

fancybox

Exercice n° 1

Calculs de sommes

1) cf cours

2) cf cours

3)

$$\begin{aligned}\binom{6}{3} &= \frac{6!}{3!(6-3)!} \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 20.\end{aligned}$$

4) cf cours

5) On pose $S = \sum_{k=1}^n k^2 + k - 9$. On effectue le changement d'indice $j = k + 3$: Comme k va de 1 à n , j va de 4 à $n + 3$ et on obtient :

$$\begin{aligned}S &= \sum_{j=4}^{n+3} (j-3)^2 + (j-3) - 9 \\ &= \sum_{j=4}^{n+3} j^2 - 6j + 9 + (j-3) - 9 \\ &= \sum_{j=4}^{n+3} j^2 - 5j - 3.\end{aligned}$$

On pose $S = \sum_{k=1}^n k^2 + k - 9$. On effectue le changement d'indice $j = k + 3$: Comme k va de 1 à n , j va de 4 à $n + 3$ et on obtient :

$$\begin{aligned}S &= \sum_{j=4}^{n+3} (j-3)^2 + (j-3) - 9 \\ &= \sum_{j=4}^{n+3} j^2 - 6j + 9 + (j-3) - 9 \\ &= \sum_{j=4}^{n+3} j^2 - 5j - 3.\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{n+3} (2k+1) &\stackrel{\text{On pose } j=k-3}{=} \sum_{j=1}^n (2(j+3)+1) \\ &= \sum_{j=1}^n 2j + 7 \\ &\stackrel{\text{Linéarité}}{=} 2 \sum_{j=1}^n j + 7 \sum_{j=1}^n 1 \\ &= 2 \frac{n(n+1)}{2} + 7n \\ &= n(n+8)\end{aligned}$$

7) La somme demandée est $S = \sum_{k=0}^{10} 15 + 3k$. D'où :

$$\begin{aligned} S &\stackrel{\text{Linéarité}}{=} 15 \sum_{k=0}^{10} 1 + 3 \sum_{k=0}^{10} k \\ &= 15 \cdot 11 + 3 \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 330. \end{aligned}$$

8) Attention, on veut appliquer la formule du binôme mais on ne doit pas oublier qu'il y a un $2n$ ici et non un n :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 6^{2n-k} &= 6^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 6^{n-k} 1^k \\ &\stackrel{\text{On applique le binôme de Newton}}{=} 6^n (6+1)^n \\ &= 42^n. \end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k+1} \\ &\stackrel{\text{changement } j=k+1}{=} \sum_{j=2}^n \binom{n+1}{j} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \right) - \left(\binom{n+1}{n+1} - \binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{0} \right) \\ &= 2^{n+1} - (1 + (n+1) + 1) \\ &= 2^{n+1} - (n+3) \end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 &= a^5 - (-b)^5 \\ &\stackrel{\text{Par Bernouilli}}{=} (a - (-b)) \sum_{k=0}^{(5-1)} a^5 (-b)^{5-1-k} \\ &= (a+b)(b^4 - ab^3 + a^2b^2 - a^3b + a^4). \end{aligned}$$

11) Soit $S = \sum_{k=1}^{3n} a_k$.

Par la relation de Chasles on a que $S = S_1 + S_2 + S_3$ avec :

$$S_1 = \sum_{k=1}^n a_k, S_2 = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \text{ et } S_3 = \sum_{k=2n+1}^{3n} a_k.$$

Calculons chacune de ces 3 sommes :

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=n+1}^{2n} 3^k \\ &= 3^{n+1} \frac{1-3^n}{1-3} \\ &= (-2)3^{n+1}(1-3^n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{k}{(k+1)!} \\ &\stackrel{\text{Technique du } +1-1}{=} \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=2n+1}^{3n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \\ &\stackrel{\text{Télescopage}}{=} \frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(3n+1)!} \end{aligned}$$

Donc $S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (-2)3^{n+1}(1-3^n) + \frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(3n+1)!}$

- 12) On pose $P = \prod_{k=1}^n \pi^{\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n-k+1}\right)}$ et $S = \ln(P)$ (ce qu'on peut faire car tous les termes du produit sont positifs). On a :

D'où $S = 0$ et $P = \exp(S) = 1$.

