

L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, **il est IMPERATIF de souligner les résultats obtenus**. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez admettre le résultat dans la suite de l'énoncé. Lisez bien tout le sujet avant de commencer et identifiez les parties plus simples pour vous, et commencez par ces parties. Les rappels ou théorèmes en verts au début du devoir peuvent être utilisés dans n'importe quelle partie du devoir.

Rappel :

Une fonction polynomiale est de signe constant sur $\mathbb{R}$ si et seulement si son discriminant est négatif ou nul.

Théorème : généralisation de la somme de 2 nombres positifs

Soit $(v_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, (\sum_{l=1}^n v_l) \geq 0$.

I Questions préliminaires

Dans ce devoir, j'indique par une ★ les questions plus longues ou plus difficiles que la moyenne mais qui seront également plus valorisées en terme de notation.

Exercice n° 1

Calculs de sommes

- 1) Énoncer la formule du binôme de Newton.
- 2) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donner la formule permettant de factoriser $a^n - b^n$.
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, donner la valeur de $\sum_{k=1}^n k^2$
- 4) Calculer $\binom{6}{3}$ (on ira jusqu'au bout du calcul).
- 5) Soit $n \in \mathbb{N}$, Réexprimer $\sum_{k=1}^n k^2 + k - 9$ avec le changement d'indice $j = k + 3$ (ne pas faire le calcul ensuite).
- 6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=4}^{n+3} (2k + 1)$.
- 7) Calculer $15 + 18 + 21 + \dots + 45$.
- 8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 6^{2n-k}$.
- 9) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Calculer $S = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k+1}$.
- 10) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, En remarquant que $(-b)^5 = -b^5$ factoriser $a^5 + b^5$.
- 11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $(a_k)_{k \in \llbracket 1, 3n \rrbracket}$ la famille telle que :
 - 1) $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_k = k^2$
 - 2) $\forall k \in \llbracket n + 1, 2n \rrbracket, a_k = 3^k$
 - 3) $\forall k \in \llbracket 2n + 1, 3n \rrbracket, a_k = \frac{k}{(k+1)!}$
 Calculez $\sum_{k=1}^{3n} a_k$.
- 12) Calculer $\prod_{k=1}^n \pi^{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n-k+1}\right)}$.
- 13) ★ Pour cette question, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ on pose $A_N^p = \sum_{k=0}^N k^p$ (la valeur précise de ces sommes n'est pas importante pour cette question).
 - a) En précisant le théorème utilisé, développez l'expression $(a + b)^3$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
 - b) Soit $n = 100$. Pour quelles valeurs de $j \in \mathbb{N}$ a-t-on $0 \leq 2j \leq 100$? De même, Pour quelles valeurs de $j \in \mathbb{N}$ a-t-on $0 \leq 2j + 1 \leq 100$?
 - c) En déduire $\sum_{k=0}^{100} (-1)^k k^3$ en fonction des $(A_N^p)_{p \in \mathbb{N}, N \in \mathbb{N}}$

Exercice n°2

Transformée d'Abel et 2 calculs d'une même somme

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en remarquant que pour tout $l \in \mathbb{N}, l = \sum_{j=1}^l 1$, calculez la somme $\sum_{k=0}^n k 2^k$.
- 2) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. On définit deux suites $(A_n)_{n \in (\mathbb{N} \cup \{-1\})}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $A_{-1} = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad b_n = B_{n+1} - B_n$$

- a) Soit $k \in \mathbb{N}$, exprimer a_k à l'aide des termes de la suite $(A_n)_{n \in (\mathbb{N} \cup \{-1\})}$
- b) ★ En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n a_k B_k = A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k$.
- c) À l'aide de la question 2b), retrouver le résultat de la question 1).

Exercice n°3

Logique et raisonnement

- 1) Soit P, Q, R trois propositions. Donner la négation des propositions $P \Rightarrow Q$ et $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.
- 2) Exprimer à l'aide de quantificateurs la phrase suivante puis en déterminer la négation mathématique puis en français (vous pourrez inventer le nom des ensembles impliqués :) :
" Tout bon étudiant de prépa a parmi ses livres un livre qui parle d' Emilie du Chatelet ou de Sophie Germain. "
- 3) Donner le noms de deux méthodes pour prouver une équivalence.
- 4) Soit $n \in \mathbb{N}$ donner la réciproque et la contraposée (en précisant bien laquelle est laquelle...) de la proposition : $(\exists p \in \mathbb{N}, p^2 = n) \Rightarrow (n \text{ n'est pas un entier premier })$.
Prouver ensuite la réciproque.
- 5) **(Exemple d'analyse synthèse)** Dans cette question, on cherche à prouver le résultat suivant :

Toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est somme d'une fonction affine et d'une fonction qui s'annule en 0 et en 1.

