I Questions préliminaires

Dans ce devoir, j'indique par une ★ les questions plus longues ou plus difficiles que la moyenne mais qui seront également plus valorisées en terme de notation.

Exercice n° 1

1) $\exists x \in E, \forall y \in E, P(x)$ **et** $\neg Q(y)$

2) a) $\exists T \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.

c) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$ ou $\exists (m, M) \in \rangle^2 \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$.

d) Beaucoup d'erreurs sur cette question. Pour être monotone, il faut soit être croissant, soit être décroissant, on peut donc exprimer cette proposition en utilisant les quantificateurs pour la croissance ou la décroissance :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \text{ OU } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y).$$

Il est important que le **OU** soit à cet endroit là, si on écrit

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \text{ OU } f(x) \geq f(y)$$

on n'a essentiellement rien dit.

1) Il suffit de prendre la négation de la phrase précédente en prenant bien soin d'utiliser les lois de de Morgan et la négation d'une implication :
$[\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \text{ et } f(x) > f(y)]$ ET$[\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \text{ et } f(x) < f(y)]$

3) Par la définition de la partie entière, on a pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$\lfloor a \rfloor \leq a < \lfloor a \rfloor + 1$ et $\lfloor b \rfloor \leq b < \lfloor b \rfloor + 1$. On en déduit donc :
$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq a + b < \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2$.
Par croissance de la partie entière on a donc

$$\lfloor \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor$$

Puis la partie entière d'un entier étant un entier on a donc :

$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor.$$

De plus ,$\lfloor a + b \rfloor \leq a + b < \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 2$ Si on pose $N = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$, on a donc que $\lfloor a + b \rfloor$ est un entier compris entre N et $N+2$ et strictement inférieur à $N+2$. Il ne peut donc valoir que N ou $N+1$.
Donc on a bien :

$$\boxed{\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a + b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1.}$$

4) $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ est défini pour $e^x - e^{-x} \neq 0$, ce qui revient à $x \neq 0$ (en effet, mis à part pour $x = 0$, on a ($e^x > 1$ et $e^{-x} < 1$) OU ($e^x < 1$ et $e^{-x} > 1$)).

$\ln(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}})$ est défini si $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ l'est et si $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} > 0$ ce qui revient à $x > 0$ (on peut étudier les variations de $x \mapsto e^x - e^{-x}$ pour s'en convaincre).

f est donc définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par les mêmes arguments :

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

On a pour $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{-4e^{2x}}{e^{4x} - 1} \end{aligned}$$

Donc :

$f' : x \mapsto \frac{-4e^{2x}}{e^{4x}-1}$

Exercice n°2 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq 0$. Soit (u_n) une suite, on dit que (u_n) vérifie l'équation (E) si :

$$\forall n \in \mathbb{N} u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \ (E)$$

On étudie certaines propriétés des suites vérifiant (E) :

1) Soit $(u_n), (v_n)$ vérifiant (E) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on pose $(w_n) = (\lambda u_n + \mu v_n)$ vérifie (E). On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= (\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2}) \\ &\overset{u_n \text{ et } v_n \text{ vérifient } (E)}{=} (\lambda(au_{n+1} + bu_n) + \mu(av_{n+1} + bv_n)) \\ &= a(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + b(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= aw_{n+1} + bw_n \end{aligned}$$

Donc

(w_n) vérifie (E).

2) On se contente de le montrer pour $(u_n^1) = r_1^n$ le calcul pour (u^2) est le même.
On a pour $n \in \mathbb{N}$, :

$$\begin{aligned} u_{n+2}^1 - au_{n+1} - bu_n &= r_1^{n+2} - ar_1^{n+1} - br_1^n \\ &\overset{\text{On factorise par } r_1^n}{=} r_1^n(r_1^2 - ar_1 - b) \\ &\overset{r_1 \text{ racine de } X^2 - aX - b}{=} 0 \end{aligned}$$

Donc pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+2}^1 = au_{n+1} + bu_n$. Donc :

u_1 et u_2 vérifient (E).

