TD 5 : Nombres complexes

Ensembles des nombre complexes,conjugaison et module

1 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1) $(1+3i)(2+7i)$;
2) $(1-3i)(1+3i)$;
3) $(2-i)(5+i)$;
4) $(7-2i)^2$;
5) $\frac{1}{3-2i}$;
6) $\frac{1-2i}{2i+1}$.

2 Dans chaque cas, représenter l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité suivante :

1) $|z|=3$
2) $|z-2+i|=1$
3) $\mathcal{R}e(z)=-2$
4) $\mathrm{I}m(z)=3$

3 Trouver tous les nombres complexes z vérifiant les équations suivantes :

1) $(1+i)z=3-i$
2) $\frac{z+1}{z-1}=2i$
3) $(2z+1-i)(iz+3)=0$
4) $2\bar{z}=i-1$
5) $\frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}=i$
6) $2z+1-i=iz+2$

4 Soit $z\in\mathbb{C}\backslash\{i\}$, on pose $z'=\frac{iz-1}{z-i}$. Démontrer que : $z'\in\mathbb{R}\iff|z|=1$

5 Soit A,B,C les points d'affixes respectifs $a=1+i, B=-i$ et $c=-1+2i$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

6 ★ ★ Soit a,b,c trois complexes de module 1 . Montrer que $|ab+bc+ca|=|a+b+c|$.

7 Soit a et b deux complexes. Montrer que : $|a|^2+|b|^2=\frac{1}{2}\left(|a+b|^2+|a-b|^2\right)$

8

1) Pour $z\in\mathbb{C}^*$, établir que $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ si, et seulement si, $|z|=1$ ou $z\in\mathbb{R}^*$.
2) Déterminer les couples (z,z') de complexes tels que $\left|z+z'\right|=\left|1+\bar{z}z'\right|$.
3) Soit u et v deux complexes. On pose $z=u+iv$. Montrer que $|z|^2=u^2+v^2$ si, et seulement si, $z=0$ ou u et v sont réels ;

9 ★★ On considère l'application :

$$h:\mathbb{C}\backslash\{2\}\to\mathbb{C}$$
$$z\mapsto\frac{z+1}{z-2}$$

Déterminer l'ensemble des complexes z tels que :

1) $\exists\omega\in\mathbb{C}, h(\omega)=z$
2) $|h(z)|=1$
3) $\mathcal{R}e(h(z))=0$

10 Soient les points $A(a),B(b),C(c)$ tels que :

$$a=1+\frac{3}{4}i,\ b=2-\frac{5}{4}i \text{ et } c=3+\frac{7}{4}i$$

1) Placer les points A,B et C dans le plan complexe.
2) Quelle est la nature du triangle ABC ?
3) Calculer l'affixe de A' tel que $ABA'C$ soit un carré.

Complexes de module 1 et forme trigonométrique

11 Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = 2+2i\sqrt{3}$
2) $z_2 = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$
3) $z_3 = 4-4i$
4) $z_4 = -2i$
5) $z_5 = -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$
6) $z_6 = \frac{4}{1-i}$
7) $z_7 = (1-i)^6$
8) $z_9 = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$
9) $z_{10} = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$

12 Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

1) $1+e^{i\frac{\pi}{3}}$;
2) $1-e^{-i\frac{i\pi}{6}}$;
3) $e^{i\frac{5\pi}{6}}-1$;
4) $1+ie^{i\frac{\pi}{3}}$

13 Simplifier $\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$, pour $\theta \in]-\pi,\pi[$.

14 Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = \sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$
2) $z_2 = \frac{1-\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)+i\sin(\theta)}, \theta \in \mathbb{R}$
3) $z_3 = -\sin(2\theta)+2i\cos(\theta)^2, \theta \in \mathbb{R}$

15 (Linéarisation). Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de $\cos(k\cdot x)$ et $\sin(k\cdot x)$ pour k entier :

1) $\cos^3(x)$;
2) $\sin^3(x)$
3) $\cos^4(x)$;
4) $\cos^3(x)\sin^2(x)$.
5) $\sin^5(x)$;
6) $\sin^6(x)+\cos^4(x)\sin^2(x)$

16 (Délinéarisation) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction des puissances de $\cos x$ et $\sin x$:

1) $\cos(5x)$;
2) $\cos(8x)$
3) $\sin(6x)$;
4) $\sin(9x)$

17 ★★ Soit $\theta \in \mathbb{R}$, simplifier les sommes suivantes :

$$C_n = \sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$$

18

1) Soit $z \in \mathbb{U}\backslash\{1\}$. Montrer que $\frac{z+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
2) ★ Déterminer tous les complexes z tels que :

$$|z| = |1-z| = \left|\frac{1}{z}\right|$$

3) Soit z un nombre complexe qui n'appartient pas à $\mathbb{R}_-$. Montrer que si θ est un argument de z, on a $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z+|z|}$.

