Thomas Masanet

I Questions préliminaires

Exercice 1

(Divers)

1) Ici il nous faut revenir aux définitions de la croissance (avec des quantificateurs). L'énoncé nous donne :

$$\forall (x,y)\in I^2, x\leq y \Rightarrow f(x)\leq f(y)\leq 0 \text{ et } g(x)\leq (g(y)\leq 0$$

Donc, en se rappelant que multiplier par un nombre négatif change le sens de l'inégalité, on obtient que pour $(x,y)\in I, x\leq y$:

$$fg(x)=f(x)g(x)\geq f(y)g(x)\geq f(y)g(y)=fg(y).$$

Donc fg est décroissante.

2) Petite erreur ici, je voulais parler de fonction périodiques de même période. Résolvons le d'abord dans ce cas puis essayons de voir comment on aurait pu faire pour la question telle quelle :

Soit f et g 2 fonctions de même période $T>0$ sur un intervalle I telle que g ne s'annule pas sur I (dans ce type d'exercice 2 possibilités. Soit on essaye de montrer que le quotient est bien périodique auquel cas il est important de prendre 2 fonctions périodiques quelconques et de montrer que leur quotient est périodique, soit on essaye de montrer que c'est faux auquel cas il nous suffit d'exhiber un contre-exemple) .Posons $h=\frac{f}{g}$ Alors pour $x\in I$,

$$h(x+T)=\frac{f(x+T)}{g(x+T)} \overset{\text{Par périodicité de } f \text{ et } g}{=} \frac{f(x)}{g(x)}=h(x).$$

Donc h est bien périodique.

Revenons au cas général. Le quotient de 2 fonctions de période différente ne sera pas forcément périodique et pour le prouver il nous suffit d'exhiber 2 fonctions pour lesquelles ça ne marche pas.

Posons $f: x\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x\in\mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$ et

$$g: x\mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x=\sqrt{2}k, k\in\mathbb{Z} \\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Il est assez aisé de montrer que f est périodique de période 1 sur $\mathbb{R}$ et g périodique de période $\sqrt{2}$.

Posons $h=\frac{f}{g}$. On a que pour $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h(x)&=\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow\\ f(x)=1 \text{ et } g(x)&=2 \ (*)\\ &\Leftrightarrow\\ x\in\mathbb{Z} \text{ et } x&=\sqrt{2}k, k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow\\ x&=0 \ (**)\end{aligned}$$

Où on prouve $(*)$ car les autres valeurs possibles pour $(f(x),g(x))$ sont 0 et 1, 0 et 2 ou 1 et 1, aucune d'entre elle ne donnant un quotient de $\frac{1}{2}$. Et on prouve $(**)$ car si x est non nul, on peut montrer que x est à la fois rationnel et irrationnel ce qui n'est pas possible.

La fonction h ne prend qu'une seule fois la valeur $\frac{1}{2}$, elle ne peut donc pas être périodique.

3) Comme d'habitude lorsqu'on fait la négation d'une proposition on avance pas à pas (et on se rappelle que la négation de $P\Rightarrow Q$ est P et $\neg Q$!)

On a :

$$\begin{aligned}\neg(P\Rightarrow(Q\Rightarrow R)) &= P \text{ et } \neg(Q\Rightarrow R)\\ &= P \text{ et } (Q \text{ et } \neg R)\\ &= P \text{ et } Q \text{ et } \neg R.\end{aligned}$$

la négation de $P\Rightarrow(Q\Rightarrow R)$ est donc P et Q et $\neg R$.

4) Ici il y a plusieurs erreurs, dont 2 sont des confusions entre fonction et nombre (le fameux $f(x)$ n'est pas une fonction mais un nombre ou encore, $f\neq f(x)$.)

En effet l'élève ne devrait pas parler de la fonction $f(x)$ mais de la fonction f. De même, il ne devrait pas écrire $u=x^2$ mais $u(x)=x^2$ ou encore mieux $u: x\mapsto x^2$.. Enfin, la formule pour $f'(x)$ n'est pas $u'v-uv'$ mais $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

5) Lorsqu'on veut regarder l'ensemble de définition ou l'ensemble de dérivabilité d'une fonction on commence par se ramener à des sous-cas lorsqu'on a des produits, des quotients ou des sommes. Puis lorsqu'on a une composée $h = g \circ f$, h est définie(resp. dérivable) sur I si et seulement si :

1) f est définie (resp. dérivable) sur I.
2) Sur I, f est à valeurs dans D_g (resp $D_{g'}$)

Reprenons avec notre fonction et commençons par faire une petite simplification :
$f : x \mapsto (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$ est la composée $h \circ g$ avec $h : x \mapsto x^{-\frac{3}{2}}$ et $g : x \mapsto 1+x^2$.
D'après ce qu'on vient de dire f est donc définie (resp. dérivable) en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

1) g est définie (resp. dérivable) en x (ce qui sera vrai pour tout x dans $\mathbb{R}$)
2) $g(x) \in D_h$ (resp. $g(x) \in D_{h'}$).

