

## Chapitre 4 : Fonctions de la variables réelle

### A) Généralités sur les fonctions

- Définition de la notion de fonction, espace de départ (l'espace d'arrivée est pour l'instant fixé à  $\mathbb{R}$  ou éventuellement un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ ).
- Domaine de définition d'une fonction.
- Représentation graphique, premiers exemple (la représentation graphique est vue comme une aide à l'intuition.)
- Opérations sur les fonctions (sommes, produits, quotients, composées)
- Fonctions paires/impaires : Def, propriétés, lien avec la représentation graphique
- Fonctions périodiques (def, ex du sin, cos,  $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ , la définition de période minimale n'a pas été abordé, lien avec la représentation graphique.)
- La somme/le produit de fonctions  $T$ -périodique pour  $T > 0$  est  $T$ -périodique mais la somme de fonctions périodique n'est pas périodique en général.
- Fonctions croissantes, décroissantes, str croissantes, str décroissantes, monotones...
- Fonctions majorées, minorées, admettant un maximum, un minimum...
- Asymptotes verticales, horizontales, obliques (le calcul de limite en lui même n'a pas été trop exploré pour l'instant.)
- Perturbations de fonctions et leur impact sur la représentation graphique (translations, symétries,...)

### B) Dérivabilité d'une fonction de la variable réelle

- Notion de fonction dérivable, nombre dérivée, équation de la tangente
- Domaine de dérivabilité
- Dérivées partielles (juste la notion).
- Opérations sur les fonctions dérivables (sommes, produit, quotient, composées,...)
- Rappel des dérivées classiques.

### C) Lien entre dérivation et variations

- Définition extrema local
- Propriétés sur dérivées et variations
- Propriétés sur dérivées et extremas

### D) Bijectivité, Continuité et Dérivabilité

- Fonction injective, surjective, bijective (pour une fonction générale)
- Lien entre la stricte monotonie et l'injectivité
- Fonctions continues (def avec des limites, la notion de limite n'a pas encore été explicitée)
- Une fonction dérivable est continue
- Contre-exemple de la fonction racine et de la fonction valeur absolue pour la réciproque.
- TVI et théorème de la bijection.

### E) Etude de fonctions

- Méthode pour l'étude de fonctions
- Exemple de  $x \mapsto \frac{(x-1)^2}{x^2+1} - 1$ .

Le chapitre sur les fonctions usuelles (ch, sh, arcos, arcsin,...) n'a pas encore été traité.

## Questions de cours :

Tous les étudiants doivent être capable de redonner les définitions du Chapitre 3 et 4 avec des quantificateurs.

- Etude complète et tracé de la fonction  $x \mapsto \frac{(x-1)^2}{x^2+1} - 1$ .

- Pour  $f$  et  $g$ , 2 fonctions monotones de même monotonie.
  - 1) Montrer que  $f + g$  est monotone.
  - 2) Montrer que si  $f$  et  $g$  sont positives alors  $fg$  est monotone de même monotonie que  $f$  et  $g$ . On donnera un contre-exemple quand  $f$  et  $g$  ne sont pas positives et quand  $f$  et  $g$  ne sont pas de même monotonie.
  - 3) Si  $g \circ f$  est définie, discuter de la monotonie de  $g \circ f$  en fonction de leur monotonie respectives (on prouvera 1 des 4 cas)
- On montrera les 3 propriétés suivantes :
  - 1) Si  $f$  est périodique de période  $T$  alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ ,  $kT$  est une période de  $f$  (vu Lundi, exercice 11).
  - 2) Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$
  - 3) Montrer que  $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$  est 1-périodique.