19 Soit $z_1,\ldots,z_n$ des nombres complexes non nuls. Démontrer que $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$ si, et seulement si, $z_1,\ldots,z_n$ ont mêmes arguments.
Indication. On pourra raisonner par récurrence pour le sens direct.

Equations algébriques dans $\mathbb{C}$.

20 (Ajout sur les calculs de sommes) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer :

1) $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)\sin(ky)$;
2) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(kx)$.

21 ♡ Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = -4i$
2) $z_2 = 1 - i$;
3) $z_3 = \sqrt{3} - i$;
4) $z_4 = 9 + 40i$

22 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1) $z_1 = (1+i)^{1024}$;
2) $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$
3) $z_3 = 48 - 2i$;
4) $z_4 = 1 + e^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

23 ♡ Déterminer l'ensemble des solutions des équations d'inconnues $z \in \mathbb{C}$ suivantes :

1) $z^6 = 1$;
2) $z^6 = -1$;
3) $z^3 = i$;
4) $z^4 = -7 - 24i$.

24 ♡ Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^2 + (1+i)z - i + 2 = 0$;
2) $z^2 + (3+4i)z - 1 + 5i = 0$
3) $z^4 - 30z^2 + 289 = 0$;
4) $(z+i)^n = (z-i)^n$(avec $n \in \mathbb{N}$).

25

1) Déterminer les racines carrées de $5 - 12i$.
2) En remarquant que $-2i$ est solution, résoudre l'équation :

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$$

3) Que dire du triangle dont les sommets ont pour affixes les solutions de l'équation précédente ?

26 ★★ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 + 8(1-i)z - 5 = 0$$

Focus sur les racine n-ièmes de l'unité

27 Trouver toutes les solutions complexes des équations suivantes :

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*, z^n + 1 = 0$
2) $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$
3) $z^8 + 4z^4 + 16 = 0$
4) $z^5 = \bar{z}$
5) $\left(z^2 + z + 1\right)^2 + 1 = 0$

28 Résoudre de deux façons différentes l'équation : $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$ et en déduire la valeur de $\tan \frac{\pi}{5}$.

29 ♡ Calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ (Rappel) et $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$ pour tout $n \geqslant 1$.

30 ♡★★ Soit $\omega = e^{2i\pi/7}$. Trouver une écriture algébrique simple de :

$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$$

31 ★ Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{U}_p \subset \mathbb{U}_q$.

Lien avec la géométrie (le retour)

32 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation demandée :

1) $\arg(z-2)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

2) $\arg(z-2)=\frac{\pi}{2}[\pi]$

3) $\arg(iz)=\frac{\pi}{4}[\pi]$

4) $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right)=\frac{\pi}{2}[2\pi]$

5) $\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right)=\frac{\pi}{2}[\pi]$

33 On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct.

1) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, caractériser géométriquement les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivantes :

a) $f(z)=z+2-i$

b) $f(z)=iz$

c) $f(z)=-3z+2-i$ $f(z)=iz+2$

e) $f(z)=(1-i)z+3i$

f) $f(z)=e^{i\alpha}z-e^{i\alpha}+1$

2) Donner l'écriture complexe des transformations suivantes :

a) Homothétie de centre $A(1+2i)$ et de rapport -2 .

b) Rotation de centre $\Omega(-1+3i)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

c) Similitude directe de centre $B(1-i)$, de rapport 3 et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

3) Donner l'écriture complexe et la nature de la similitude directe s telle que :

$$s(A)=C \text{ et } s(B)=D$$

avec $A(1+i),B(-2+i),C(-2+i)$ et $D(-2-8i)$.

34 Trouver tous les nombres complexes z tels que les points d'affixe z,z^2 et z^4 soient alignés.

35

Soient A et B deux points distincts dans le plan complexe, $\mathcal{P}$. À l'aide des nombres complexes, démontrer le résultat classique suivant :

$$\forall M\in\mathcal{P},(MA)\perp(MB)\Leftrightarrow M\in\mathcal{C}$$

où $\mathcal{C}$ désigne le cercle de diamètre $[AB]$.

36 Soient A,B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b et c. Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si :

$$a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)=0.$$