L'usage de la calculatrice est interdit. Les raisonnements présentés devront être soigneusement justifiés et détaillés, quelques points seront dédiés à la présentation, l'orthographe et la propreté de votre copie. En particulier, ***il est IMPERATIF de souligner les résultats obtenus****. Il n'est pas nécessaire de répondre à l'ensemble des questions pour avoir une bonne note. Si vous ne parvenez pas à résoudre une question, vous pouvez admettre le résultat dans la suite de l'énoncé.Lisez bien tout le sujet avant de commencer et identifiez les parties plus simples pour vous, et commencez par ces parties. Les rappels ou théorèmes en verts au début du devoir peuvent être utilisés dans n'importe quelle partie du devoir.*

Rappel n°1 :

On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est 2 fois dérivable sur I et on note sa dérivée seconde f'' si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est également dérivable sur I, auquel cas, on a $f'' = (f')'$.
Remarque : Les variations de f' peuvent se déduire de celles de f'' tout comme celle de f peuvent se déduire de celles de f'.

Rappel n°2 : Théorème des gendarmes

Soit (u_n), (v_n),(w_n) trois suites réelles et $l \in \mathbb{R}$.
Si (u_n) et (w_n) convergent vers l et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$. Alors v_n converge vers l.

I Questions préliminaires

Dans ce devoir, j'indique par une ★ les questions plus longues ou plus difficiles que la moyenne mais qui seront également plus valorisées en terme de notation.

Exercice n° 1

1) Soit $P(x)$ et $Q(x)$ 2 prédicats dépendants de $x \in E$, donner la négation de "$\forall x \in E, \exists y \in E, P(x) \Rightarrow Q(y)$".

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, rappeler, avec des quantificateurs, la définition de :

a) f périodique.

b) f impaire

c) f bornée (on donnera 2 définitions équivalentes)

d) f monotone (on n'utilisera pas les termes croissant ou décroissant dans la définition)

e) f non monotone (on n'utilisera pas les termes croissant ou décroissant dans la définition).

3) Prouver que pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1.$$

4) Donner l'ensemble de définition, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)$. On simplifiera au maximum l'écriture de la dérivée.

Exercice n°2 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$. Soit (u_n) une suite, on dit que (u_n) vérifie l'équation (E) si :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \ (E)$$

On étudie certaines propriétés des suites vérifiant (E) :

1) Montrer que si $(u_n), (v_n)$ vérifient (E) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ alors $(\lambda u_n + \mu v_n)$ vérifie (E).

2) On appelle équation caractéristique liée à (E) l'équation $X^2 - aX - b = 0$. On regarde le cas où le discriminant Δ de ce polynôme est > 0 et on considère (r_1, r_2) les racines de ce polynôme.
Montrer que $(u_n^1) = r_1^n$ et $(u_n^2) = r_2^n$ sont solutions de (E).

3) Soit (u_n) et (v_n) 2 suites vérifiant (E) Montrer que si $u_0 = v_0$ et $u_1 = v_1$ alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n$.

Exercice n°3

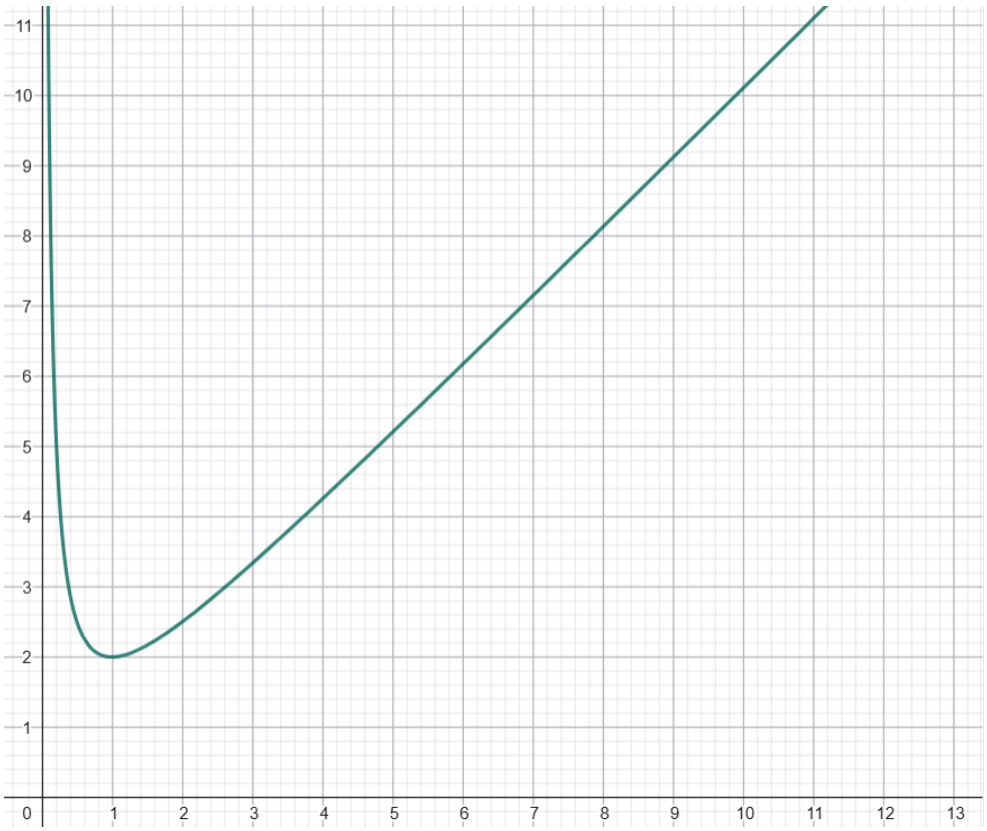
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes. On commencera systématiquement par déterminer le domaine de définition des fonctions impliquées :

1) $\frac{1}{x+1} \leqslant \sqrt{1-x}$

2) $|7-5x| \leq |2x+3|$

Exercice n°4

On donne le tracé suivant de la fonction f. En déduire le tracé de la fonction $g : x \mapsto f(2x-4)-2$. On expliquera bien toutes les étapes de la transformation, on ne demande que l'allure générale de la fonction et un placement précis du minimum de la fonction.



II Problèmes

Problème n° 1

★ Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ Etudier la fonction f et effectuer son tracé.

Attention, cette question est sur 15/18 points, elle demande de faire apparaître tous les éléments que nous avons pu voir dans l'étude de fonctions. On n'oubliera pas par exemple de regarder toutes les asymptotes possibles (il y en a 3 à regarder) qu'elles soient obliques, verticales ou horizontales.

Problème n° 2

Partie 1 : Signification de la convergence d'une suite

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que la suite (v_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon.$$

1) Dans cette question, on cherche à montrer un résultat classique de convergence :
"La suite de terme général $v_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ converge vers 0"
(**ATTENTION** : Dans cette partie 1, il faudra impérativement utiliser la définition donnée en début d'exercice, vous ne devez pas utiliser d'autres théorèmes)

a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer que :

$$0 \leq \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1} \leq \varepsilon$$

b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, v_N \leq \varepsilon$.

c) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

d) Conclure quand à la convergence de v_n.

2) On cherche à montrer par l'absurde qu'une suite (v_n) ne peut converger vers 2 limites différentes.

a) Rappeller l'inégalité triangulaire.

b) Soit (l_1, l_2) 2 réels **différents**. Soit $\varepsilon > 0$.
On suppose qu'il existe $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$

- Si $n \geq N_1, |v_n - l_1| \leq \varepsilon$
- Si $n \geq N_2, |v_n - l_2| \leq \varepsilon$.

Pour quelle valeur de $N \in \mathbb{N}$ a-t-on nécessairement :

$$n \geq N \Rightarrow |v_n - l_1| \leq \varepsilon \text{ et } |v_n - l_2| \leq \varepsilon.$$

(c) Comment peut-on interpréter graphiquement les propositons $|v_n - l_1| \leq \varepsilon$ et $|v_n - l_2| \leq \varepsilon$. Faire un tracé faisant apparaître l_1, l_2 et ε pour étayer votre propos.

d) En considérant $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$, montrer qu'il n'est pas possible que v_n admette pour limite l_1 et l_2.

Partie 2 : Etude de fonctions et de suites

On définit dans cet partie une fonction f par $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$.

1) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2) Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis sa dérivée seconde f''. On donnera l'expression la plus factorisée possible de $f''(x)$. On prouvera la dérivabilité des fonctions en jeu **AVANT** de les dériver.

3) Dresser le tableau de variations de f' sur son ensemble de définition, puis celui de f (on précisera les limites utiles).

4) Quelles asymptotes possède f ?

5) Tracer une allure de la courbe représentative de la fonction f.

6) Montrer que l'intervalle $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ est stable par la fonction f, c'est-à-dire que pour tout $x \in I, f(x) \in I$.

7) Montrer qu'il existe une constante $C \in]0,1[$ telle que, $\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant C$. On admet que cette inégalité implique la suivante : $\forall (x,y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leqslant C|y - x|$.

8) Montrer que l'équation $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ admet une seule solution réelle (sans chercher à la résoudre), et en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet également une seule solution qu'on notera l. Vérifier enfin que $l \in I$.

9) On définit désormais une suite (u_n) de la façon suivante : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$ (réutiliser les questions précédentes est vivement conseilllé).

b) Montrer que l'inégalité $|u_{n+1}-l| \leqslant C \times |u_n - l|$ est vérifiée pour tout entier naturel n.

c) En déduire que $|u_n - l| \leqslant C^n$.

d) Conclure quant a la convergence de la suite (u_n).

Problème n° 3

On donne pour cet exercice la définition suivante : une fonction f est minorée par une fonction g sur un intervalle I si $\forall x \in I, g(x) \leqslant f(x)$. Dans tout l'exercice, on posera $f(x) = \ln(1+x)$ et on va étudier certaines fonctions minorant f, ou minorées par f, sur $[0, +\infty[$.

On pose $g(x) = \frac{2x}{x+2}$ et on veut montrer que g minore f sur $[0, +\infty[$. Pour cela, on va étudier la fonction h définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.

Partie 1 : Minoration par une fonction rationnelle

1) Montrer que h dérivable et calculer la dérivée h' de la fonction h.

2) Faire le tableau de variations complet (limites incluses) de la fonction h sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

3) En déduire que la fonction f est minorée par g sur $[0, +\infty[$.

4) Montrer que les courbes représentatives des fonctions f et g admettent une tangente commune pour $x = 0$.

Partie 2 : Une famille de fonctions majorantes

Pour tout réel k, on définit une fonction f_k par $f_k(x) = \ln(1+x) - kx$.

5) Étudier les variations et les limites de $f_1 : x \mapsto \ln(1+x) - x$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

6) Montrer que la fonction identité $x \mapsto x$ est minorée par f sur $[0, +\infty[$, et en déduire plus généralement que $\forall k \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto kx$ est minorée par f.

7) On suppose désormais $k \in]0, 1[$, montrer que la dérivée de f_k s'annule alors pour $x = \frac{1-k}{k}$.

8) En déduire les variations de f_k (toujours quand $k \in]0, 1[$). On ne demande pas les limites de la fonction f_k.

9) Montrer que f_k admet un maximum sur $[0, +\infty[$. Quel est son signe ?

10) En déduire les valeurs de k pour lesquelles $x \mapsto kx$ est minorée par f.