

Le devoir maison est à effectuer seul ou en binôme, sans utilisation d'aide extérieure. Vous pouvez me poser des questions si vous bloquez et avez besoin de pistes mais ne le faites qu'après avoir essayé des choses vous-mêmes. Le devoir est à rendre sur COPIE DOUBLE.

Problème n° 1

(Retour sur les sommes)

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f_0, \dots, f_n \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$). Rappeler l'expression de la dérivée de $\sum_{k=0}^n f_k$ (Attention, ici cette somme n'est pas une somme de réels mais bien une somme de fonctions !)
- 2) Soit $x \in \mathbb{R}$, que vaut $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$?
- 3) On pose $g : x \mapsto (1+x)^n$. En utilisant la question précédente, donner 2 expressions de la dérivée de g .
- 4) En déduire les valeurs des expressions suivantes :
 - a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ où $n \geq 0$.
 - b) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ où $n \geq 1$.
 - c) $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$ où $n \geq 2$.
 - d) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$ où $n \geq 0$ (Pourquoi divise-t-on plutôt que de multiplier ?)

Problème n° 2

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1+x$$

- 1) On considère f une fonction satisfaisant la relation précédente. Que vaut $f(0)$? $f(1)$?
- 2) Soit $x \in \mathbb{R}$. En substituant x par $1-x$ dans la relation, déterminer $f(x)$.
- 3) Quelles sont les fonctions f solution du problème ?

Problème n° 3

(Premier aperçu de la série harmonique)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est communément appelée série harmonique, nous l'étudierons plus tard dans l'année. Le but de cet exercice est de prouver qu'aucun des termes de cette suite (sauf le premier) n'est un entier.

- 1) Donner la valeur des termes u_k pour $k \in \llbracket 2, 5 \rrbracket$, qu'on réduira sous la forme de fractions irréductibles.
- 2) Quels points communs ont les numérateurs de ces termes ? Les dénominateurs ? En déduire une conjecture quant à la forme des termes de la suite (u_n) pour $n \geq 2$.
On se propose de prouver cette conjecture par récurrence forte.
- 3) Montrer l'initialisation de cette conjecture qu'on notera P .
- 4) Montrer que $(\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ si n est pair.
- 5) En utilisant une relation de Chasles pair/impair et en étudiant chaque sous-somme, prouver $(\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket P(k)) \Rightarrow P(n+1)$ si n est impair.
- 6) Conclure.

Problème n° 4

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout n .

- 1) Déterminer le signe et la monotonie de la suite (u_n) . On pourra discuter selon les valeurs de n .
- 2) À l'aide de la suite décalée $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.