

Chapitre 27 : Déterminants

A) Application n-linéaires

- Définitions, premières propriétés
- Formes n-linéaires
- Formes symétriques, alternées, anti-symétriques
- Propriétés en lien avec les permutations
- Espace vectoriel des formes symétriques et anti-symétriques
- En dimension finie, dans un espace de dimension inférieur ou égale à p .

B) Déterminant d'une famille de vecteurs

- Définitions (existence et unicité admise)
- Formules de changement de base
- Lien entre être une base et être de déterminant nul

C) Déterminant d'un endomorphisme

- Définition (déterminant de l'image d'une base dans cette base) et preuve que la définition ne dépend pas de la base.
- Formules de changement de base
- Lien entre être une base et être de déterminant nul
- Propriétés de calcul
- Déterminant d'une composée, de l'inverse

D) Déterminant d'une matrice carrée

- Définition
- Lien avec les déterminants de vecteurs et les déterminants d'endomorphisme
- Lien avec l'inversibilité de la matrice
- Propriétés de calculs
- Déterminant d'une transposée
- Lien avec colonnes et lignes

E) Méthodes de calcul

- Déterminants en petite dimension
- Propriétés basique du déterminant
- Matrices triangulaires/diagonales
- Pivot de Gauss
- Mineurs, cofacteurs, et développement par rapport à ligne/colonne
- Déterminant de Vandermonde
- Comatrice et formule de la comatrice.

Questions de cours :

- Preuve que pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\det(A) = \det(A^t)$ puis calcul du déterminant d'une matrice par la méthode du pivot de Gauss.
- Calcul du déterminant de Vandermonde
- On prouvera les résultats suivants :
 - 1) Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ sont deux bases de E , alors

$$\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(u(e'_1), \dots, u(e'_n)).$$

- 2) Preuve que pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, $ACom(A)^T = Com(A)^T A = \det(A)I_n$.