Le devoir maison est à effectuer seul ou en binôme, sans utilisation d'aide extérieure. Vous pouvez me poser des question si vous bloquez et avez besoin de pistes mais ne le faites qu'après avoir essayé des choses vous mêmes. Le devoir est à rendre sur COPIE DOUBLE.

Problème n° 1

1) $\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} f_k'.}$

2) En appliquant la formule du binôme de Newton, on obtient que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n}$$

3) Tout d'abord, en tant que composée de la fonction $x \mapsto 1+x$ par la fonction $X \mapsto X^n$, on a que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $g'(x) = n(1+x)^{n-1}$.
De plus, d'après la question précédente g peut s'écrire $g = \sum_{k=0}^{n} f_k$ avec pour $k \in [\![0, n]\!]$, $f_k : x \mapsto \binom{n}{k} x^k$.
Ainsi d'après la question 1, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{g'(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k'(x) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1}}$$

4) a) D'après la question 2), on a que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = g(1) = 2^n.}$$

(Remarque : C'est également un résultat du cours de somme et produit ou une simple application du binôme de Newton mais ici on peut simplement utiliser ce qu'on a déjà fait aux questions précédentes, ce qui est en général préférable)

b) D'après les résultats de la question 3), on remarque que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = g'(1)$. En utilisant l'autre expression de la dérivée de g, on obtient que $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$.
On a donc :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}}$$

c) Pour cette question, on va avoir besoin de redériver g de 2 manières différentes. g est une fonction polynomiale donc elle est bien dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$ et on a pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

et par utilisation de la question 1) et 3) :

$$g''(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k''(x) = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2}.$$

Grâce à ces calculs on obtient que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = g''(1) + g'(1) = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}}$$

d) Ici on va avoir besoin de primitiver g. Une primitive G_1 de g est $x \mapsto \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1}$. De plus comme g est somme de fonctions f_k, on obtient qu'une primitive G_2 de g est également $x \mapsto (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}x^{k+1}) + \frac{1}{n+1}$. On peut vérifier que ces 2 primitives valent $\frac{1}{n+1}$ en 0, elles sont donc égales (car les primitives d'une fonctions sont égales à une constante prêt, constante qui doit valoir 0 ici).
On a donc que $G_1(1) = \frac{1}{n+1}2^{n+1} = G_2(1) = (\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}) + \frac{1}{n+1}$.
On obtient donc que :

$$\boxed{(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}) = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)}$$

Problème n° 3

Dans cet exercice, on souhaite déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

1) Poser des valeurs particulières de x dans l'équation permet d'obtenir des précisions (nous sommes ici dans un raisonnement par analyse synthèse) :
Pour $\mathbf{x = 0}$, on obtient :

$$f(0) + 0.f(1) = 1 + 0$$

soit

$$\boxed{\text{f(0) = 1}}$$

Pour $\mathbf{x = 1}$, on obtient :

$$f(1) + 1.f(0) = 1 + 1$$

soit

$$f(1) + f(0) = 2$$

soit en remplaçant la valeur de $f(0)$

$$\boxed{\text{f(1) = 1}}.$$

2) On applique la recommandation. Pour $X = (1-x)$, on obtient :

$$\begin{gathered} f(X) + Xf(1-X) = X + 1 \\ \Leftrightarrow \\ f(1-x) + (1-x)f(1-(1-x)) = 1 - x + 1 \\ \Leftrightarrow \\ f(1-x) + (1-x)f(x) = 2 - x \ (F) \end{gathered}$$

Si on nomme (E) l'équation du problème et (F) celle qu'on vient d'obtenir, alors $(E) - x(F)$ nous donne :

$$\begin{gathered} f(x) + xf(1-x) - x[f(1-x) + (1-x)f(x)] = 1 + x - x(2-x) \\ \Leftrightarrow \\ (x^2 - x + 1)f(x) = x^2 - x + 1 \\ \Leftrightarrow (*) \\ f(x) = 1 \end{gathered}$$

L'équivalence $(*)$ étant possible car le polynôme $X^2 - X + 1$ est de discriminant négatif.

La fonction f est donc la fonction constante égale à 1

Remarquons que nous avons fini ici la partie analyse d'une analyse-synthèse. Le travail n'est pas fini néanmoins

3) Les questions 2 et 3 nous informe que la seule solution qui peut satisfaire l'équation est la fonction constante égale à 1.
Nous devons maintenant regarder si cette fonction vérifie ou non l'équation. On pose $f : x \mapsto 1$, pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) + xf(1-x) &= 1 + x.1 \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

La fonction $f = 1$ vérfie bien l'équation, donc :

L'unique solution du problème est $f = 1$.

Problème n° 4

(Premier aperçu de la série harmonique)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est communément appellée série harmonique, nous l'étudierons plus tard dans l'année. le but de cet exercice est de prouver qu'aucun des termes de cette suite (sauf le premier) n'est un entier.

1) On a :

$$u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$u_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$$

$$u_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

$$u_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60}$$

2) Les numérateurs sont tous impairs, les dénominateurs tous pairs. La conjecture à prouver est donc la suivante :

Tout terme pour $n \geq 2$ de la série harmonique peut s'écrire de la forme $\frac{p}{q}$ où p est un nombre impair et q un nombre pair.

3) Au rang $n = 2$ la proposition s'écrit :
" u_2 est le quotient d'un nombre impair par un nombre pair"
ce qui est le cas car $u_2 = \frac{3}{2}$ et que 3 est impair et 2 pair.

