

Chapitre 2 : Logique et raisonnements

A) Rudiments de logiques :

- Propositions : Définitions et premiers exemples
- Négation : Définition et premières tables de vérité
- Conjonctions et Disjonctions : Définitions et tables de vérités
- Implications et équivalences : Définitions, tables de vérités, Exemples, Conditions nécessaires, suffisantes
- Propriétés/règles de calcul : Idempotence, Associativité, Distributivité, Loi de De Morgan, $P \Rightarrow Q \sim \text{non } P \text{ ou } Q$, Négation d'une implication, double implication, contraposition ...

B) Prédicats et quantificateurs :

- Définitions : Prédicats, Quantificateur universel, d'existence, d'existence et d'unicités.
- Négation des quantificateurs, permutation des quantificateurs de même nature, non permutation en général du $\forall$ et du $\exists$.
- Raisonnement avec des quantificateurs

C) Modes de raisonnement :

- Principe de déduction (Modus ponens)
- Disjonction de cas
- Preuve implication/ équivalences
- Preuve par contraposition
- Raisonnement par l'absurde
- Analyse-synthèse : Exemple phare : Toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- Récurrence simple : Propriété de bon ordre de $\mathbb{N}$
- Applications : Théorème de récurrence simple, récurrence double, récurrence forte

Chapitre 3 : Fonctions de la variable réelle et inégalités

A) Règles de calculs

- Définitions inégalités
- Manipulation élémentaires (sommes d'inégalités, produits d'inégalités, produit par un réel positif/négatif, inverse,...)
- Encadrement d'inégalités élémentaires.

B) Lien entre fonctions et inégalités

- Application d'une fonction croissant/strictement croissante/décroissant/strictement décroissant à une inégalité.
- Fonctions croissantes classiques : $\exp, \ln, x \mapsto x^2, \sin, \sqrt{\cdot}, \dots$
- Exemples : Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\ln(2x + 1) < \ln(x) + 1$.

C) La fonction valeur absolue

- Définition, Interprétation sous forme de distance
- Premières propriétés
- Exemple de résolution d'inégalités avec valeurs absolues en utilisant des disjonctions de cas
- Valeur absolue du quotient, du produit du carré, de la puissance,...

- Application : a et b positifs, Montrer que $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|}$.
- Inégalité triangulaire généralisé + cas d'égalité.
- Majoration d'une somme quelconque]

D) La fonction partie entière

- Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$
- Définition partie entière supérieure
- Propriétés de la partie entière :
Pour $x \in \mathbb{R}$,
 - (a) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
 - (b) $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.
 - (c) $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier n vérifiant $n \leq x$.
 - (d) La fonction partie entière est croissante.

Questions de cours :

- Preuve du théorème de récurrence à l'aide de l'axiome : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.
- Preuve par récurrence double que (u_n) définie par : $u_0 = 2, u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ a pour terme général $u_n = 1 + 2^n$ (vu en TD) puis preuve par récurrence forte que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.
- Preuve de l'inégalité triangulaire généralisée : Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$. et rappeler, sans le montrer, le cas d'égalité de $|x + y|$ et $|x| + |y|$.
- Preuve de propriétés de la fonction partie entière (inférieure) à partir de la définition (**Qu'on rappellera !**) :
Soit $x \in \mathbb{R}$,
 - (a) Montrer que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$. (vu Lundi)
 - (b) Montrer que la fonction partie entière est croissante.
 - (c) Montrer que $\lfloor x \rfloor = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.