Or h est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x^2+1 \geq 0+1 > 0$ donc g est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x)h'(g(x)) \\ &= 2x(-\frac{3}{2})(x^2+1)^{-\frac{5}{2}} \\ &= \frac{-3x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

6) Pour $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de x est le nombre $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour $x \in \mathbb{R}$, la partie entière de x est le plus grand entier plus petit que x, noté $\lfloor x \rfloor$, soit l'unique entier tel que :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exercice 2

(**Un peu de trigonométrie**)

1) Revoir cours. Attention, pour tan il faut bien préciser qu'elle n'est pas définie en $\frac{\pi}{2}$ (mais elle est bien définie en π et $-\pi$.)

2) Etudier le signe d'un produit revient toujours à étudier le signe de chacun des termes du produits. Ainsi, on a pour $x \in [-\pi, \pi]$:

(a) $\sin(x) \leq 1$ d'où $\sin(x) - 1 \leq 0$.
(b) sin positive sur $[0, \pi]$ et négative sinon.
(c) $2\cos(x) - 1 \geq 0 \iff \cos(x) \geq \frac{1}{2} \iff \cos(x) \geq cos(\frac{pi}{3}) \iff x \in [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

En traçant le tableau de signe suivant, on obtient donc :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π
$\sin(x)-1$		$-$		$-$		$-$		$-$	0
$\sin(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2\cos(x)-1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)(\sin(x)-1)(2\cos(x)-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

3) On a :

$$\begin{aligned} \cos(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 &\iff \cos(2x) = \sin(x - \frac{\pi}{4}) \\ &\iff \cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{2} - (x - \frac{\pi}{4})) \\ &\iff \cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{4}) - x) \\ &\iff \begin{cases} & 2x = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & 2x = x - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} & x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} & x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

4) On résoud chacune des équations à part géométriquement comme dans le cours et puis on regarde quand les deux équations sont vérifiés simultanément. On n'oublie pas que si on peut commencer par résoudre l'équation sur $]-pi,\pi]$ il faut ensuite la résoudre sur tout $\mathbb{R}$.

$$\cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos(x) \leq \cos(\frac{\pi}{6})$$
$$\Leftrightarrow x \in]-\pi, -\frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{6}, \pi] + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin(x) \geq \frac{-\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(x) \geq \sin(\frac{-\pi}{4})$$
$$\Leftrightarrow x \in]-\pi, \frac{-3\pi}{4}] \cup [-\frac{\pi}{4}, \pi] + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Au final les deux équations sont vérifiées en même temps si et seulement si :

$$x \in]-\pi, \frac{-3\pi}{4}] \cup [-\frac{\pi}{4}, \frac{-\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{6}, \pi] + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

5) Pour $x \in]-\pi, \pi] \backslash \{\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ (pour que la tangente soit bien définie), on a :

$$\tan(x) \geq 2\sin(x) \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \leq 2\sin(x)$$
$$\sin(x) \frac{2\cos(x)-1}{\cos(x)} \leq 0$$

On se ramène alors comme dans la question 2) à un tableau de signe :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0
$\cos(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2\cos(x)-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\sin(x)\frac{2\cos(x)-1}{\cos(x)}$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0

L'ensemble des solutions est donc $S =]-\pi, -\frac{\pi}{2}[\cup [-\frac{\pi}{3}, 0], \cup [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$.

II Problème

Exercice 3

1) f est le quotient de la fonction sin et de $g : x \mapsto \sqrt{5-4\cos(x)}$. sin étant définie sur $\mathbb{R}$, f est donc définie là où g est définie. Or on montre aisément que pour $x \in \mathbb{R}, 5-4\cos(x) \geq 1$ donc $g(x) = \sqrt{5-4\cos(x)}$ est bien définie et $\sqrt{5-4\cos(x)} \geq 1 > 0$ donc $f(x) = \frac{\sin(x)}{g(x)}$ est bien définie donc $D_f = \mathbb{R}$.
En revenant à la définition, on montre que f est $2\pi-$ périodique et impaire. On étudie donc f sur $[0, \pi]$ et on complète par symétrie de centre O et par translations successives de $\pm 2\pi \vec{i}$.