- 13) a) Par le binôme de Newton cela donne : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
b) Il s'agit ici simplement de résolution d'inégalité :

$$0 \leq 2j \leq 100 \Leftrightarrow 0 \leq j \leq 50$$

et

$$\begin{aligned} 0 \leq 2j+1 \leq 100 &\Leftrightarrow -1 \leq 2j \leq 99 \\ &\Leftrightarrow \frac{-1}{2} \leq j \leq \frac{99}{2} \\ &\stackrel{j \text{ est un entier}}{\Leftrightarrow} 0 \leq j \leq 49 \end{aligned}$$

c) Posons $S = \sum_{k=0}^{100} (-1)^k k^3$

$$\sum_{k=0}^{100} (-1)^k k^3 \stackrel{\text{Relation de Chasles pair/impair}}{=} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{100} k^3 - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{100} k^3.$$

De plus,

$$k \text{ pair et } 0 \leq k \leq 100 \Leftrightarrow k = 2l \text{ avec } 0 \leq l \leq 50$$

et

$$k \text{ impair et } 0 \leq k \leq 100 \Leftrightarrow k = 2l + 1 \text{ avec } 0 \leq l \leq 49$$

Donc :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=0}^{50} (2j)^3 - \sum_{j=0}^{49} (2j+1)^3 \\ &= 8A_{50}^3 - \sum_{j=0}^{49} 8j^3 + 3 \cdot 4j^2 + 3 \cdot (2j) + 1 \\ &= 8(A_{50}^3 - A_{49}^3) - 12A_{49}^2 - 6A_{49}^1 - A_{49}^0 \end{aligned}$$

Exercice n°2

Transformée d'Abel et 2 calculs d'une même somme

1) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n k2^k$. On a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^k 1 \right) 2^k = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k 2^k \\ &\stackrel{\text{Inversion de somme triangulaire}}{=} \sum_{j=1}^n \sum_{k=j}^n 2^k = \sum_{j=1}^n 2^j (2^{n+1-j} - 1) \\ &= \sum_{j=1}^n (2^{n+1} - 2^j) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi : } S_n = n2^{n+1} - 2(2^n - 1) = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

- 2) a) Avec les notations on a $a_k = A_k - A_{k-1}$.
b) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k B_k &= \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1}) B_k \\ &\stackrel{\text{Linéarité}}{=} \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^n A_{k-1} B_k \\ &\stackrel{\text{Changement d'indice}}{=} \sum_{k=0}^n A_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k B_{k+1} \\ &\stackrel{\text{Extraction du terme en trop + rassemblement sommes}}{=} A_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} A_k (B_k - B_{k+1}) \\ &= A_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k \end{aligned}$$

c) On pose $a_k = 2^k$ et $B_k = k$. Alors $A_n = 2^{n+1} - 1$ et $b_k = 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k2^k &= (2^{n+1} - 1)n - \sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1} - 1) \\ &= (2^{n+1} - 1)n - 2(2^n - 1) + n \\ &= 2^{n+1}(n-1) + 2 \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat de la question 1)

Exercice n°3

Logique et raisonnement

- 1) Par le cours la négation de $P \Rightarrow Q$ est P et $(\text{non } Q)$.

Par cette logique, on a :

$$\text{non } (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$$

$$\Leftrightarrow$$

$$P \text{ et } \text{non}(Q \Rightarrow R)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\underline{P \text{ et } Q \text{ et } \text{non}(R)}$$

- 2) Si on note P l'ensemble des étudiants de prépa et pour un élève $x \in L_x$ l'ensemble de ses livres alors la phrase peut se traduire par :

$$\forall x \in P, \exists l \in L_x, l \text{ parle de Sophie Germain } \text{OU} l \text{ parle d'Emilie du Chatelet.}$$

Sa négation est donc :

$$\exists x \in P, \forall l \in L_x, l \text{ ne parle pas de Sophie Germain } \text{ET} l \text{ ne parle pas d'Emilie du Chatelet.}$$

(Notez qu'on a utilisé la négation des quantificateurs ainsi qu'une des lois de De Morgan).

En français la phrase pourrait donner :

"Au moins un bon étudiant de prépa n'a que des livres ne parlant ni de Sophie Germain ni d'Emilie du Chatelet".

- 3) cf Cours

- 4) Réciproque : $(n \text{ n'est pas un entier premier}) \Rightarrow (\exists p \in \mathbb{N}, p^2 = n)$

Contraposée : $(n \text{ est un entier premier}) \Rightarrow (\forall p \in \mathbb{N}, p^2 \neq n)$.

Pour déprouver la réciproque, il nous suffit de trouver un nombre non premier qui ne soit pas le carré d'un entier, par exemple $6 = 2.3$ n'est pas premier mais n'est pas non plus le carré d'un entier. La réciproque est donc fausse.

- 5) (Exemple d'analyse synthèse)

- a) D'après l'équation (3), on a :

$$f(0) = g(0) + h(0)$$

et

$$f(1) = g(1) + h(1)$$

Or $h(0) = h(1) = 0$ et $g(0) = a.0 + b = b$ et $g(1) = a.1 + b = a + b$.

