

TD 2 : LOGIQUE ET RAISONNEMENT

♡ = Exercice thématique, ★ = Niveau de difficulté, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Logique et prédicats

1 Préciser, avec des justifications, si les propositions suivantes sont vraies ou fausses.

- 1) La négation de " f est une fonction paire" est " f est une fonction impaire".
- 2) Lorsque la proposition (P et Q) est vraie, la proposition (P ou Q) est vraie.
- 3) La négation de ($P \Rightarrow Q$) est ($P \Rightarrow$ non Q).
- 4) Paris est en France ou Madrid est en Chine.
- 5) Lorsque P est fausse et ($P \Rightarrow Q$) est vraie alors Q est également fausse.
- 6) Si l'homme est un quadrupède alors il aboie.

2 Donner la négation des propositions suivantes :

- 1) S'il pleut, je prends mon parapluie.
- 2) Chaque été, il pleut au moins un jour en Bretagne.
- 3) L'été dernier, il a plu tous les jours en Bretagne.
- 4) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq y$.
- 5) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

3 Compléter les assertions suivantes avec $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

- | | |
|--|---|
| 1) $x^2 \geq 9 \dots x \geq 3$. | 5) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \dots (u_n)$ est une suite constante. |
| 2) $x = 1 \dots x^2 - 1 = 0$. | |
| 3) $x > 2 \dots x \geq 3$. | |
| 4) f croissante... f str croissante. | 6) $x = 2 \dots x^2 - 4x + 4 = 0$. |

2

4 (d'après J. D. Hamkins). On considère le prédicat $A(x, y)$: « x aime y ». À l'aide de ce prédicat et de quantificateurs, exprimer les propositions suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1) "Tout le monde aime quelqu'un" | 4) "Quelqu'un n'aime personne" |
| 2) "Tout le monde est aimé" | 5) "Quelqu'un aime tout le monde" |
| 3) "Tout le monde est aimé par quelqu'un qui l'aime" | 6) "Tout le monde aime quelqu'un qui l'aime en retour" |

5 (d'après J. D. Hamkins). On considère une rame de métro circulant sur le réseau d'une certaine grande ville. Soit le prédicat $B(x, y)$: « le passager x bouscule le passager y ». Faire correspondre chaque proposition avec la phrase qui lui correspond le mieux :

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1) Chaos indescriptible, ou rame presque vide ? | 6) Impolitesse partagée. |
| 2) Un touriste semble bloquer la seule porte ouverte. | (a) $\exists x, \exists y, B(x, y)$. |
| 3) Rien qu'une excuse ne puisse arranger. | (b) $\exists x, \forall y, B(x, y)$. |
| 4) Quelqu'un de très maladroit a oublié son sac. | (c) $\forall x, \exists y, B(x, y)$. |
| 5) Souffrance partagée. | (d) $\forall x, \forall y, B(x, y)$. |
| | (e) $\exists y, \forall x, B(x, y)$. |
| | (f) $\forall y, \exists x, B(x, y)$. |

6 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Le démontrer dans chaque cas. Déterminer également la négation logique de chacune de ces propositions.

- | | |
|--|---|
| 1) $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, a \leq \sin(x) \leq b$; | 3) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 \geq x$; |
| 2) $\forall y \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, e^x = y$; | 4) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \geq x$; |
| | 5) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$. |

7 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Que signifient les phrases quantifiées suivantes

- 1) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.
- 2) $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) \geq M$.
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \implies f(x) \geq 0$.
- 4) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \implies x = 0$.
- 5) $\exists A \in \mathbb{R}, \exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \implies f(x) = C$.

8 Soient (u_n) une suite de nombres réels et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs chacune des propositions suivantes.

- | | |
|---|--|
| 1) La suite (u_n) est majorée par 4 . | 7) La fonction f est la fonction nulle. |
| 2) La suite (u_n) est majorée. | 8) La fonction f s'annule. |
| 3) La suite (u_n) n'est pas majorée. | 9) La fonction f est croissante. |
| 4) La suite (u_n) est bornée. | 10) La fonction f admet un maximum. |
| 5) La suite (u_n) est croissante. | 11) La fonction f ne prend pas deux fois la même valeur. |
| 6) La suite (u_n) est constante. | |

Modes de raisonnement

- 9
- 1) Montrer que tout nombre rationnel peut s'écrire comme somme de deux nombres irrationnels.
 - 2) Montrer que, pour tout entier naturel, il existe un nombre premier qui lui est strictement supérieur.
 - 3) À quelle condition un réel peut-il s'écrire à la fois comme la somme et le produit des deux mêmes réels ?

10 Soit a et b deux réels. On considère la proposition suivante : si $a + b$ est irrationnel, alors a ou b sont irrationnels.

- 1) Quelle est la contraposée de cette proposition ?
- 2) Démontrer la proposition.
- 3) Est-ce que la réciproque de cette proposition est toujours vraie ?

11 (Exemples fondamentaux de raisonnement par l'absurde)

- 1) Montrer qu'il y a une infinité de nombres entiers (pour rappel, toute partie finie de $\mathbb{N}$ a un plus grand élément).
- 2) Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.

12 On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

- 1) Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.
- 2) En déduire que si m, n, p et q sont des entiers relatifs, alors

$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \iff (m = p \text{ et } n = q)$$

13 Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n.$$

14 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2, u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 1 + 2^n$.

15 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe deux entiers naturels p et q tels que $n = 2^p(2q + 1)$. On pourra utiliser une récurrence forte

16 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x = \sqrt{2x + 35}$

17

- 1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Établir l'implication

$$(\forall \varepsilon \geq 0, |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0.$$

- 2) Soit $a \in \mathbb{R}$. Établir l'implication

$$(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0.$$

- 3) Soit x et y deux réels. Établir l'équivalence

$$x^2 + y^2 = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0$$

18

- 1) Vérifier que $x^2 + x + 1$ est strictement positif quelle que soit la valeur du réel x .
- 2) Vérifier que lorsque n est un entier naturel, le nombre $\frac{n(n^2+1)}{2}$ l'est aussi.
- 3) Vérifier que lorsque le produit de deux réels est nul, l'un des facteurs est nul.

19 Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}.$$

- 1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 4$.
- 2) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

20 (Analyse-synthèse) Déterminer les réels x tels que $1+x \geq 0$ et $1-x^2 = \sqrt{1+x}$.

21

- 1) À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, f(m+n) = f(m) + f(n)$$

On pourra commencer par déterminer $f(0)$ et on exprimera f en fonction de $a = f(1)$.

- 2) À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse, déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$