La proposition est vraie dans le cas $n = 2$

4) On suppose que la proposition est vrai pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ et que n et pair.
Comme la proposition est vraie au rang n, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec p impair, q pair et $\frac{p}{q} = u_n$.
On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{p}{q} + \frac{1}{n+1} \\ &\overset{\text{mise au même dénominateur}}{=} \frac{p(n+1)+q}{q(n+1)} \end{aligned}$$

Or q est pair et p et $n+1$ sont impairs.
Donc $p(n+1)$ est impair donc $p(n+1)+q$ est encore impair.
De même $q(n+1)$ est pair.
En posant $p_1 = p(n+1)+q$ et $q_1 = q(n+1)$ on a donc bien :

$u_{n+1} = \frac{p_1}{q_1}$ avec p_1 impair et q_1 pair.

5) On suppose que la proposition est vrai pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ et que n est impair.
$n+1$ est donc pair, posons k dans $\mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2k$ (on remarque au passage que comme n est impair, donc $n \geq 3$,$n+1 \geq 4$ et donc $k \geq 2$). On a alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_{2k} \\ &= \sum_{j=1}^{2k} \frac{1}{j} \\ &\overset{\text{Relation de Chasles pair/impair}}{=} \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ pair}}}^{2k} \frac{1}{j} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ impair}}}^{2k} \frac{1}{j} \\ &\overset{\text{changement d'indice}}{=} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j} + \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2j+1} \end{aligned}$$

Posons $A = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j}$ et $B = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2j+1}$.

Par linéarité, on a $A = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2j} = \frac{1}{2} u_k$.

Par hypothèse de récurrence forte, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec p_1 impair et q_1 pair tel que $u_k = \frac{p_1}{q_1}$.
On a donc $A = \frac{p_1}{2q_1}$.
Pour B on peut remarquer qu'en sommant des fractions aux dénominateurs impairs on obtient encore des dénominateurs impairs (tout simplement parce qu'en mettant au même dénominateur on prend le produit des dénominateurs qui reste impair). On peut le prouver par une petite récurrence simple :

Soit $P(k)$ la proposition "$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2j+1}$ est une fraction irréductible avec un dénominateur impair"

Au rang $k = 2$, P(2) s'écrit :
" $1 + \frac{1}{3}$ a un dénominateur impair sous forme irréductible"
ce qui est le cas car $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

On suppose la propriété vraie au rang k et on écrit $\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2j+1}$ sous la forme $\frac{p_2}{q_2}$ avec q_2 impair :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{2j+1} &= \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2k+1} \\ &= \frac{p_2}{q_2} + \frac{1}{2k+1} \\ &= \frac{p_2(2k+1)+1}{q_2(2k+1)}\end{aligned}$$

$q_2(2k+1)$ est impair. La fraction peut peut-être encore se simplifier mais une simplification ne peut rendre le dénominateur impair. La proposition est donc vrai au rang $k+1$ et on conclut par théorème de récurrence simple.
On a donc qu'il existe $(p_2, q_2) \in \mathbb{N}$ avec q_2 impair tel que $B = \frac{p_2}{q_2}$.
Donc on a :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= A + B \\ &= \frac{p_1}{2q_1} + \frac{p_2}{q_2} \\ &= \frac{p_1 q_2 + 2p_2 q_1}{2q_1 q_2}\end{aligned}$$

$2q_1q_2$ est pair comme multiple de 2, p_1q_2 est impair comme produit de nombres impairs et $2p_2q_1$ est pair donc $p_1q_2 + 2p_2q_1$ est impair.
En posant $p = p_1q_2 + 2p_2q_1$ et $q = 2q_1q_2$, on a donc :

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{p}{q} \text{ avec } p \text{ impair et } q \text{ pair.}}$$

6) On a montré que la proposition était vraie au rang $n = 2$ et par disjonction de cas on a montré que si la proposition est vrai pour tout rang k compris entre 2 et n où $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$. Par théorème de récurrence forte on a donc :
"Tout terme pour $n \geq 2$ de la série harmonique peut s'écrire de la forme $\frac{p}{q}$ où p est un nombre impair et q un nombre pair."
À fortiori comme un nombre pair ne peut diviser un nombre impair (car sinon 2 diviserait le nombre impair), on peut en conclure :

$$\boxed{\text{Pour } n \geq 2,\ u_n \text{ n'est pas un entier}}$$

Problème n° 5

Soit (u_n) la suité définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ pour tout n.

1) On commence par montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$:
Au rang $n = 0$, l'énoncé nous donne que $u_0 > 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose la propriété vraie au rang n.
Alors $u_n > 0$ et donc $\frac{1}{u_n} > 0$ d'où $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} > 0$. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
Par théorème de récurrence,

La suite (u_n) est strictement positive.

En conséquence, soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} > 0$.

La suite (u_n) est donc strictement croissante.

2) La suite (u_n) est croissante donc par théorème de la limite monotone il y a 2 possibilités :

1) Elle est majorée et converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}_+^*$ (la suite étant strictement croissante, la limite doit être supérieure au premier terme qui est strictement positif).

Elle n'est pas majorée et diverge vers $+\infty$.

Eliminer la première option sera donc suffisant pour montrer ce que demande l'énoncé.

On suppose par l'absurde que (u_n) converge vers une limite finie $l > 0$.

Comme $(u_{n+1}) = (u_n + \frac{1}{u_n})$, par opération sur les limites (possible car $l > 0$), (u_{n+1}) a pour limite $l + \frac{1}{l}$.

Or (u_{n+1}) étant une suite extraite de (u_n) (cet argument n'était pas nécessaire à ce stade de votre apprentissage mais c'est comme ça qu'on le justifiera après le chapitre sur les suites), elle a la même limite que (u_n).

On obtient donc $l = l + \frac{1}{l}\ \frac{1}{l} = 0$ soit encore $1 = 0$, ce qui est absurde.

u_n n'est donc pas convergente, par théorème de la limite monotone on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$