

## TD 30 : INTÉGRATION

### Uniforme continuité et construction de l'intégrale.

1) Déterminer si les fonctions suivantes sont uniformément continues sur  $\mathbb{R}_+$  :

- 1)  $f(x) = \sin(x)$ ;
- 2)  $h(x) = x\sqrt{x}$ ;
- 3)  $g(x) = \sin(x^2)$ ;
- 4)  $\ell(0) = 0$  et  $\forall x > 0, \ell(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ .

2) Déterminer si les fonctions suivantes sur continues par morceaux sur l'intervalle  $I$  spécifié :

- 1)  $f(x) = \exp(\lfloor 2x \rfloor)$  sur  $I = [-1; 2]$ .
- 2)  $g(0) = 0$  et  $\forall x > 0, g(x) = \frac{1}{x} - \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$  sur  $I = [0; 1]$ .

3) Soit  $a \in \mathbb{R}$  et  $f : [0; a] \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$x \mapsto x^2$$

- 1) Pour tout  $\varepsilon > 0$  déterminer  $\varphi$  et  $\psi$  en escaliers sur  $[0; a]$  telles que  $\varphi \leq f \leq \psi$  et  $|\psi - \varphi| \leq \varepsilon$ .
- 2) On prend  $\varepsilon = \frac{a^2}{n}$  pour  $n \geq 1$ . En déduire un encadrement de  $\int_0^a x^2 dx$  puis une limite de somme (penser à l'intégrale des fonctions en escalier).

4

- 1) Calculer la dérivée de la fonction  $f(x) = \int_x^{x^2+1} e^{-t^2} dt$ .
- 2) Démontrer que la fonction  $f(x) = \int_0^{2\pi} \sqrt{t} \cos(xt) dt$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

5) Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $a < b$ . Soit  $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$ . On veut montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{i\lambda t} dt = 0.$$

- 1) En effectuant une intégration par parties, montrer le résultat lorsque  $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ .
- 2) Montrer le résultat lorsque  $f$  est en escalier.
- 3) Conclure.

### Exercices théoriques

6

1) Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Montrer que :

$$\exists c \in ]a, b[, \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt = f(c)$$

2) Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continues avec  $g$  positive. Montrer que :

$$\exists c \in [a, b], \int_a^b f(t)g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt$$

7

Soit  $f \in \mathcal{C}([0; 1], [0; 1])$  telle que  $f \neq 0$  et  $\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$ . Montrer que  $f = 1$ .

8

★ Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  telle que :

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$$

Démontrer que  $f = 0$  ou  $f = 1$ .

9

Soit  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .

- 1) On suppose que  $\int_0^1 f(t) dt = 0$ . Démontrer que  $f$  s'annule au moins une fois.
- 2) On suppose de plus que  $\int_0^1 t f(t) dt = 0$ . Démontrer que  $f$  s'annule au moins deux fois (on pourra se demander ce qui se passe si  $f$  ne s'annule qu'en un unique point  $c$ ).

### Bornes de l'intégrale

10 (Césaro intégral) Soit  $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue admettant une limite finie  $a$  en  $+\infty$ . Montrer que

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \rightarrow a \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

11 Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que, pour tout couple  $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ , on a  $\int_\alpha^\beta f(x) dx = 0$ . Montrer que  $f = 0$ .

12 Soit  $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$ . Montrer que si  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \int_a^b |f(x)| dx$ , alors  $f$  est de signe constant.

13 Déterminer les limites suivantes, sans calculer les intégrales correspondantes :

- |   |  |
|---|--|
| <p>1) <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{-x}^x \sin(t^2) dt</math></p> <p>2) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln t}</math></p> <p>3) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt</math></p> | <p>4) <math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt</math></p> <p>5) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{e^{1/t}}{t} dt</math></p> <p>6) <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} \frac{\cos(1/t)}{t} dt</math></p> |
|---|--|

14 Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; 1]$  par  $f(0) = 0, f(1) = \ln 2$  et  $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$ .

- 1) Montrer que :  $\forall x \in ]0; 1[ , x^2 \ln 2 \leq f(x) \leq x \ln 2$ .
- 2) En déduire que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; 1]$ .

### Sommes de Riemann

15 Déterminer les limites des suites :

- 1)  $R_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k^2}$
- 2)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2}$
- 3)  $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}$

16 Déterminer (sans utiliser la formule de Stirling) la limite de la suite de terme général :

$$u_n = \left( \frac{(2n)!}{n^n n!} \right)^{1/n}$$

17 Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Calculer  $\int_0^x \exp(t) dt, \int_0^x \cos(t) dt$  et  $\int_0^x \sin(t) dt$  à l'aide de sommes de Riemann.

### Formules de Taylor

18 Soit  $f : x \mapsto \ln(1+x)$ . Calculer  $f^{(k)}(0)$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ . À l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, en déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

19 Soit  $f : x \mapsto e^x$ .

- 1) Ecrire le développement de Taylor,  $T_5$ , de  $f$  à l'ordre 5 en 0.
- 2) En déduire que  $\left| e - \frac{163}{60} \right| \leq \frac{1}{240}$ .