Thomas Masanet

# I Questions préliminaires

**Exercice 1**

**(Divers)**

**1)** On construit la table de vérité suivante (Attention, il faut bien prendre toutes les valeurs possibles de $P, Q$ et $R$, il y a donc 8 lignes).

| $P$ | Q | R | P$\Rightarrow R$ | Q $\Rightarrow R$ | P$\Rightarrow R$ et $Q \Rightarrow R$ | P ou Q | (P ou Q) $\Rightarrow R$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | F | F | V | F |
| V | F | V | V | V | V | V | V |
| V | F | F | F | V | F | V | F |
| F | V | V | V | V | V | V | V |
| F | V | F | V | F | F | V | F |
| F | F | V | V | V | V | F | V |
| F | F | F | V | V | V | F | V |

Les valeurs de vérités de $P \Rightarrow R$ et $Q \Rightarrow R$ et de $(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R$ sont les mêmes donc ces propositions sont équivalentes. Autre façon de faire : Par opérations successives :

$$\begin{aligned}(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R &\sim \neg(P \text{ ou } Q) \text{ ou } R\\ &\sim (\neg P \text{ et } \neg Q) \text{ ou } R\\ &\sim (\neg P \text{ ou } R) \text{ et } (\neg Q \text{ ou } R)\\ &\sim P \Rightarrow R \text{ et } Q \Rightarrow R.\end{aligned}$$

**2)** a) On avance pas à pas :

$$\begin{aligned}\neg[\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0] &\sim \exists x \in \mathbb{R}, \neg[f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0]\\ &\sim \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \text{ et } \neg[x \leq 0]\\ &\sim \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \text{ et } x > 0\end{aligned}$$

La négation de la proposition est donc : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et $x > 0$

b) Pour ces questions si la proposition est vraie, on va devoir prouver pour tout $x$ dans $\mathbb{R}$ que $f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$, si elle est fausse, on doit juste trouver un (contre-)exemple où $f(x) > 0$ et $x > 0$. La question précédente nous aidait à identifier ceci.

i) Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 0$. On a donc $-x > 0$ d'où $x < 0$ soit $x \leq 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$ donc la proposition ets vraie pour cette fonction.

ii) Pour tout $x$ dans $R$, $f(x) = -1$ donc la proposition $f(x) > 0$ est fausse. Donc $f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$ est tous le temps vraie, la première partie de l'implication étant fausse.

iii) Même chose que la question précédente (il faut montrer que $-x^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$,...).

iv) $f(1) > 0$ et $1 > 0$ donc la proposition est fausse (pas besoin de prouver quelque chose pour tout $x$, ici seul un exemple suffit).

v) $f(1) > 0$ et $1 > 0$ donc la proposition est fausse.

vi) $f(1) > 0$ et $1 > 0$ donc la proposition est fausse.

**3)** a) $\forall p$ nombre premier, $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, P(p, a.b) \Rightarrow P(p, a)$ ou $P(p, b)$.

b) Pour la négation on applique pas à pas la négation, pour une implication $Q \Rightarrow R$ la réciproque c'est $\mathbb{R} \Rightarrow Q$ et la contraposée est $\neg R \Rightarrow \neg Q$ (dont on rappelle qu'elle est équivalente à la proposition). On a donc :
(Négation) $\exists p$ nombre premier, $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2, P(p, a.b)$ et $\neg P(p, a)$ et $\neg P(p, b)$.
(Contraposée) $\forall p$ nombre premier, $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \neg P(p, a)$ et $\neg P(p, b) \Rightarrow \neg P(p, a.b)$.
(Réciproque) $\forall p$ nombre premier, $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, P(p, a)$ ou $P(p, b) \Rightarrow P(p, a.b)$.

c) (Difficile à faire à cause de l'erreur de définition mais voici la preuve :) Soit $p$ nombre premier et $a, b \in \mathbb{Z}^2$.
Supposons que $P(p, a)$ ou $P(p, b)$.
Si $P(p, a)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kp$ donc $ab = (bk)p$ donc $p$ divise $ab$.
De même si $P(p, b)$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = kp$ donc $ab = (ak)p$ donc $p$ divise $ab$.
On a donc bien prouvé que :
$\forall p$ nombre premier, $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \neg P(p, a)$ et $\neg P(p, b) \Rightarrow \neg P(p, a.b)$.

**1)** Soit $p$ un nombre premier :
On veut prouver pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition $Q(n)$ suivante : "$\forall (a_k)_{k\in[\![1,n]\!]} \in \mathbb{Z}^n, P(p, \prod_{k=1}^n a_k) \Rightarrow \exists k \in [\![1,n]\!] P(p, a_k)$."
On raisonne par récurrence :
<u>Initialisation</u>
Pour $n = 1$, $Q(n)$ s'écrit "$\forall a \in \mathbb{Z}, P(p,a) \Rightarrow P(p,a)$".
Or si $P(p,a)$ est vraie, $P(p,a)$ est vraie donc $Q(1)$ est vraie.
<u>Hérédité</u>
Supposons la propriété vraie au rang $n$.
Soit $a_1, \cdots, a_{n+1}$ $n+1$ entiers tels que $P(p, \prod_{k=1}^{n+1} a_k)$.
$p$ divise $\prod_{k=1}^{n+1} a_k$ donc $p$ divise $(\prod_{k=1}^n a_k) \times a_{n+1}$. D'après le théorème 2 on a donc que $P(p, \prod_{k=1}^n a_k)$ ou $P(p, a_{n+1})$.
Si $P(p, a_{n+1})$ alors $Q(n+1)$ est vraie.
Sinon $P(p, \prod_{k=1}^n a_k)$ et donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\exists k \in [\![1,n]\!], P(p, a_k)$.
Donc $Q(n+1)$ est vraie.
D'après le théorème de récurrence la proposition $Q(n)$ est donc vraie pour tout $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

<u>**Exercice 2**</u>

**1)** On fait une disjonction de cas selon le signe de $x \mapsto 2x$ et $x \mapsto 2x+2$. Après réalisation du tableau de signe (je ne le remet pas ici), l'équation s'écrit :
$2 \leq 3$ sur $]-\infty, -1[$ (donc tout réel de $]-\infty, -1[$ vérifie l'inéquation.)
$-4x - 2 \leq 3$ sur $[-1, 0[$ ce qui après manipulation donne $x \geq \frac{-5}{4}$ (donc tout réel de $[-1, 0[$ vérifie l'inéquation)
$-2 \leq 3$ sur $[1, +\infty[$ (donc tout réel de $[1, +\infty[$ vérifie l'inéquation.)
Au final l'inéquation est donc vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

**2)** On revient à la définition :

$$\begin{aligned}\lceil 5x+1 \rceil = 3 &\iff 3 \leq 5x+1 < 3+1 = 4\\ &\iff 2 \leq 5x < 3\\ &\iff \frac{2}{5} \leq x \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

Les solutions de cette équations sont donc les $x \in [\frac{2}{5}, \frac{3}{5}[$.

**3)** a) $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence d'un produit de fonctions dérivable et d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ .
De plus pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$f^{'}(x) = \frac{x+1}{x} + \ln(x) - 2$$

$f^{'}$ est alors également dérivable sur $I$ comme somme de fonctions dérivable sur $I$ et d'un quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.
De plus, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\begin{aligned}f^{''}(x) &= \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}\\ &= \frac{x-1}{x^2}.\end{aligned}$$

b)

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f^{''}(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f^{'}(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

c) Tout d'abord, l'inéquation est bien définie pour $x \in R^* \backslash \{1\}$ c'est donc sur cet ensemble qu'on va chercher les solutions.
D'après ce qui précède, pour $x \in ]0,1[$, on a $f(x) \leq 0$, soit $(x+1)\ln(x) - 2(x-1) \leq 0$ .
Donc $(x+1)\ln(x) \leq 2(x-1)$. On divise alors par $(x-1)$ des deux côtés de l'inégalité (ce qui change le sens de l'inégalité car $x - 1 < 0$ sur $]0,1[$).
Donc $\frac{x+1}{x-1}\ln(x) \geq 2$ pour $x$ dans $]0,1[$.
Pour $x \in ]1, +\infty[$, on a $f(x) \geq 0$, soit $(x+1)\ln(x) - 2(x-1) \geq 0$ .
Donc $(x+1)\ln(x) \geq 2(x-1)$. On divise alors par $(x-1)$ des deux côtés de l'inégalité (ce qui ne change pas le sens de l'inégalité car $x-1 > 0$ sur $]1, +\infty[$). Donc $\frac{x+1}{x-1}\ln(x) \geq 2$ pour $x$ dans $]1, +\infty[$.
Finalement les solutions de l'inéquation sont tout l'ensemble $R^* \backslash \{1\}$.

# II Problème

**Exercice 3**

1) **Lien avec le nombre d'or**

a) On trouve :

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 |

b) Pour démontrer ce résultat, on peut vérifier, par récurrence double sur $n \geq 5$, que :

$$\mathcal{H}_n : F_n \geq n$$

- Initialisation. On a $F_5 = 5 \geq 5$ et $F_6 = 8 \geq 6$, ce qui démontre que $\mathcal{H}_5$ et $\mathcal{H}_6$ sont vraies. - Hérédité. Fixons $n \geq 5$ et supposons que $F_n \geq n$ et $F_{n+1} \geq n+1$. On a :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \geq n+1+n = 2n+1 \geq n+2 \quad (\text{car}\, 2n+1 \geq n+2 \Longleftrightarrow n \geq 1)$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie et achève la récurrence. On sait que :

$$\forall n \geq 5, F_n \geq n$$

c) Par passage à la limite, d'après le théorème de comparaison, cela implique que :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty$$

. Ceci utilise les théorèmes de comparaison que je n'avais pas rappelé mais on pouvait d'y ramener en utilisant le théorème 1. En effet la question précédente nous assure que $(F_n)$ n'est pas majorée, il nous reste à montrer que la suite est croissante, ce qui ets vrai pour les premier termes et pour $n \geq 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geq F_n$ donc la suite est bien croissante. En appliquant le théorème de la croissance monotone on a donc que :

$$\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty.$$

d) L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ a pour discrimimant : $\Delta = 5$, elle possède deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Seul le réel $x_1$ est positif, on note :

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e) Grâce à l'étude menée dans la question précédente, on sait que l'autre solution de l'équation est :

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

D'autre part, on applique la technique de multiplication par la quantité conjuguée :

$$-\frac{1}{\varphi} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = -\frac{2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

f) Démontrons par récurrence double sur $n \geq 0$ que :

$$\mathcal{H}_n : F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right)$$

**Initialisation** Pour $n = 0$, la formule devient $F_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-1) = 0$, ce qui est exact.
Pour $n = 1$, la formule devient :

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi + \frac{1}{\varphi}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4}\right) = 1$$

comme voulu.
**Hérédité** On suppose $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies pour un entier naturel $n$ fixé. Démontrons $\mathcal{H}_{n+2}$. On a :

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - (-\varphi)^{-(n+1)}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\varphi^{n+1} + \varphi^n\right) - \left(\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1} + \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} - (-\varphi)^{-(n+2)}\right)
\end{aligned}$$

Cette dernière étape étant correcte car $\varphi$ et $-\frac{1}{\varphi}$ sont solutions de l'équation $x^2 = x+1$ donc de l'équation $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$ ( en multipliant par $x^n$). Ceci démontre la formule au rang $n+2$ et termine la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}\right)$$

g) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - (-\varphi)^{-(n+1)}}{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}} = \frac{\varphi^{n+1}\left(1 - \frac{(-\varphi)^{-(n+1)}}{\varphi^{n+1}}\right)}{\varphi^n\left(1 - \frac{(-\varphi)^{-n}}{\varphi^n}\right)} = \varphi \frac{1 - \frac{(-\varphi)^{-(n+1)}}{\varphi^{n+1}}}{1 - \frac{(-\varphi)^{-n}}{\varphi^n}}$$

$$\text{Or } \lim_{n\to+\infty} \frac{(-\varphi)^{-n}}{\varphi^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{\varphi^2}\right)^n = 0 \text{ car } -\frac{1}{\varphi^2} \in ]-1,1[.$$

Ce qui démontre que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.$$

**2)** **Premières formules sur la suite de Fibonacci**

a) Démontrons la formule annoncée par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\mathcal{H}_n : \varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$$