3) On raisonne ici par récurrence double.
Soit $P(n)$ la proposition "$u_n = v_n$.
Au rang 0 et 1 la proposition s'écrit :
"$u_0 = v_0$" et $u_1 = v_1$. Ce qui est vrai d'après l'énoncé.
On suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &\overset{(u_n) \text{ vérifie } (E)}{=} au_{n+1} + bu_n \\ &\overset{(HR)}{=} av_{n+1} + bv_n \\ &\overset{(v_n) \text{ vérifie } (E)}{=} v_{n+2} \end{aligned}$$

On a supposé la propriété vraie au rang n et $n+1$ et montré qu'elle était alors vraie au rang $n+2$, la proposition est donc héréditaire.
Par théorème de récurrence double, on a :

$$\boxed{(u_n) = (v_n)}$$

Exercice n°3

1) L'ensemble de définition est $]-\infty, 1]\backslash\{-1\}$.
Sur cet ensemble, on remarque que si $x < -1$, $\frac{1}{x+1} \leq \sqrt{1-x}$ car $\frac{1}{x+1}$ est alors négatif.
Si $x > -1$, par croissance de la fonction carrée, l'équation devient $(x+1)^2(1-x)-1 \geq 0$. Soit :

$$x(x^2 + x - 1) \geq 0.$$

L'étude de signe nous donne alors

$$\boxed{S =]-\infty, -1[\cup [0, \tfrac{\sqrt{5}-1}{2}].}$$

2) On fait une disjonction de cas selon les 3 cas suivants :
$x < \frac{-3}{2} \leq \frac{-3}{2} \leq x \leq \frac{7}{5} \leq, x > \frac{7}{5}$.
On obtient en conséquence

$$\boxed{S = [\tfrac{4}{7}, \tfrac{10}{3}]}$$

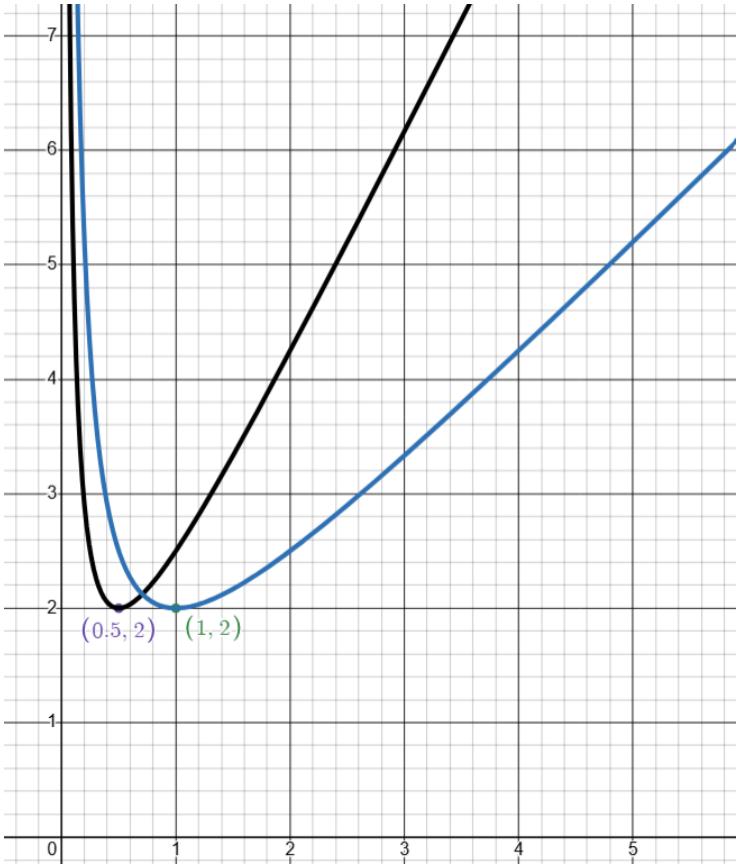
Exercice n°4

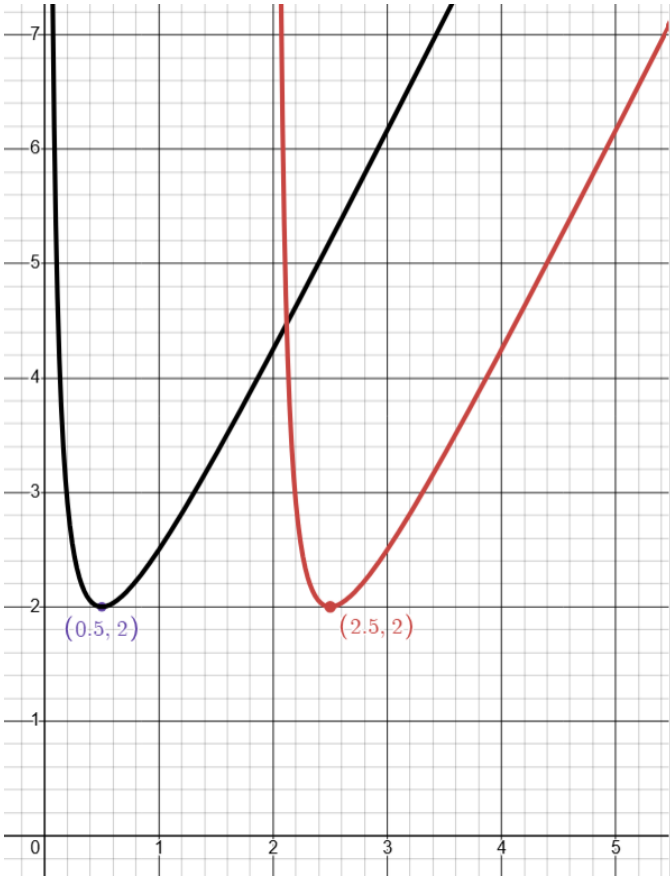
On va passer de la fonction f à la fonction f par 3 transformations successives dont on connaît les effetssur le graphique.
D'autres ordres pourrait être choisi pour les différentes transformations :

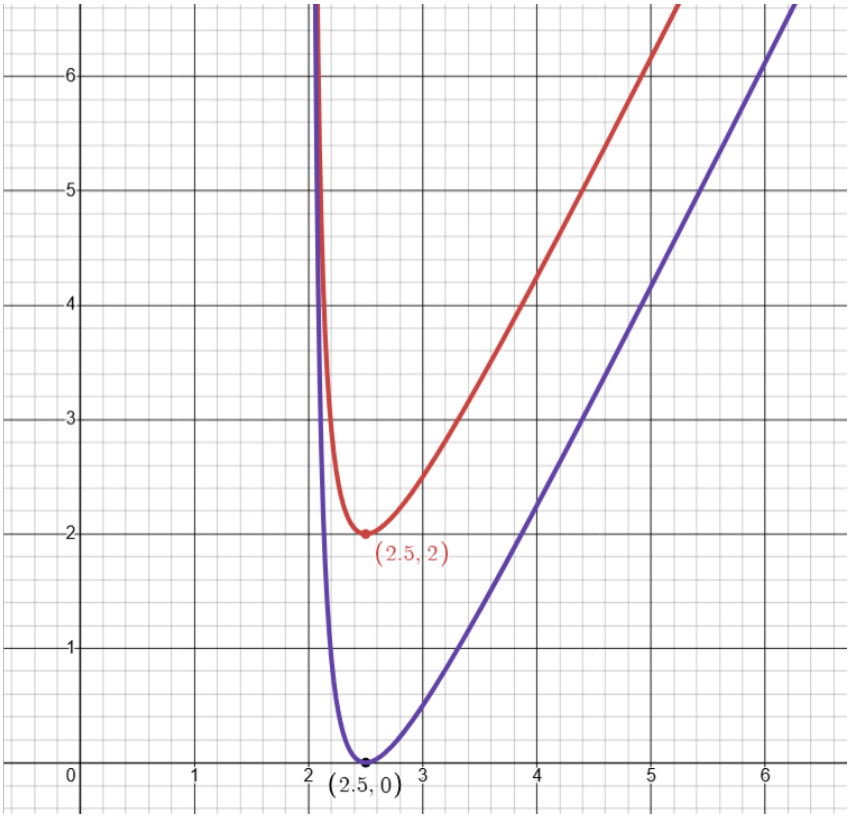
1) On pose $g_1 : x \mapsto f(2x)$. Le tracé de g_1 s'obtient à partir de celui de f en "resserant la courbe". En particulier le minimum qui est atteint en 1 (et vaut 2) pour f est atteint en $\frac{1}{2}$ pour g. On obtient donc la première transformation (g_1 en noir, f en bleu).

2) On pose $g_2 : x \mapsto g_1(x-2) = f(2(x-2)) = f(2x-4)$
Le tracé de g_2 s'obtient à partir de celui de g_2 en le décalant de 2 **vers la droite**.
De plus le minimum (qui vaut toujours 2) est atteint en 2.5.
On obtient donc la deuxième transformation (g_1 en noir, g_2 en rouge).

