

## Chapitre 29 : Probabilités sur un univers fini, Variables aléatoires

### A) Vocabulaire de base des probabilités

- Univers, évènements
- Evènements élémentaires, incompatibles, certains, impossible
- Système complet d'évènements<sup>2</sup>
- Variables aléatoires sur un univers fini
- Exemples classiques

### B) Espaces probabilisés

- Définition probabilité, espace probabilisé
- Premières propriétés
- Additivité fini, somme des probabilités d'un système complet d'évènements.
- Distribution de probabilités, Détermination d'une probabilité par les évènements élémentaires
- Exemple fondamental : La probabilité uniforme

### C) Loi d'une variable aléatoire

- Définition
- Lien avec les évènements élémentaires
- Variables aléatoires de mêmes lois (maintenu par la composition)
- Lois usuelles : uniforme, Bernouilli, binomiale

### C) Couples de variables aléatoires

- Définition
- Exemples classiques
- Loi conjointe, loi marginale
- Généralisation aux n-uplets/vecteurs aléatoires.

### D) Conditionnement

- Probabilité conditionnelle, premières propriétés
- Formule des probabilités composées, totale, de Bayes
- Loi d'une Variable aléatoire conditionnée par un évènement.

### E) Indépendance

- Evènements indépendants, lien avec la probabilité conditionnelle, indépendance des évènements contraires
- indépendance famille d'évènements
- Variables aléatoires indépendantes
- Indépendance via les évènements élémentaires, via les lois conditionnelles
- Fonctions de variables indépendantes
- Indépendance de  $n$  variables aléatoires, différence avec indépendant 2 à 2.
- Fonctions de variables indépendantes
- Lemme des coalitions
- Sommes de variables aléatoires de Bernouilli

## Questions de cours :

- On redonnera **Très précisément** la définition d'une probabilité puis on prouvera les propriétés suivantes :

1) Soit  $A$  et  $B$  deux événements de  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On a :

a)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ ;

b)  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$

c) si  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$  : on dit que  $P$  est croissante ; de plus,  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$  ;

d)  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .

2) Pour toute famille finie  $(A_1, \dots, A_n)$  d'événements deux à deux incompatibles de  $(\Omega, \mathbb{P})$ , on a :

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k).$$

3) Si  $(A_1, \dots, A_n)$  est un système complet d'événements de  $(\Omega, \mathbb{P})$ , alors on a :

$$\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) = 1$$

et, plus généralement, pour tout événement  $B$  :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

- 1) Prouver que : soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On a alors :

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}).$$

2) On lance deux dés équilibrés successivement :  $X$  est la variable aléatoire égale au plus petit des nombres apparus et  $Y$  est la variable aléatoire égale au plus grand des nombres apparus. Déterminer la loi conjointe du couple  $(X, Y)$  ainsi que les lois marginales.

- 1) Prouver la formule des probabilités totales et la formule de Bayes.

2) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dispose de  $n$  urnes  $U_1, \dots, U_n$  tels que pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , l'urne  $U_i$  contient  $i$  boules blanches et  $n - i$  boules noires.

On tire aléatoirement un numéro  $i$  entre 1 et  $n$  On tire ensuite une boule aléatoirement dans l'urne  $U_i$ .

Quelle est la probabilité de tirer une boule blanche ?

3) Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille. On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,1% des personnes saines testées. Calculer la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif.