13) $f_{13} : x \mapsto \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ |
| 3) $f_3 : x \mapsto \sqrt{e^x-1}$ | 9) $f_9 : x \mapsto \frac{\text{ch}(x)}{1+\text{ch}^2(x)}$ | 14) $f_{14} : x \mapsto \frac{3+\ln(x)}{(4+\ln(x))^2}$ |
| 4) $f_4 : x \mapsto \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}$ | 10) $f_{10} : x \mapsto \frac{1}{\text{ch}^3(x)}$ | 15) $f_{15} : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2\sqrt{x}+x}}$ |
| 5) $f_5 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\sin^2(x)}$ | 11) $f_{11} : x \mapsto \frac{x^5}{1+x^{12}}$ | 16) $f_{16} : x \mapsto \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$ |
| 6) $f_6 : x \mapsto \frac{1}{\cos^4(x)}$ | | |

9 ★★ Calculer les intégrales suivantes.

- | | |
|---------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| 1) $\int_0^1 \frac{dt}{\text{ch}(t)}$ | 5) $\int_0^\pi x^2 \cos(x) dx$ |
| 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos(t)}$ | 6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx;$ |
| 3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{1+\sin(t)\cos(t)}$ | 7) $\int_{-1}^2 \sqrt{4x^2+9} dx$ |
| 4) $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}}$ | 8) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x}$. (Règles de Bioche?) |

10 ★★★

1) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue et T -périodique, avec $T > 0$. Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

2) Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ continue et impaire (resp. paire). Montrer que :

$$\forall \in \mathbb{R}^+ \int_{-a}^a f(x) dx = 0 \text{ (resp. } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.)$$

11 ★★★ Calculer $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt$.