3) On pose $g_3 = g : x \mapsto g_2(x) - 2$.
Le tracé de g_3 (et donc de g) s'obtient en décalant le tracé de g_2 de 2 **vers le bas.**
le minimum toujours atteint en 2.5 vaut alors $2-2=0$.
On obtient donc la troisième transformation (g_2 en rouge, g_3 en violet).


(0.5, 2)
(1, 2)


(0.5, 2)
(2.5, 2)



II Problèmes

Problème n° 1

III Problèmes

Problème n° 1

On va vérifier tous les points liés à une étude de fonctions :

1) $\frac{x-1}{x+1}$ est défini si $x+1 \neq 0$, soit pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ est défini si $\frac{x-1}{x+1}$ est défini et $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$, ce qui par étude de signe nous donne $x \in]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$.
La multiplication par x ne change rien, on a donc que $D_f =]-\infty,-1[\cup[1,+\infty[$

2) Le domaine considéré n'est pas symétrique donc on n'a pas de parité/imparité. les limites en $+\infty/-\infty$ nous permettent également d'écarter une périodicité quelconque mais on n'a pas besoin de le préciser particulièrement (la périodicité se regarde plutôt pour des fonctions impliquant les fonctions trigonométriques).

3) f est dérivable sur $D_f\backslash 1$ car produit et composée de fonctions dérivables là où elles sont définies sauf pour la fonction racine qui n'est pas dérivable en 0 . On a : $\forall x \in]-\infty,-1[\bigcup]1,+\infty[, f'(x) = \frac{x^2+x-1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$ ce qui est positif sauf entre $\alpha = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} < -1$ et $\beta = -\frac{1-\sqrt{5}}{2} \in]-1,1[$. On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖		‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	m	↘	$-\infty$ ‖		‖ 0	↗	$+\infty$

4) Nous justifions le calcul des limites apparaissants sur le tableau de variation ci-dessus :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1 \text{ (On factorise par les termes de plus haut degré)}$$

De même,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

De plus, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$ et de même, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

De plus,

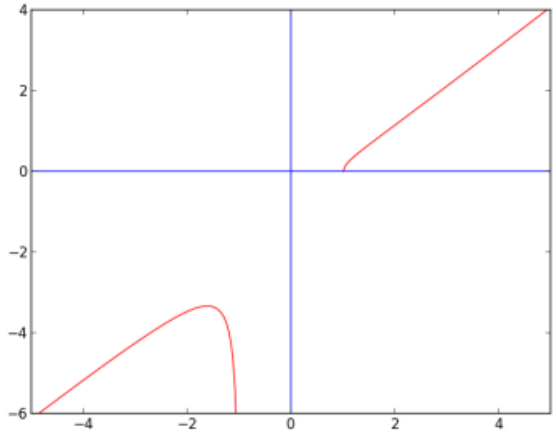
$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} (f(x)-1.x) &= \lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-1)\\ &\overset{\text{On multiplie par l'expression conjuguée}}{=} \lim_{x\to-\infty} x(\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1})\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+1}\frac{-2}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+1}\\ &= -1.\end{aligned}$$

On montre de même que $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-1.x) = -1$.

On conclut que la droite d'équation $y = x-1$ est une asymptote oblique en $-\infty$ et $+\infty$ de f.

5) Comme $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, le graphe de f admet une asymptote verticale d'équation $X = -1$.

6)



Problème n° 2

Partie 1 : Signification de la convergence d'une suite

1) a) Par définition de la fonction partie entière, on a pour $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{\varepsilon} < \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$$

En passant à l'inverse (et en gardant à l'esprit que l'inverse d'un nombre positif est toujours positif, on obtient) :

$$\boxed{0 \leq \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1} \leq \varepsilon}$$

b) Soit $\varepsilon > 0$, d'après la question précédente, en posant $N = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ qui est un nomre entier comme somme de nombres entiers, on a

$$\boxed{v_N = \frac{1}{N} = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1} \leq \varepsilon.}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < n \leq n+1$.
En passant à l'inverse, on obtien :t donc :

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}.$$

Ce qui se réécrit :

$$v_{n+1} \leq v_n.$$

On a montré cette propriété pout tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est donc bien décroissante.}}$$

d) Le théorème de la convergence monotone nous donne la convergence de la suite d'après les questions précédentes mais pas la valeur vers laquelle converge cette suite. Pour ceci il faut que nous revenions à la définition de limite proposée dans cet exercice ;
Soit > 0, d'après la question b), il existe $N \in \mathbb{N}, v_N \leq \varepsilon$. De plus par décroissance de la suite (v_n) prouvée à la question précédente, on a que pour tout $n \geq N, v_n \leq v_N \leq \varepsilon$.
On a donc montré que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |v_n - 0| \leq \epsilon$$

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge donc vers } 0.}$$

2) a) Voir cours.

b) Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ on a alors $n \geq N_1$ et $n \geq N_2$ donc on a :

$$|v_n - l_1| \leq \varepsilon \text{ et } |v_n - l_2| \leq \varepsilon.$$

Pour cette valeur de N, on a montré que :

$$\boxed{n \geq N \Rightarrow |v_n - l_1| \leq \varepsilon \text{ et } |v_n - l_2| \leq \varepsilon.}$$

c) Par l'interprétation géométrique de la valeur absolue, ces 2 propositions peuvent s'interpréter par

$$\boxed{\text{"la distance de } v_n \text{ à } l_1 \text{ est plus petite que } \varepsilon \text{ et de même pour } l_2\text{".}}$$

d) Schématiquement l'idée est la suivante : Si il me faut 3 pas pour aller de l_1 à l_2, je ne peut pas être à moins d'1 pas de l_1 et de l_2 en même temps. Formalisons ceci.
Supposons par l'absurde que (v_n) admettent pour limite l_1 et l_2. Pour $\varepsilon = \frac{|l_1-l_2|}{3}$ (qui est strictement positif car l_1 et l_2 sont différents), comme l_1 et l_2 sont des limites de v_n, on a :
Il existe $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ - Si $n \geq N_1, |v_n - l_1| \leq \varepsilon$ - Si $n \geq N_2, |v_n - l_2| \leq \varepsilon$.
D'après la question précédente,si on pose $N = \max(N_1, N_2)$, on a pour $n \geq N$,$|v_n - l_1| \leq \varepsilon$ et $|v_n - l_2| \leq \varepsilon$. Montrons que ceci n'est pas possible :
Soit $n \geq N$, par inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |(l_1 - v_n) - (l_2 - v_n)| \\ &\leq |(l_1 - v_n)| + |(l_2 - v_n)| \\ &\leq 2\varepsilon \\ &= \frac{2}{3}|l_1 - l_2|. \end{aligned}$$

En divisant par $|l_1 - l_2|$ aux 2 extrémités de cette inégalité (ce qu'on peut faire car $|l_1 - l_2| \neq 0$), on arrive donc à $1 \leq \frac{2}{3}$, ce qui est une contradiction.

Une suite ne peut donc avoir 2 limites différentes.

Partie 2 : Etude de fonctions et de suites

1) Le dénominateur de la fraction définissant f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car polynôme de degré 2 de discrimant $\Delta = 1 - 4.1.1 = -3 < 0$.

f est donc définie sur $\mathbb{R}$

2) Toutes les fonctions manipulées dans cet exercice sont des fonctions rationnelles dérivable sur tout leur ensemble de définition.
On calcule d'abord,

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$

puis en dérivant f' comme un produit,

$$f''(x) = -\frac{2}{(x^2+x+1)^2} - (2x+1) \times \frac{-2(2x+1)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{2(2x+1)^2 - 2\left(x^2+x+1\right)}{(x^2+x+1)^3} = \frac{8x^2+8x+2-2x^2-2x-2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{6x(x+1)}{(x^2+x+1)^3}.$$

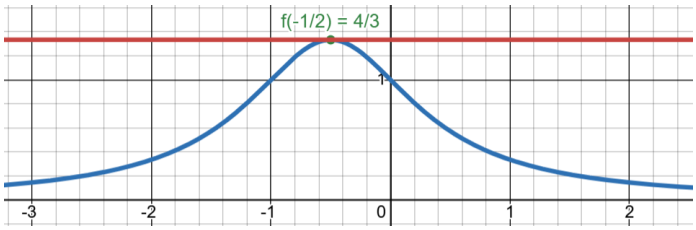
3) La dérivée seconde f'' est du signe de $x(x+1)$ (le dénominateur est toujours du signe de x^2+x+1, donc positif), donc négative uniquement entre -1 et 0 .
Les seules limites à calculer sont celles en $-\infty$ et en $+\infty$ qui sont toutes les deux nulles, pour f' comme pour f, car on un quotient de polynômes dont le dénominateur est de degré strictement plus grand que le numérateur.
Reste à calculer $f'(0) = -1$ et $f'(-1) = 1$ pour compléter le tableau de variations de f' :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	0	↗	1	↘	-1	↗	0

