Chapitre 28 : Dénombrement

A) Bases sur le cardinal

- Définition cardinal, unicité de la définition
- Sous-ensembles et cardinal
- Opérations sur les ensembles finis (réunion disjointe, complémentaire, réunion disjointe de plusieurs ensembles, union non disjointe)
- Application entre ensembles finis, injectité, surjectivité, bijectivité, principe des tiroirs

B) Dénombrements classiques et méthodes

- Produit cartésien
- Ensembles d'applications et ensemble des parties
- Arrangements,injections et permutations
- Combinaisons (application vu Mardi sur les propriétés des coefficients binomiaux)
- Methodes de dénombrements additives, multiplicatives, compter la même chose plusieurs fois, etc.

Questions de cours :

- **1)** Soit E et F deux ensembles, avec E fini.
  Si f est une injection de E dans F, alors l'ensemble $f(E)$ est fini et card $(f(E)) = \text{card}(E)$.

  2) Soit E et F deux ensembles, avec E fini. Si f est une application de E dans F, alors l'ensemble $f(E)$ est fini et card $(f(E)) \leqslant \text{card}(E)$.
  De plus, on a card $(f(E)) = \text{card}(E)$ si, et seulement si, f est injective.
- On montrera les résultats suivants :
  1) Si $p \in \mathbb{N}^*$, alors le nombre de p-arrangements d'un ensemble de cardinal n est :
  $$n(n-1)\cdots(n-p+1).$$
  Si $1 \leqslant p \leqslant n$, il est donc égal à $\frac{n!}{(n-p)!}$.

  2) Le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est $n(n-1)\cdots(n-p+1)$.

  3) Si card $(E) = \text{card}(F) = n$, le nombre de bijections de E sur F est $n!$.
- **1)** Soit k, p et n des entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$. Dénombrer de deux manières différentes l'ensemble des couples (A, B) de parties d'un ensemble E de cardinal n telles que card $A = k$, card $B = p$ et $A \subset B$.

  2) En déduire le cardinal de l'ensemble des couples (A, B) avec $A \subset B$ dans E.
- On réalisera les exercices suivants :
  1) (Exercice 3 de la feuille de TD 27) : Une urne contient 5 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement avec remise 6 boules de l'urne. Les boules blanches sont numérotées de 1 à 5 et les boules noires de 6 à 13.
    a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
    b) Déterminer le nombre de tirages comportant 5 boules noires et une boule blanche.
    c) Déterminer le nombre de tirages comportant au plus une boule noire
    d) Déterminer le nombre de tirages comportant au moins une boule blanche.

  2) (Exercice 15 de la feuille de td 27)
    a) Dénombrer le nombre d'anagrammes de "orange"
    b) Dénombrer le nombre d'anagrammes de "ananas"