

TD 3 : INÉGALITÉS ET FONCTIONS DE LA VARIABLE RÉELLE

♡ = Exercice thématique, ★ = Niveau de difficulté, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Égalités, inégalités et partie entière

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. On écrira les solutions sous forme d'union d'intervalles que l'on représentera.

- | | |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $ x + 1 \leq 4$ | 6) $x - 5 \leq \sqrt{2x^2 + 1}$ |
| 2) $\sqrt{4x^2 + 5} \leq 2x - 3$ | 7) $\ln(2x + 1) < \ln x + 1$. |
| 3) $\frac{4x-1}{2x+1} \geq 1$ | 8) $\sqrt{2x-1} < \sqrt{x+1} + 1$. |
| 4) $ x - 5 \leq \sqrt{2x + 1}$ | 9) $ x^2 + x + 1 > x - 4 $ |
| 5) $ 2x - 4 \leq x - 1 $ | 10) $ x + x + 1 + x + 2 \leq 3$ |

2 Soient x et y des réels. Démontrer les inégalités suivantes :

- 1) $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
- 2) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$
- 3) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$.

3 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels de même signe tous strictement supérieurs à -1. Montrer que : $\prod_{k=0}^n (1 - a_k) > 1 + \sum_{k=0}^n a_k$.

4 Résoudre :

- | | |
|---|--|
| 1) $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ | 3) Soient a, b deux réels. Prouver que
$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$.
et $\lfloor a \rfloor + \lfloor a + b \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor 2a \rfloor + \lfloor 2b \rfloor$. |
| 2) $\sum_{k=1}^{2023} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$. | |

5 Soit $n \geq 1$ un entier.

- 1) Démontrer que $2n \leq 2\sqrt{n(n+1)} < 2n + 1$.
- 2) En déduire la valeur de $\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rfloor$.

6 Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

7 Soient a, b et c , 3 réels de l'intervalle $[0; 1]$. Montrer que l'un au moins des réels $a(1 - b)$, $b(1 - c)$ et $c(1 - a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

8 ★ Démontrer les inégalités suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ | 4) $\forall a, b \geq 0, \sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a + b)$ |
| 2) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$ | 5) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$ |
| 3) $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$ | 6) $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (a+b+c)^2 \leq 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$ |

9 Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, démontrer que :

$$||x| - |y|| \leq |x + z| + |y + z|.$$

9.5 Pour $x \in [-\pi, \pi]$ donner le signe de $\sin(x)(\sin(x) - 1)(2 \cos(x) - 1)$.

Généralités sur les fonctions

10 Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$1) f : x \mapsto \ln(2-x)$ $2) g : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$3) h : x \mapsto \frac{\ln(\sqrt{3x+7})}{4-x^2}$ $4) i : x \mapsto \sqrt{\ln(\ln(\ln(x)))}$
---	--

11 (Cours) Soit $T > 0$.

- 1) Montrer que la somme et le produit de deux fonctions T -périodiques sur $\mathbb{R}$ sont des fonctions T -périodiques.
- 2) Montrer que pour $n \in \mathbb{Z}^*$, si T est une période d'une fonction f alors nT est également une période de cette fonction f (on pourra commencer par le montrer sur $\mathbb{N}^*$).
- 3) Lorsque l'ensemble des périodes d'une fonction f admet un minimum, on appelle ce minimum **période minimale** de f .

Montrer que la somme de deux fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$ de période minimale T n'est pas nécessairement de période minimale T .

Pour tout $a > 0$, on considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_a(x) = \sin(\pi x) + \sin(a\pi x)$.

- 4) Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$ alors f_a est périodique.
- 5) On suppose dans cette question que $a = \sqrt{2}$.
 - a) Résoudre l'équation $f_a(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
 - b) En déduire que f_a n'est pas périodique.

12 ★ Déterminer les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ monotones et périodiques.

13 ★ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

14 ★★ Montrer que l'application suivante est bijective et exprimer $f^{-1}(y)$

pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccc} f :]-1, 1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1-x^2} \end{array}$$

15 Soit $I \subset \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que la somme de deux fonctions minorées (resp. majorées) sur I est une fonction minorée (resp. majorée) sur I . Qu'en déduire sur la somme de deux fonctions bornées sur I ?
- 2) Montrer que le produit de deux fonctions bornées sur I est une fonction bornée sur I .
- 3) Est-ce que le quotient de deux fonctions bornées ne s'annulant pas sur I est encore une fonction bornée ?

16 Soit $f : x \mapsto x^2 + \ln(x)$.

- 1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble à déterminer.
- 2) Montrer que sa réciproque f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et exprimer sa dérivée $f^{-1'}$ en fonction de f^{-1} .
- 3) Etudier les variations de f^{-1} .

17 Montrer que les fonctions suivantes sont périodiques sur l'ensemble considéré, et déterminer leur période minimale :

$1) f : x \mapsto \cos(4x) \text{ sur } \mathbb{R};$ $2) h : x \mapsto \sin(6x)\sin(2x) \text{ sur } \mathbb{R};$ $3) g : x \mapsto \cos^2(4x) \text{ sur } \mathbb{R};$	$4) 1_{\mathbb{Z}} \text{ sur } \mathbb{R}. (1_{\mathbb{Z}}(x) \text{ vaut } 1 \text{ si } x \in \mathbb{Z}, 0 \text{ sinon})$
--	--

18 Soit $f : x \mapsto x^2 + \ln(x)$

- 1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble à déterminer.
- 2) Montrer que sa réciproque f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition et exprimer sa dérivée $f^{-1'}$ en fonction de f^{-1} .
- 3) Etudier les variations de f^{-1} .

19

- 1) Montrer, grâce au TVI strictement monotone, que la fonction $x \xrightarrow{f} \sqrt{x^3 - 1}$ est bijective de $[1, +\infty[$ sur son image (à préciser).
- 2) Retrouver le résultat de la question 1) et déterminer une expression explicite de f^{-1} en résolvant l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [1, +\infty[$.

20 Déterminer les ensembles de définition, continuité et dérivabilité des fonctions :

1) $x \mapsto \sqrt{\ln x}.$

3) $x \mapsto \sqrt{2 - |x - 3|}.$

2) $x \mapsto \sqrt{e^x + 2e^{-x} - 3}.$

4) $x \mapsto \frac{\ln(x^2 - 4)}{\sqrt{4x^2 - 2x + 1}}.$

21 Tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions :

1) $x \mapsto \sqrt{3x - 4}.$

2) $x \mapsto \frac{5}{2x+1}.$

3) $x \mapsto 1 + \ln(2 - x).$

22 (Application du TVI) Un cycliste parcourt 40 km en 2h (on admettra que la distance qu'il a parcouru au bout d'un certain temps est une fonction continue du temps). Montrer qu'il y a un intervalle de temps d'1h où il a parcouru exactement 20 km.

23 Etudiez et représentez

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}.$

2) $f(x) = \sin^2 x + \cos x.$

3) $f(x) = x + \ln(1 + e^x).$