2)

a) Pour $x \in [0, \pi]$, $f(x) - \sin x = \frac{4\sin(x)(\cos x - 1)}{\sqrt{5-4\cos x}(1+\sqrt{5-4\cos x})}$. Or sin est positive et $x \mapsto \cos(x) - 1$ est négative sur $x \in [0, \pi]$ Donc $\forall x \in [0, \pi], f(x) - \sin x \leq 0$, d'où $\forall x \in [0, \pi], f(x) \leqslant \sin(x)$.

b) D'après le cours $|\sin(x)| \leq |x|, \forall x \in \mathbb{R}$. En particulier, commesin est positive sur $[0, \pi]$ on a que, $\sin(x) \leq x, \forall x \in [0, \pi]$.
D'après ce qui précède,on a donc $\forall x \in [0, \pi], f(x) \leq \sin(x) \leq x$ d'où $(x) - x \leq 0$.

c) On raisonne par double implication : ($\Leftarrow$) Si $x = 0, \sin(x) = 0$ donc $x = \sin(x)$. ($\Rightarrow$) On étudie la fonction $h : x \mapsto \sin(x) - x$ pour montrer qu'elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. (refaire les calculs). On obtient ainsi que h ne peut prendre qu'une seule fois la valeur 0 sur $\mathbb{R}$ et que ce sera donc en $x = 0$.

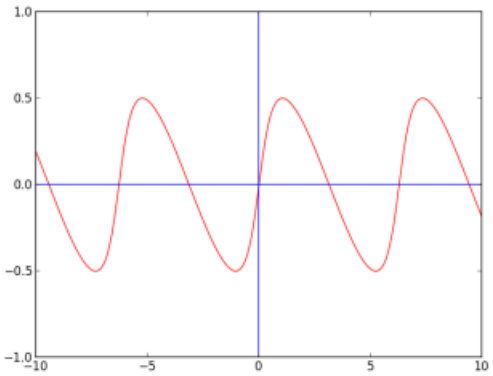
d) On a $(x) \leq \sin(x) \leq x$ pour tout $x \in [0, \pi]$.Si x est tel que $f(x) = x$ on a alors également $\sin(x) = x$ donc $x = 0$. De plus on a bien $f(0) = 0$ donc $f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$.

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur $[0, \pi]$) comme quotient d'une fonction dérivable (sin) sur $\mathbb{R}$ et d'une composée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ ($x \mapsto 5-4\cos(x)$) par une fonction dérivabele sur $\mathbb{R}_+^*$ ($x\sqrt{x}$).

De plus, on a $\forall x \in [0,\pi]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x)(5-4\cos(x))^{-\frac{1}{2}} + \sin(x)(4\sin(x)(-\frac{1}{2})(5-4\cos(x))^{-\frac{3}{2}}. \\ &= [\cos(x)(5-4cos(x)) - 2\sin^2(x)](5-4\cos(x))^{-\frac{3}{2}} \\ &\overset{\sin^2=1-\cos^2}{=} [-2\cos^2(x)+5\cos(x)-2](5-4\cos(x))^{-\frac{3}{2}} \\ &\overset{\text{eq second degré}}{=} \frac{(2-\cos x)(2\cos x-1)}{(5-4\cos x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	↘	0



b)

c) L'étude précédente montre que $f([0,\pi]) = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$

Exercice 4

1) On montre aisément que f est définie si et seulement si $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ est définie et positive, ce qui donne donc $D_f =]-\infty,-1[\bigcup[1,+\infty[$.

L'intervalle n'est pas symétrique donc la fonction ne peut être paire ni impaire (et on peut en outre vérifier que pour tout $x \in D_f \setminus \{1\}$ $f(x) \neq f(-x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.).

La fonction n'est également pas périodique du fait de ces limites en $+\infty$ et $-\infty$ (Ici on a même pas besoin de le mentionner, une telle fonction sans fonctions trigonométriques ayant peu de chances d'être périodique).

2)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \text{ (On factorise par les termes de plus haut degré)}$$

De même,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim x \to -\infty \frac{f(x)}{x} = \lim x \to -\infty \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$ et de même, $\lim x \to +\infty \frac{f(x)}{x} = 1$.

