

Chapitre 1 : Sommes et produits

A) Prélude aux ensembles :

- Définition principale, Exemples
- Produit Cartésien, définition, exemples
- Familles d'éléments d'un ensemble

B) Sommes simples

- Définitions générales
- Exemples généraux/fondamentaux : $\sum_{k=1}^n k$, $\sum_{k=1}^n k^2$ (Preuve par récurrence), $\sum_{k=0}^n x^k$ où $x \in \mathbb{K}$
- Premières propriétés : Chasles, Linéarité.
- Exemples d'utilisation de Chasles+Linéarité : $\sum_{k=1}^n \min(k, n)$ (Chasles), $\sum_{k=1}^n n(k+1)^2$ (Linéarité)
- Focus sur la parité : relation de Chasles pair/impair (Calcul de $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$).
- Changement d'indice : décalage, renversement, principe et méthode, Application à $\sum_{k=1}^n k$ (cf Gauss)
- Application au télescopage (Preuve intuitive+ Preuve du télescopage par changement d'indice).
- Application du télescopage : Formule de factorisation de $a^n - b^n$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$.
- Astuce : Ajouter 0, Multiplier par 1 (technique du +1-1)

C) Sommes doubles :

- Sommes rectangulaires, sommes triangulaires
- Exemples classiques : $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i + j$, $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$
- Produit de sommes finies

D) Produits et factorielles :

- Définition, Propriétés de base ($\prod_{i=1}^n \lambda a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i b_i$, relation de Chasles, produit vide...)
- Définition+Propriété factorielle.
- Télescopage
- Utilisation du logarithme pour transformer un produit en somme.

E) Coefficients binomiaux :

- Définition, $k < 0$, $k > n$
- Premières propriétés : premiers termes, formule de symétrie, formule de factorisation (non prouvée)
- Additivité/formule de Pascal (preuve en détail avec les différents cas selon la valeur de $k < -1$, $k = -1$, $k = n+1$, $k > n$, $0 \leq k \leq n$).
- Théorème du binôme de Newton + preuve+exemples

Chapitre 2 : Logique et raisonnements

A) Rudiments de logiques :

- Propositions : Définitions et premiers exemples
- Négation : Définition et premières tables de vérité
- Conjonctions et Disjonctions : Définitions et tables de vérités
- Implications et équivalences : Définitions, tables de vérités, Exemples, Conditions nécessaires, suffisantes
- Propriétés/règles de calcul : Idempotence, Associativité, Distributivité, Loi de De Morgan, $P \Rightarrow Q \sim \text{non } P$ ou Q , Négation d'une implication, double implication, contraposition ...

B) Prédicats et quantificateurs :

- Définitions : Prédicats, Quantificateur universel, d'existence, d'existence et d'unicités.

- Négation des quantificateurs, permutation des quantificateurs de même nature, non permutation en général du $\forall$ et du $\exists$.
- Raisonnement avec des quantificateurs

C) Modes de raisonnement :

- Principe de déduction (Modus ponens)
- Disjonction de cas (vu Lundi)
- Preuve implication/ équivalences
- Preuve par contraposition
- Raisonnement par l'absurde
- Analyse-synthèse : Exemple phare : Toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Questions de cours :

- Soit $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ prouver que :
 - 1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
 - 2) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ (on prouvera les cas $k \leq -2, k = -1$ et $0 \leq k \leq n-1$)
 - 3) En déduire à l'aide du triangle de Pascal et du binôme de Newton l'expression de $(1-x)^6$ pour $x \in \mathbb{R}$
- Preuve du théorème du binôme de Newton.
- Preuve que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme unique d'une fonction paire et d'une fonction impaire (par analyse-synthèse).
- On prouvera :
 - 1) Preuve par contraposée que pour $n \in \mathbb{N}$, n^2 pair $\Rightarrow n$ pair.
 - 2) Preuve par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.