- a) (DÉBUT ANALYSE) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} g : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax + b \quad (1) \end{aligned}$$

$$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ qui s'annule en 0 et en 1 } \quad (2)$$

tels que :

$$\forall x \in [0, 1], f(x) = g(x) + h(x). \quad (3)$$

Déterminer alors la valeur de a et b .

- b) En déduire pour tout $x \in [0, 1]$, la valeur de $h(x)$. (FIN ANALYSE)
c) (SYNTHÈSE) Vérifier que les fonctions g et h trouvées dans les questions a) et b) vérifient bien les propriétés (1), (2) et (3) et conclure quand à la question initiale.

II Problèmes

Problème n° 1

- 1) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs.. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(\sum_{k=1}^n u_k = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = 0)$.
2) Soient n un entier naturel non nul, et $x_1, \dots, x_n$, n nombres réels.
a) Justifier que la somme $S = \sum_{k=1}^n (x_k - 1)^2$ est positive ou nulle.
b) On suppose à présent que les réels $x_1, \dots, x_n$ sont tels que

$$\sum_{k=1}^n x_k = n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = n$$

Etablir que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_k = 1$$

- 3) (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels. On veut démontrer que :

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}. \quad (1)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2.$$

On pose aussi :

$$A = \sum_{k=1}^n a_k^2, B = \sum_{k=1}^n b_k^2 \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

- a) Soit $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(x)$ en fonction de A, B, C et x .
b) On suppose que $A = 0$. Montrer (1).
c) On suppose maintenant que $A \neq 0$. À l'aide d'une étude de signe de la fonction f , montrer (1).
d) Application : démontrer que :

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{k} \leq n \sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Problème n° 2

Autour des coefficients binomiaux

Partie 0 : Rappel du cours

- 1) Soit $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Ecrire sous forme de somme double et de 2 manières différentes la somme :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$$

- 2) Faire de même pour :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$$

Partie I : Calcul d'une somme

Le but de cette première partie est de démontrer, de deux manières différentes, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} (*)$$

- 3) Méthode n°1 :

Démontrer (*) en procédant par récurrence sur l'entier n .

- 4) Méthode n°2 : En utilisant la formule du triangle de Pascal généralisée

- a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

$$\forall \ell \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \binom{k}{\ell} = \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1}$$

- b) Soient $\ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq n$. Montrer que :

$$\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

Cette égalité s'appelle formule du triangle de Pascal généralisée.

- c) Soit $k \in \mathbb{N}$. Expliciter les coefficients binomiaux $\binom{k}{1}$, $\binom{k}{2}$ et $\binom{k}{3}$.

- d) En déduire qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = a \binom{k}{3} + b \binom{k}{2} + c \binom{k}{1}$$

- e) Retrouver alors (*).

Si les coefficients a, b et c n'ont pas été obtenus à la question précédente, un calcul pourra tout de même être effectué.

Partie II : Formule d'inversion de Pascal

Soit $(a_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. À partir de celle-ci, on définit une suite $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad b_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} a_\ell$$

L'objectif de cette partie est de trouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de a_n en fonction de $b_0, \dots, b_n$.

5) Soient $n, k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$. Montrer que :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}$$

6) Soient $n, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq n$. On pose $S_{n,\ell} = \sum_{k=\ell}^n (-1)^{k-\ell} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell}$. En utilisant la question précédente puis un changement d'indice, montrer que :

$$S_{n,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n \end{cases}$$

7) Conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} b_k$$

Indication : On pourra utiliser des propriétés des sommes triangulaires.

8) Application.

On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = (n+1)x_n + (-1)^{n+1}$$

a) Montrez la formule dite "du pion" :

Pour tous entiers n et p tels que $1 \leq p \leq n$:

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}$$

b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$$

c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$