De plus,

$$\begin{aligned} \lim x \to -\infty (f(x) - 1.x) &= \lim x \to -\infty x(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1) \\ &\overset{\text{On multiplie par l'expression conjuguée}}{=} \lim x \to -\infty x(\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1} \\ &= \lim x \to -\infty \frac{x}{x+1}\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1} \\ &= -1. \end{aligned}$$

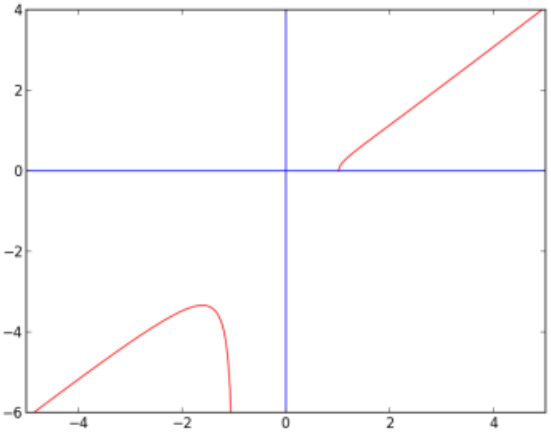
On montre de même que $\lim x \to +\infty (f(x) - 1.x) = -1$.

On conclut que la droite d'équation $y = x-1$ est une asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$ de f.

3) Comme $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$, le graphe de f admet une asymptote verticale d'équation $X = -1$.

4) f est dérivable sur $D_f \backslash 1$ car produit et composée de fonctions dérivables là où elles sont définies sauf pour la fonction racine qui n'est pas dérivable en 0 . On a : $\forall x \in]-\infty,-1[\bigcup]1,+\infty[, f'(x) = \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$ ce qui est positif sauf entre $\alpha = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} < -1$ et $\beta = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1,1[$. On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$ ‖		‖ 0	↗	$+\infty$



5)

Exercice 5

1) Etude de la fonction tangente

a) Voir cours.

b) Voir cours.

c) C'est la définition de la bijectivité.

d) Soit $(x,x') \in \mathbb{R}, x, x' \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, tels que $\left\lfloor \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x'+\frac{\pi}{2}}{\pi} \right\rfloor$ et $\tan(x) = \tan(x')$.

Par définition de la partie entière et comme $\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}$ n'est pas un entier car $x \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ on a que :

$$\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi} - 1 < \lfloor \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi} \rfloor < \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}$$

$$\text{Donc } \pi\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi} - \pi < \pi\lfloor \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi} \rfloor < \pi\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}$$

$$\text{Donc } x - \frac{\pi}{2} < \pi\lfloor \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi} \rfloor < x + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Donc } x - \pi\lfloor \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi} \rfloor \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

On en déduit par le même raisonnement que $\left(x' - \pi\left\lfloor \frac{x'+\frac{\pi}{2}}{\pi} \right\rfloor\right) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

de plus par π périodicité de tan, on a que :

$$\tan(x - \pi\lfloor \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi} \rfloor) = \tan(x) \overset{\text{Par hypothèse de l'énoncé}}{=} \tan(x') = \tan(x') - \pi\lfloor \frac{x'+\frac{\pi}{2}}{\pi} \rfloor)$$

.

D'après la question c),ceci nous donne que $x - \pi\lfloor \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi} \rfloor = x' - \pi\lfloor \frac{x'+\frac{\pi}{2}}{\pi} \rfloor$, ces deux éléments ayant la même tangente et étant dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

Comme de plus $\pi\lfloor \frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi} \rfloor = \pi\lfloor \frac{x'+\frac{\pi}{2}}{\pi} \rfloor$ on a donc que $x = x'$.

e) Soit $X, Y \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$ On raisonne par double implication : ($\Leftarrow$) Si $X \equiv Y[\pi]$ alor par π périodicité de tan, $\tan(X) = \tan(Y)$, ce qui montre cette implication.

($\Rightarrow$)

Supposons que $\tan(X)=\tan(Y)$. Posons $X_2=X-\pi\lfloor\frac{Y+\frac{\pi}{2}}{\pi}\rfloor$ et $Y_2=Y-\pi\lfloor\frac{Y+\frac{\pi}{2}}{\pi}\rfloor$.
D'après ce qu'on a montré précédemment, $\tan(X_2)=\tan(Y_2)$ avec $X_2,Y_2\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Donc $X_2=Y_2$.
par suite, on a $X-\pi\lfloor\frac{Y+\frac{\pi}{2}}{\pi}\rfloor=Y-\pi\lfloor\frac{Y+\frac{\pi}{2}}{\pi}\rfloor$ donc $X=Y+\pi(\lfloor\frac{Y+\frac{\pi}{2}}{\pi}\rfloor-\lfloor\frac{Y+\frac{\pi}{2}}{\pi}\rfloor)$. Donc $X\equiv Y[\pi]$.
On a donc bien prouvé que :

$$\tan(X)=\tan(Y)\Leftrightarrow X\equiv Y[\pi]$$

f) $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{-\pi}{6}$. (Une fois qu'on a donné ces valeurs pour lesquelles on sait la valeur de la tangente, on sait qu'il n'y en pas d'autres par bijectivité de la tangente sur cet intervalle).