- Initialisation. On a :

$$F_1\varphi + F_0 = \varphi \quad \text{et} \quad F_2\varphi + F_1 = \varphi + 1 = \varphi^2$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont vérifiées. - Hérédité. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ sont vraies. On a :

$$\varphi^{n+2} = \varphi^n\varphi^2 = \varphi^n(\varphi+1) = \varphi^{n+1} + \varphi^n = (F_{n+1}\varphi + F_n) + (F_n\varphi + F_{n-1}) = F_{n+2}\varphi + F_{n+1}$$

ceci en utilisant la définition de la suite de Fibonacci. Nous avons démontré $\mathcal{H}_{n+2}$ et cela achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \varphi^n = F_n\varphi + F_{n-1}$$

b) Démontrons la formule annoncée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{H}_n : \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$$

**Initialisation** : Pour $n = 0$, la formule devient $F_0 = F_1 - 1$, ce qui est vrai. - **Hérédité** : On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k} + F_{2n+2} = F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2} = F_{2n+3} - 1$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée et termine la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$$

c) (e) Démontrons la formule annoncée par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{H}_n : \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$$

**Initialisation** : Pour $n = 0$, la formule devient $F_0^2 = F_0F_1$, ce qui est vrai. **Hérédité** :On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $\mathcal{H}_n$ est vérifiée. On a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=0}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2 = F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) = F_{n+1}F_{n+2}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée et termine la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_nF_{n+1}$$

d) Démontrons la formule annoncée par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

$$\mathcal{H}_n : F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

**Initialisation** : Pour $n = 0$, on a bien : $F_1 = 1$ et $\binom{0}{0} = 1$. Pour $n = 1$, on a bien : $F_2 = 1$ et $\binom{1}{0} + \binom{0}{1} = 1 + 0 = 1$
**Hérédité** : On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{n+1}$ vraies. On a :

$$\begin{aligned}
F_{n+3} &= F_{n+2} + F_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n-(i-1)}{i-1} \quad \text{en posant } i = k+1 \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1-i}{i} + \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n-(i-1)}{i-1} \quad \text{car } \binom{n+1}{-1} = 0 \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+2-i}{i} \quad \text{en utilisant la formule de Pascal} \\
&= \sum_{i=0}^{n+2} \binom{n+2-i}{i} \quad \text{puisque } \binom{0}{n+2} = 0
\end{aligned}$$

Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+2}$ est vraie et termine la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$$

3) **Interlude : nombres premiers et irrationalité**

a) On utilisera plutôt le fait que $n^2 = n.n$. On raisonne par double implication :
($\Rightarrow$) Supposons que $p$ divise $n$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = kp$ donc $n^2 = (kp)^2 = (k^2p)p$ donc $p$ divise $n^2$.
($\Leftarrow$) Supposons que $p$ divise $n^2$ alors $p$ divise $n.n$ donc d'après le théorème 2, $p$ divise $n$.
On a donc bien prouvé par double implication que :
$p$ divise $n \Leftrightarrow p^2$ divise $n^2$.

b) Il faut refaire la même preuve que pour $\sqrt{2}$.
Soit $p$ nombre premier,supposons par l'absurde que $\sqrt{p}$ est rationnel. Alors il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}_+^*$ premiers entre eux tel que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$.
En mettant au carré et réarrangeant, on obtient que : $pb^2 = a^2$. (*)
Donc $p$ divise $a^2$ donc d'après ce qui précède $p$ divise $a$.
Il existe donc $k_i n\mathbb{Z}$ tel que $a = pk$.
Donc en reprenant (*) on a que $pb^2 = p^2k^2$ d'où $b^2 = pk^2$ donc $p$ divise $b$.
$p$ divise $a$ et $b$ alors que la fraction $\frac{a}{b}$ est sensé être irréductible ce qui est absurde.
Donc $\sqrt{p}$ est irrationnel.

c) $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Comme 5 est premier, d'après ce qui précède, $\sqrt{5}$ est irrationnel donc $\frac{\sqrt{5}}{2}$ est irrationnel et $\varphi = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$ est irrationnel.

d) Dans la définition qu'on s'est donné la dernière puissance dans la décomposition doit être d'exposant strictement positfe ce qui n'est pas le cas ici.

