TD 8 : Equations différentielle linéaires

En l'absence de précisions, y désigne une fonction de la variable x.

EDL du premier ordre

1 Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre suivantes en précisant le domaine des solutions :

1) $y'+3y=0$
2) $y'-(x+1)^2y=0$;
3) $y'-\ln(x)y=0$;
4) $y'-xy=0$;
5) $y'+\frac{1}{x}y=0$;
6) $y'+\frac{1}{1-x^2}y=0$

2 Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\sqrt{1-x^2}y'+y=1 \text{ sur }]-1,1[$$

3 **(Un second membre particulier)**
Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1) $y'+2y=x^2$
2) $y'+y=2\sin(x)$
3) $y'-y=(x+1)e^x$
4) $y'+y=x-e^x+\cos(x)$

4 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1) $y'-\frac{2}{t}y=t^2$ sur $]0,+\infty[$
2) $(1+x)y'+y=1+\ln(1+x)$ sur $]-1,+\infty[$
3) $y'+\tan(x)y=\cos(x)+\sin(2x)$
4) $y'+y=x-e^x+\cos(x)$
5) $y'-\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}y=\mathrm{sh}(x)$ sur $\mathbb{R}$
6) $\mathrm{ch}(x)y'-\mathrm{sh}(x)y=\mathrm{sh}^3(x)$ sur $\mathbb{R}$
7) $(e^x-1)y'+e^xy=1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$
8) $\left(x^2+1\right)y'-xy=\left(x^2+1\right)^{3/2}$

5 Déterminer l'unique solution y de l'équation $y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1$ telle que $y(0)=1$.

6 ★★

1) Déterminer les fonctions $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall x\in[0,1], f'(x)+f(x)=f(0)+f(1)$$

2) Trouver toutes les applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{C}$ telles que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x+y)=f(x)f(y).$$

EDL du second ordre

7 Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes du second ordre suivantes :

1) $y''+y=0$;
2) $y''-3y'+2y=0$;
3) $y''-y'+(1-i)y=0$;
4) $y''-y=0$;
5) $y''=-2y'-y$;
6) $y''-2iy'-y=0$.

8 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1) $y''+2y'+y=xe^x$
2) $y''+y'-2y=xe^x$
3) $y''+2y'+2y=(x+1)e^{-x}$
4) $y''-2y'+y=e^x$

9 Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y''+y'-6y=1-8x-30x^2$,
2) $y''+y'=3+2x$,
3) $y''+4y=4+2x-8x^2-4x^3$.

10 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1) $y'' + y = \mathrm{sh}(x)$
2) $y'' - 3y' + 2y = x\,\mathrm{ch}(x)$
3) $y'' - 2y' + y = 2\,\mathrm{ch}(x)$

11 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1) $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$
2) $y'' + y = x\sin(x)$
3) $y'' + y = 2\cos^2(x)$

12 Résoudre l'équation différentielle suivante sur tout intervalle ne contenant pas -1 :

$$(1+x)^2y'' + (1+x)y' - 2 = 0.$$

13 ★★ Déterminer tous les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que les solutions de l'équation $y'' + ay^{'} + by = 0$ soient toutes bornées sur $\mathbb{R}_+$.

Applications et complications

14 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'' = x' + y' - y \\ y'' = x' + y' - x \end{cases}$$

où x et y sont des fonctions de la variable t.

15 Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique suivant l'axe (Oz) est régi par un système différentiel de la forme

$$\begin{cases} x'' = \omega y' \\ y'' = -\omega x' \\ z'' = 0 \end{cases}$$

où ω dépend de la masse et de la charge de la particule, ainsi que du champ magnétique. En posant $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

16 On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y" - 3xy' + 4y = 0.(E)$$

1) Cette équation est-elle linéaire ? Qu'est-ce qui change par rapport au cours ?
2) **Analyse :** Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y\left(e^t\right)$.
   a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}, z'(t)$ et $z''(t)$.
   b) En déduire que z vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants que l'on précisera (on pourra poser $x = e^t$ dans (E)).
   c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   d) En déduire le "portrait robot" de y (quel forme doit-il avoir en vue des questions précédentes) ?
3) **Synthèse :** Vérifier que, réciproquement, les fonctions trouvées à la fin de l'analyse sont bien toutes les solutions de (E) et conclure.

17 Soit (E) l'équation différentielle :

$$xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0.$$

En considérant la fonction $z : x \mapsto xy(x)$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$.

18 (**Recollement**)

1) On considère l'équation différentielle

$$(E) : xy' + (x+1)y = x+1$$

   a) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
   b) L'équation (E) a-t-elle une solution sur $\mathbb{R}$?
2) Trouver toutes les solutions dérivables sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$\text{(E)} : x^3y' - 2y = 0$$

19 ★★ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y''' - y'' + y' - y = 0$.