

TD 1 : SOMMES ET PRODUITS

♡ = Exercice thématique, ★ = Niveau de difficulté, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Sommages simples

1 ♡ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire ces sommes sous forme classique puis calculer les :

1) $A_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n \times (n+1)$ 2) $B_n = 1 \times n + 2 \times (n-1) + \dots + n \times 1$	3) $C_n = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n+1)^2$ 4) $D_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$
--	--

2 ♡ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme S_n des n premiers entiers impairs.

3 Montrer que la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ est strictement croissante.

4 ♡★ Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=3}^{n-1} q^k$ où $n \geq 3$ et $q \in \mathbb{K}$ 2) $\sum_{k=1}^{100} (2a^{3k+1} + 2)$ où $a \in \mathbb{K}$ 3) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ où $n \in \mathbb{N}$ 4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ 5) $\sum_{k=0}^n k \times k!$ où $n \in \mathbb{N}$ 6) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ 7) $\sum_{k=1}^n k(n+1-k)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ 8) $\sum_{k=0}^n kq^k$ où $q \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$	9) $\sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}$ où $n \in \mathbb{N}$ 10) $S = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra calculer $S + \sum_{k=1}^n k^2$. 11) $\sum_{k=1}^n (-1)^k k$ où $n \in \mathbb{N}^*$. 12) $\sum_{k=1}^n k 2^k$ où $n \in \mathbb{N}$. 13) $\sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra effectuer un renversement de la somme. 14) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
--	---

5 ♡★ Pour $a \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $S_a(n) = \sum_{k=1}^n k^a$.

- 1) En considérant $\sum_{k=1}^n (k+1)^2 - \sum_{k=1}^n k^2$, démontrer que $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$.
- 2) Utiliser la même méthode pour déterminer $S_2(n)$ puis $S_3(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6 ♡★ Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

2) En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n u_k$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

7 ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que 3 divise $2^n + 1$ si et seulement si n est impair.

Sommages doubles

8 ♡★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles suivantes.

1) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i$ 2) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$ 3) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)$ 4) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$	5) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$ 6) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i-j $ 7) $\sum_{l=1}^n \sum_{k=l+1}^n \frac{l}{k}$ 8) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$
--	---

9 Soient $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, calculer $S = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m \binom{n}{p} k^p$.

10

Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ une suite double de nombres réels. Soit n et m deux entiers naturels. Intervertir les sommes doubles suivantes :

$$1) S_1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j};$$

$$2) S_2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j};$$

11

Calculer

$\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$ en l'exprimant sous la forme d'un produit de sommes simples.

Produits et factoriels

12 ♡ Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de nombres factoriels les produits suivants :

$$1) 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$$

$$2) 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1).$$

$$3) \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}$$

13 ♡ Simplifier les expressions suivantes :

$$1) \frac{(2n+3)!}{(2n-1)!};$$

$$2) \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!};$$

$$3) \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!};$$

$$4) \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

14 ★ Calculer les produits suivants :

$$1) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$2) \prod_{k=1}^n q^k \quad \text{avec } q \in \mathbb{K}$$

$$3) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right).$$

15 ♡★★

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\prod_{1 \leq k \leq n} (n+k)$ à l'aide de $n!$ et $(2n)!$.

2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{1 \leq k \leq n} (4k-2) = \prod_{1 \leq k \leq n} (n+k)$. En déduire $\prod_{1 \leq k \leq n} (4k-2)$.

3) Retrouver cette expression par un calcul direct.

16 ★★ Soit $a \in \mathbb{K}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k}).$$

1) Calculer P_n lorsque $a = 1$.

2) On suppose $a \neq 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-a)P_n = (1-a^{2^{n+1}})$.

3) En déduire la valeur de P_n .

17

★★★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$.

18

★ Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!(k+1)!}$$

Coefficients binomiaux

19

♡

1) Développer $(x+1)^6, (x-1)^6$.

2) Calculer $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p = 3^n$

3) Démontrer que, pour tout entier n , on a $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = 0$.

20

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme double :

$$S_n = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{i}{j}$$

21

★★ Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Pour tout $x \in \mathbb{K}$, calculer $(1+x)^{2n}$ de deux manières.

2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

22 ♡ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $A_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $B_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.
Calculer $A_n + B_n$ et $A_n - B_n$. En déduire la valeur des sommes A_n et B_n .

23 ★★ Soient n, p des entiers naturels avec $n \geq p$. Démontrer que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

24 ♡★★

- 1) Soient n, p et q des entiers naturels, en utilisant la formule d'additivité et un télescopage, calculer la somme

$$\sum_{k=p+1}^q \binom{n+k}{k}$$

- 2) En déduire $\sum_{i=0}^n \prod_{j=1}^p (i+j)$.