e) Soit $n$ admettant une décomposition en facteurs premiers, $\exists m \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{N}, \alpha_m \geq 1, n = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$. On a donc que $n \geq p_m^{\alpha_m} > 1$. Donc 1 ne peut admettre une décomposition en facteurs premiers.
$6 = 2^1 3^1$ et $42 = 2^1 3^1 5^0 7^1$ (ne pas oublier le $5^0$).

f) On veut prouver la proposition suivante pour tout $n \geq 2$ : $Q(n) =$ "$n$ admet une décomposition en facteur premier" On raisonne par récurrence forte sur $n$ :
**Initialisation** : Au rang $n = 2$, la proposition s'écrit "2 admet une décomposition en facteurs premiers". Ce qui est vrai car $2 = 2^1$ admet bien une décomposition en facteurs premiers.
**Hérédité** : On suppose la proposition vraie pour tout $2 \leq k \leq n$. On a deux possibilités. Soit $n+1$ est premier auquel cas $n+1 = (n+1)^1$ admet une décomposition en facteur premier. Si $n+1$ n'est pas premier alors il existe $2 \leq k_1 \leq n$ et $2 \leq k_2 \leq n$ tels que $k_1 k_2 = n+1$.
D'après l'hypothèse de récurrence $k_1$ et $k_2$ admettent une décomposition en facteurs premiers d'où :

$$\exists m_1 \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_1, \cdots, \alpha_{m_1} \in \mathbb{N}, \alpha_{m_1} \geq 1, k_= \prod_{i=1}^{m_1} p_i^{\alpha_i}.$$

et

$$\exists m_2 \in \mathbb{N}^*, \exists \beta_1, \cdots, \beta_{m_2} \in \mathbb{N}, \alpha_{m_2} \geq 1, k_= \prod_{i=1}^{m_2} p_i^{\beta_i}.$$

On a donc que $n+1 = \prod_{i=1}^{max(m_1,m_2)} p_i^{\alpha_i+\beta_i}$. (où $\alpha_i = 0$ si $i > m_1$ et $\beta_i = 0$ si $i > m_2$) avec $\alpha_{max(m_1,m_2)} + \beta_{max(m_1,m_2)} \geq 1$ car $\alpha_{max(m_1,m_2)} = \alpha_{m_1} \geq 1$ si $m_1 \geq m_2$ et $\beta_{max(m_1,m_2)} = \beta_{m_2} \geq 1$ si $m_2 \geq m_1$.
Donc $n+1$ admet une décomposition en facteurs premiers donc la proposition est vraie au rang $n+1$.
Par théorème de récurrence forte, on a donc que $Q(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

g) Soit $p$ un nombre premier, et $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$ admettant pour décomposition en facteur premier $n = \prod_{i=1}^m p_{ii}^{\alpha}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in \mathbb{N}$ et $\alpha_m \geq 1$. On raisonne par double implication.
($\Leftarrow$) Si $\exists i \in [1, m], p_i = p$ et $\alpha_i \geq 1$ alors $n = pp_i^{\alpha_i - 1} \prod_{j=1, j\neq i}^m p_{j\,j}^{\alpha}$ donc $p$ divise $n$.
($\Rightarrow$) Supposons que $p$ divise $n$, alors $p$ divise $\prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$. D'après la question 4 de l'exercice 1, il existe $i \in [\![1, m]\!]$ tel que $p$ divise $p_i^{\alpha_i}$. donc $alpha_i \geq 1$ car $p$ ne divise pas 1 et $p$ divise $p_i$ par le même raisonnement qu'en question 3a). Or $p_i$ est un nombre premier donc $p_i = p$.
On a donc prouvé par double implication que :
$p$ divise $n \Leftrightarrow \exists i \in [\![1, m]\!], p_i = p$ et $\alpha_i \geq 1$.