2) Tout d'abord, d'après la formule de Moivre,

$$\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\left(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta\right)+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right),$$

et par identification des parties réelles et imaginaires,

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\cos(3\theta)=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta\text{ et }\sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.$$

Ensuite, $\tan(3\theta)$ et $\tan\theta$ existent $\Leftrightarrow 3\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}$ et $\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3\theta\notin\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$. Soit donc $\theta\notin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}$.

$$\tan(3\theta)=\frac{\sin(3\theta)}{\cos(3\theta)}=\frac{3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta}{\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta}=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta},$$

après division du numérateur et du dénominateur par le réel non nul $\cos^3\theta$.

$$\forall\theta\in\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}\right),\tan(3\theta)=\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}.$$

3) Il existe un unique réel $\alpha\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\backslash\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\}$ tel que $a=\tan\alpha$. De même, si x est un réel distinct de $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, il existe un unique réel $\theta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\backslash\{-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\}$ tel que $x=\tan\theta$ (à savoir $\alpha=\arctan a$ et $\theta=\arctan x$). Comme $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ ne sont pas solution de l'équation proposée, on a :

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\frac{3a-a^3}{1-3a^2}\Leftrightarrow\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\Leftrightarrow\tan(3\theta)=\tan(3\alpha)$$
$$\Leftrightarrow 3\theta\in 3\alpha+\pi\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta\in\alpha+\frac{\pi}{3}\mathbb{Z}.$$

Ceci refournit les solutions $x=\tan\alpha=a$, puis

$$x=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{a+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}a}=\frac{(a+\sqrt{3})(1+\sqrt{3}a)}{1-3a^2}=\frac{4a+\sqrt{3}\left(a^2+1\right)}{1-3a^2}$$
$$\text{et }x=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4a-\sqrt{3}\left(a^2+1\right)}{1-3a^2}.$$

Exercice 6

1) a) $(\frac{a}{N(a,b)})^2+(\frac{b}{N(a,b)})^2=1$ donc $\left(\frac{a}{N(a,b)},\frac{b}{N(a,b)}\right)$ est un point du cercle trigonométrique. Si on note M ce point alors ce point est, par propriété de cos et sin un point d'abscisse $\cos(c)$ et d'ordonnée $\sin(c)$ pour un certain $c\in R$ correspondant à la longueur de l'arc de cerlce parcourue sur le cercle trigonométrique pour parvenir à M.

b) Pour $a=-2,b=2$, $M=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ donc $c=\frac{3\pi}{4}$ convient.
Pour $a=6$, $b=\sqrt{12}$, $M=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ donc $c=\frac{\pi}{6}$ convient.

c) Il suffit de développer $\cos(X-c)$ par formule d'addition.

Applications :

2) D'après la question 1) on a pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=3\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)+\sqrt{6}=-2\sqrt{3}\left(\cos\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Donc, en utilisant les extremas connus de cos, on en déduit que les extremas de f sont $2\sqrt{3}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $-2\sqrt{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3) D'après la question 1, on a pour $x\in\mathbb{R}$,$g(x)=\sqrt{3}\cos(x)-3\sin(x)-3=2\sqrt{3}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Ainsi les zéros de g constituent l'ensemble $\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

4) En utilisant les expressions précédentes que l'on transforme à l'aide de la formule trigonométrique $\cos p-\cos q=-2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$,
on trouve : $\frac{3\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)+\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cos(x)-3\sin(x)-3}=\frac{4\sqrt{3}\sin\left(\frac{x-\frac{13\pi}{12}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\frac{7\pi}{12}}{2}\right)}{-4\sqrt{3}\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}$ D'où le tableau de signe :

x	$-\pi$		$-\frac{11\pi}{12}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{12}$		π
$\sin\left(\frac{x-\frac{13\pi}{12}}{2}\right)\sin\left(\frac{x-\frac{7\pi}{12}}{2}\right)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$-\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{6}}{2}\right)\sin\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\frac{3\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)+\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cos(x)-3\sin(x)-3}$		$+$	0	$-$		$+$		$-$	0	$+$	