Chapitre 26 : Groupe symétrique

- Structure de groupe
- Cardinal du groupe (non prouvé)
- Transpositions
- Commutations
- Ordre d'une permutation
- Points fixes et support
- Orbites
- Définition cycles et premières propriétés
- Décomposition en produit de cycles à support disjoints
- Décomposition en produit de transpositions
- Application au calcul de l'ordre d'une permutation
- Signature d'une permutation.

Chapitre 27 : Déterminants

A)Application n-linéaires

- Définitions, premières propriétés
- Formes n-linéaires
- Formes symétriques, alternées, anti-symétriques
- Propriétés en lien avec les permutations
- Espace vectorile des formes symétriques et anti-symétriques
- En dimension finie, dans un espace de dimension inférieur ou égale à p.

B)Déterminant d'une famille de vecteurs

- Définitions (existence et unicité admise)
- Formules de changement de base
- Lien entre être une abse et être de déterminant nul

Questions de cours :

- On prouvera les propriétés suivantes. Soit $n \geqslant 1$ et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
  1) $\operatorname{Supp}\left(\sigma^{-1}\right)=\operatorname{Supp}(\sigma)$ et $\operatorname{Fix}\left(\sigma^{-1}\right)=\operatorname{Fix}(\sigma)$.
  2) $\operatorname{Supp}(\sigma)$ et $\operatorname{Fix}(\sigma)$ sont σ-invariants : on a que $\sigma(\operatorname{Supp}(\sigma))=\operatorname{Supp}(\sigma)$ et $\sigma(\operatorname{Fix}(\sigma))=\operatorname{Fix}(\sigma)$.
  3) Soit $n \geqslant 1$ et soit $(\sigma_1,\sigma_2) \in \mathfrak{S}_n^2$. Si les supports de σ_1 et σ_2 sont disjoints (i.e. si $\operatorname{Supp}(\sigma_1) \cap \operatorname{Supp}(\sigma_2)=\emptyset$) alors σ_1 et σ_2 commutent.
- On prouvera les propriétés suivantes : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $f \in \mathcal{L}_p(E,\mathbb{K})$.
  1) f est antisymétrique si et seulement si :
  $$\forall\left(x_1,\ldots,x_p\right) \in E^p, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, f\left(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(p)}\right)=\varepsilon(\sigma) f\left(x_1,\ldots,x_p\right)$$
  2) f est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.
- On prouvera les résultats suivants :
  1) Preuve de la formule de changement de base pour le déterminant
  2) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ et $\mathcal{B}'=\left(e'_1,\ldots,e'_n\right)$ sont deux bases de E, alors
  $$\det_{\mathcal{B}}\left(u(e_1),\ldots,u(e_n)\right)=\det_{\mathcal{B}'}\left(u\left(e'_1\right),\ldots,u\left(e'_n\right)\right).$$