On obtient donc :

$$f(0) = b$$

et

$$f(1) = a + b$$

Par résolution du système on en déduit que $b = f(0)$ et $a = f(1) - b = f(1) - f(0)$.

- b) Pour $x \in \mathbb{R}$ d'après la question précédente, on a donc $f(x) = (f(1) - f(0))x + f(0) + h(x)$.
En isolant $h(x)$, on a donc :

$$h(x) = f(x) - [(f(1) - f(0))x + f(0)]$$

- c) Par construction de h , on a $h = f - g$ donc $f = g + h$.
De plus g définie par $x \mapsto (f(1) - f(0))x + f(0)$ est clairement affine.
Enfin :

$$h(0) = f(0) - [(f(1) - f(0)).0 + f(0)] = 0$$

et

$$h(1) = f(1) - [(f(1) - f(0)).1 + f(0)] = 0$$

On a donc bien vérifié toutes les hypothèses. Par analyse-synthèse on a donc que :

Toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est somme d'une fonction affine et d'une fonction s'annulant en 0 et en 1.

I Problèmes

Problème n° 1

- 1) On va raisonner par récurrence : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P(n)$ la proposition " $\sum_{k=1}^n u_k = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = 0$."

Initialisation :

Au rang $n = 1$, $P(n)$ s'écrit " $\sum_{k=1}^1 u_k = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, 1 \rrbracket, u_k = 0$.", ce qui peut se réécrire " $u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0$ ", ce qui est vrai.

Hérédité :

On suppose la propriété vraie au rang n , Supposons que $\sum_{k=1}^{n+1} u_k = 0$.

Montrons tout d'abord que $u_{n+1} = 0$. Supposons par l'absurde que $u_{n+1} > 0$, on a alors :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - u_{n+1} = 0 - u_{n+1} = -u_{n+1} < 0.$$

ce qui est absurde car la somme de termes positifs est positive.

On a donc $u_{n+1} = 0$. Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^{n+1} u_k - u_{n+1} = 0 - 0 = 0.$$

Or, par hypothèse de récurrence $\sum_{k=1}^n u_k = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = 0$. On a donc que pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket, u_k = 0$ et $u_{n+1} = 0$, ce qui montre la proposition au rang $n + 1$. Par théorème de récurrence, on a donc prouvé que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 2) a) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket, (x_k - 1)^2 \geq 0$ car le carré d'un nombre réel est positif. S est donc une somme de réels positifs, par la question 1, S est positive ou nulle.

- b) Attention ! Beaucoup d'entre vous ont donné un argument du type " $\sum_{k=1}^n nx_k = \sum_{k=1}^n 1$ donc $x_k = 1$ pour tout k ". Or ce n'est pas parce que deux sommes sont égales que tous leur termes sont égaux. Exemple simple : $1 + 3 = 2 + 2$ et aucun des termes du membre de gauche n'est égal au terme du membre de droite.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^n (x_k - 1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2x_k + 1 \\ &= \sum_{k=1}^n x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= n - 2.n + n = 0. \end{aligned}$$

S est donc une somme de termes positifs dont tous les termes sont nuls. D'après la question 2, tout ses termes sont donc nuls. Donc pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(x_k - 1)^2 = 0$.

On a donc pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_k - 1 = 0$ soit encore $x_k = 1$, ce qui conclut.

- 3) (Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels. On veut démontrer que :

- a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + b_k^2 \\ &= x^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^n a_k b_k + \sum_{k=1}^n b_k^2 \\ &= x^2 A + 2xC + B. \end{aligned}$$

- b) A est une somme de termes positifs (car pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k^2 \geq 0$, le carré d'un nombre réel étant toujours positif) qui est nulle,

D'après la question 2 tout ses termes sont donc nuls, ce qui signifie que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k^2 = 0$ et donc $a_k = 0$.

On a donc également pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k b_k = 0$. Ceci implique que C est nul également.

De plus, l'inégalité (1) peut se réécrire :

$$|C| \leq \sqrt{A}\sqrt{B}.$$

Ce qui connaissant A et C se réécrit $0 \leq 0$, ce qui est vrai.

(1) est donc vrai pour $A = 0$.

- c) Soit x dans $\mathbb{R}$, $f(x)$ s'exprime d'après l'énoncé comme une somme de terme positifs. Par la question 1, on a que $f(x) \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout x dans $\mathbb{R}$, f reste de signe constant sur $\mathbb{R}$.