h) Soit $n \geq 2$ et $\prod_{i=1}^{m_1} p_i^{\alpha_i}$, $\prod_{i=1}^{m_2} p_i^{\beta_i}$ 2 décompositions en facteurs premiers de $n$. ($m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ et $\alpha_1, \cdots, \alpha_{m_1}, \beta_1, \cdots, \beta_2 \in \mathbb{N}$ et $\alpha_{m_1} \geq 1, \beta_{m_2} \geq 1$.
D'après ce qui précède $p_{m_1}$ divise $n$ donc $p_{m_1}$ est un des nombre premiers apparaissant dans la seconde décomposition avec un exposant plus grand que 1 donc $m_1 \leq m_2$. et par le même raisonnement dans l'autre sens $m_2 \leq m_1$ donc $m_1 = m_2$.
Montrons que pour tout $i \in [\![1, m_1]\!]$, $\alpha_i = \beta_i$.
Soit $i \in [\![1, m_1]\!]$, supposons par l'absurde que $\alpha_i \neq \beta_i$.
Sans perte de généralités, on peut supposer que $\alpha_i < \beta_i$.Divisons par $p_i^{\alpha_i}$ les deux décompositions. On a alors que $\prod_{k\neq i}^{m_1} p_k^{\alpha_k} = p_i^{\beta_i - \alpha_i} \prod_{j\neq i}^{m_1} p_j^{\beta_j}$.
$p_i$ divise cette seconde décomposition donc il divise la première ce qui est absurde d'après la question précédente.
donc $\alpha_i = \beta_i$.
Les deux décompositions sont donc les mêmes, donc il y a unicité de la décomposition en facteurs premiers.

4) **Suites récurrentes et nombre d'or**

a) On peut démontrer par une récurrence immédiate que pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$\mathcal{H}_n : u_n \geq 0$$

**Initialisation**. On a bien $u_0 = 1 \geq 0$.
**Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n \geq 0$ alors $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ est bien défini et $u_{n+1} \geq 0$. Ce qui démontre que $\mathcal{H}_n$ est vraie et termine la récurrence. $(u_n)$ est bien définie

b) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$comme composée des fonctions $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ qui sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$et sur $[1,+\infty[$ (On peut aussi simplement revenir à la définition de la croissance en prenant $x \leq y$ et prouvant par inégalités successives que $f(x) \leq f(y)$.)

c) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}_n : u_{n+1} \geq u_n$$

**Initialisation** :. On a : $u_1 = \sqrt{2} \geq u_0 = 1$.
**Hérédité** : Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $u_{n+1} \geq u_n$, en appliquant la fonction $f$ qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a : $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$, c'est-à-dire $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Ce qui démontre que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie et achève la récurrence.
$(u_n)$ est croissante.

d) Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\mathcal{H}_n : u_n \in [0,\varphi]$$

**Initialisation** : On a : $u_0 = 1 \in [0,\varphi]$ puisque $\varphi \approx 1.618$.
-**Hérédité** : Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose que $u_n \in [0,\varphi]$. Par croissance et continuité de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$u_{n+1} = f(u_n) \in f([0,\varphi]) = [f(0), f(\varphi)] = [1,\varphi] \subset [0,\varphi]$$

En effet, $f(\varphi) = \sqrt{1+\varphi} = \sqrt{\varphi^2} = \varphi$. Ce qui démontre que $\mathcal{H}_n$ est vraie et achève la récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,\varphi]$$

e) D'après les questions c) et d), la suite $(u_n)$ est croissante et majorée par $\varphi$. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $(u_n)$ converge.

$$(u_n) \text{ est convergente}$$

f) Posons $n_1 = n_0 - 1$. Pour $n \geq n_1, n+1 \geq n_0$ donc par hypothèse, $|u_{n+1} - l| = |v_n - l| \leq \varepsilon$.

g) Revenir à la définition formelle qui est donnée.

h) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f(x) = x \iff \sqrt{1+x} = x \iff 1+x = x^2 \iff x = \varphi$$

Le seul point fixe de $f$ sur $\mathbb{R}_+$est $\varphi$.

i) D'après la question (d), notons $l$ la limite de $(u_n)$ et $(v_n)$. Par continuité de $f$,en utilisant le théorème 3, on en déduit que $l = f(l)$ puisque $l = \lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(l)$. Ainsi $l$ est un point fixe de $f$ sur $\mathbb{R}_+$, d'après la question précédente, il n'y a pas le choix : la suite converge vers $\varphi$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \varphi.$$