De plus d'après la question 4)a) on sait que f est un polynôme en x . f est donc un polynôme qui garde un signe constant dans $\mathbb{R}$.

Or d'après la question 2 de l'exercice 1, on sait qu'un polynôme de signe constant sur $\mathbb{R}$ a son discriminant négatif ou nul.

Donc le discriminant de f est négatif ou nul.

Or le discriminant Δ de f est $\Delta = (2C)^2 - 4AB = 4(C - AB)$. Donc si $\Delta \leq 0$, $4(C - AB) \leq 0$ donc $C^2 \leq AB$.

En prenant la racine carrée de cette inégalité, ce qui est possible car tous ses termes sont positifs, on obtient :

$$|C| \leq \sqrt{A}\sqrt{B}$$

Soit encore,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

Ce qui conclut.

- d) Application : démontrer que : Pour tout k dans $1n$, on pose $a_k = k$ et $b_k = 1$. D'après la question précédente (inégalité de Cauchy-Schwarz), on obtient que :

$$\sum_{k=1}^n |\sqrt{k} \cdot 1| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n k} \sqrt{\sum_{k=1}^n 1}$$

Soit encore,

$$\sum_{k=1}^n |\sqrt{k}| \leq \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \sqrt{n} = n \sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

Ce qui conclut.

Problème n° 2

Autour des coefficients binomiaux

Partie 0 : Rappel du cours

- 1) Voir cours.
- 2) Voir cours.

Partie I : Calcul d'une somme

- 3) On utilise un raisonnement par récurrence. ★ On a :

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$$

donc l'égalité est vraie pour $n = 0$. ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Montrons que

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \text{ On a :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 \quad (\text{relation de Chasles}) \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1) \times (n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n + 1$.

4) a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$. On a (puisque $0 \leq \ell + 1 \leq k \leq k+1$) :

$$\begin{aligned}\binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1} &= \frac{(k+1)!}{(\ell+1)!(k-\ell)!} - \frac{k!}{(\ell+1)!(k-\ell-1)!} \times \frac{k-\ell}{k-\ell} \\ &= \frac{(k+1)k! - (k-\ell)k!}{(\ell+1)!(k-\ell)!} \\ &= \frac{(\ell+1)k!}{(\ell+1)!(k-\ell)!} \\ &= \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} \\ &= \binom{k}{\ell}\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'égalité est évidente si $\ell = k$; en effet, $\binom{k}{k+1} = 0$ donc les deux nombres mis en jeu dans l'égalité sont égaux à 1. Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall \ell \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \binom{k}{\ell} = \binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1}$$

b) Soient $\ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq n$. D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \sum_{k=\ell}^n \left[\binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1} \right] = \binom{n+1}{\ell+1} - \binom{\ell}{\ell+1}$$

car la somme est télescopique. Or $\binom{\ell}{\ell+1} = 0$ car $\ell + 1 > \ell$ donc :

$$\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

Soient $\ell, n \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq n$. D'après la question précédente, on a :

$$\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \sum_{k=\ell}^n \left[\binom{k+1}{\ell+1} - \binom{k}{\ell+1} \right] = \binom{n+1}{\ell+1} - \binom{\ell}{\ell+1}$$

car la somme est télescopique. Or $\binom{\ell}{\ell+1} = 0$ car $\ell + 1 > \ell$ donc :

$$\sum_{k=\ell}^n \binom{k}{\ell} = \binom{n+1}{\ell+1}$$

c) Pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a :

$$\binom{k}{3} = \frac{k!}{3!(k-3)!} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

et cette égalité reste vraie si $k \in \{0, 1, 2\}$ car, dans ce cas, on a $\binom{k}{3} = 0$ (le membre de droite ci-dessus étant également nul). Ainsi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \binom{k}{1} = k, \quad \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2} \quad \text{et} \quad \binom{k}{3} = \frac{k(k-1)(k-2)}{6}$$

d) Soient $a, b, c, k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1} &= a\frac{k(k-1)(k-2)}{6} + b\frac{k(k-1)}{2} + ck \\
&= \frac{a(k^3 - 3k^2 + 2k)}{6} + \frac{b(k^2 - k)}{2} + ck \\
&= \frac{a}{6}k^3 + \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)k^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c\right)k
\end{aligned}$$

Ainsi, pour que l'égalité $a\binom{k}{3} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{1} = k^3$ soit vraie, il suffit que a, b et c soient tels que :

$$\begin{cases} \frac{a}{6} = 1 \\ \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = 0 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + c = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a = 6 \\ b = a = 6 \\ c = \frac{b}{2} - \frac{a}{3} = 1 \end{cases}$$

Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k^3 = 6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1}$$

e) Soit $n \in \mathbb{N}$. En sommant les égalités obtenues à la question précédente, il vient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k^3 &= \sum_{k=0}^n \left(6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1} \right) = 6 \sum_{k=0}^n \binom{k}{3} + 6 \sum_{k=0}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=0}^n \binom{k}{1} \\
&= 6 \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} + 6 \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} \\
&= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}
\end{aligned}$$

d'après la formule du triangle de Pascal généralisée (question 2.(b)). En explicitant les coefficients binomiaux, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k^3 &= 6 \times \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} + 6 \times \frac{(n+1)n(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= n(n+1) \frac{(n-1)(n-2) + 4(n-1) + 2}{4} \\
&= n(n+1) \frac{n^2 + n}{4} \\
&= \frac{n^2(n+1)^2}{4}
\end{aligned}$$

Ainsi : on retrouve bien l'égalité (*)

Partie II : Formule d'inversion de Pascal

1) Soient $n, k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq k \leq n$. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!} = \frac{n!}{(n-k)!\ell!(k-\ell)!} \\
&= \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \times \frac{(n-\ell)!}{(k-\ell)!((n-\ell)-(k-\ell))!} \\
&= \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}
\end{aligned}$$

Ainsi : $\square$

$$\forall n, k, \ell \in \mathbb{N}, \quad \ell \leq k \leq n \implies \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}$$

2) Soient $n, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $\ell \leq n$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} S_{n,\ell} &= \sum_{k=\ell}^n (-1)^{k-\ell} \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} = \binom{n}{\ell} \sum_{k=\ell}^n \binom{n-\ell}{k-\ell} (-1)^{k-\ell} \\ &= \binom{n}{\ell} \sum_{j=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{j} (-1)^j \quad (\text{changement d'indice } j = k - \ell) \\ &= \binom{n}{\ell} \sum_{j=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{j} (-1)^j 1^{n-\ell-j} \\ &= \binom{n}{\ell} 0^{n-\ell} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_{n,\ell} = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < n \\ 1 & \text{si } \ell = n \end{cases}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les propriétés sur les sommes triangulaires, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} b_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} a_\ell = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} a_\ell \\ &= \sum_{0 \leq \ell \leq k \leq n} (-1)^{n+k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} a_\ell \\ &= \sum_{\ell=0}^n (-1)^{n+\ell} a_\ell \sum_{k=\ell}^n (-1)^{k-\ell} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^n (-1)^{n+\ell} a_\ell S_{n,\ell} \end{aligned}$$

En utilisant maintenant la question précédente, il vient :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} b_k = \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{n+\ell} a_\ell \underbrace{S_{n,\ell}}_{=0}}_{=0} + \underbrace{(-1)^{2n} a_n S_{n,n}}_{=1} = a_n$$

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} b_k$$

4) Application.

a) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $1 \leq p \leq n$, on a :

$$\begin{aligned}
 p \binom{n}{p} &= p \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
 &= \frac{n(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} \\
 &= n \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} \\
 &= n \binom{n-1}{p-1}
 \end{aligned}$$

b) On utilise une récurrence simple. ★ On sait que $x_0 = 1$ donc :

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x_k = \binom{0}{0} x_0 = 1 = 0!$$

L'égalité est donc vraie pour $n = 0$. ★ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k$. Montrons

que $(n+1)! = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x_k$. On a :

$$\begin{aligned}
 (n+1)! &= (n+1) \times n! \\
 &= (n+1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k \quad (\text{hypothèse de récurrence}) \\
 &= \sum_{k=0}^n (n+1) \binom{n}{k} x_k \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} (k+1) x_k \quad (\text{formule du pion}) \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} (x_{k+1} - (-1)^{k+1}) \quad (\text{relation de récurrence vérifiée par la suite}) \\
 &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} (x_{\ell} - (-1)^{\ell}) \quad (\text{changement d'indice } \ell = k+1) \\
 &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} x_{\ell} - \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} (-1)^{\ell}
 \end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} (-1)^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} (-1)^{\ell} - 1 = 0^{n+1} - 1 = -1 \quad (\text{car } n+1 > 0)$$

donc :

$$(n+1)! = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} x_{\ell} + 1 = \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} x_{\ell}$$

car $\binom{n+1}{0} x_0 = 1$. L'égalité est donc vraie au rang $n+1$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède (pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a ici $a_k = x_k$ et $b_k = k!$) :

$$x_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^{2n-\ell}}{\ell!} \quad (\text{changement d'indice } \ell = n-k)$$

Or $(-1)^{2n} = 1$ et, pour tout $\ell \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a $(-1)^{-\ell} = (-1)^{\ell}$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$