La dérivée f' est du signe de $-(2x+1)$ et s'annule en particulier pour $x=-\frac{1}{2}$. On a déjà précisé les limites de f, il ne reste plus qu'à calculer l'or donnée du maximum $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{4}{7}$.

x	$-\infty$	$\frac{-1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	0	$\frac{4}{7}$	0

4) On se contentera d'indiquer la tangente horizontale au maximum sur la courbe ainsi que les valeurs remarquables (voir figure ci-dessus)



5) Par décroissance de la fonction f sur $[0,+\infty[$, si $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$, alors $f(1)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)$. Comme $f(1)=\frac{1}{3}$ et $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1}=\frac{9}{13}<1$, on obtient bien $\frac{1}{3}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

L'intervalle I est donc stable par f.

6) La dérivée f' est strictement croissante et négative sur l'intervalle I, la valeur maximale atteinte par $|g'|$ sur cet intervalle est donc $\left|g'\left(\frac{1}{3}\right)\right|=\frac{\frac{2}{3}+1}{\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1\right)^2}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{169}{81}}=\frac{135}{169}$. On peut en déduire que

$$\forall x\in I, |g'(x)|\leqslant C, \text{ avec } C=\frac{135}{169}\in\left]0,1\right[.$$

7) La fonction $z: x\mapsto x^3+x^2+x+1$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et, $\forall x\in\mathbb{R}, z'(x)=3x^2+2x+1$.

Le discriminant de cette dérivée est $\Delta=4-12<0$, donc z' est toujours positive et z strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\lim_{x\to-\infty} z(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} z(x)=+\infty$, la fonction z est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, l'équation $z(x)=0$ admet une unique solution.

Or, $z(x)=0\iff x^3+x^2+x=1\iff x\left(x^2+x+x\right)=1\iff x=f(x)$, ce qui prouve que cette unique solution est également l'unique solution de l'équation $f(x)=x$.

En posant $g(x)=f(x)-x$, la fonction g est continue et vérifie $g\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}=\frac{9}{13}-\frac{1}{3}=\frac{14}{39}>0$ et $g(1)=f(1)-1=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}<0$, le théorème des valeurs intermédiaires assure donc que la fonction g s'annule (au moins) une fois dans l'intervalle I. Comme on sait déjà que g s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$ tout entier, la valeur d'annulation l de la fonction g appartient nécessairement à l'intervalle I.

$f(x)=x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ et cette solution se trouve dans I.

8) a) On raisonne par récurrence : $u_0\in I$ par définition, et $u_n\in I\Rightarrow f(u_n)\in I$ d'après la question 5 . Comme $f(u_n)=u_{n+1}$, cela prouve l'hérédité, et la propriété $'u_n\in I\gg$ est donc vérifiée pour tout entier naturel n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I}$$

b) Puisqu'on sait que $l \in I$ et $u_n \in I$, il suffit d'appliquer l'inégalité dans la question 6 à $x = l$ (qui vérifie bien $f(x) = f(l) = l$) et à $y = u_n$, pour lequel $f(y) = f(u_n) = u_{n+1}$. On trouve immédiatement l'inég alité souhaitée :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| \leqslant C \times |u_n - l|}$$

c) C'est une récurrence tout à fait classique exploitant les questions précédentes : puisque $l \in I$, $|u_0 - l| = |1 - l| \leqslant \frac{2}{3}$, ce qui prouve largement l'initialisation au rang 0 (on doit prouver que $|u_0 - l| \leqslant C^0 = 1$). Ensuite, si on suppose $|u_n - l| \leqslant C^n$, on en déduira $|u_{n+1} - l| \leqslant C\,|u_n - l| \leqslant C \times C^n = C^{n+1}$ en appliquant successivement le résultat de la question précédent et l'hypothèse de récurrence. Ceci achève de prouver l'hérédité.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leqslant C^n \times |u_0 - l|}$$

d) On sait que $0 \leqslant |u_n - l| \leqslant C^n$, avec $\lim_{n\to+\infty} C^n = 0$ (suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1). D'après le théorème des gendarmes, on aura donc $\lim_{n\to+\infty} |u_n - l| = 0$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = l.}$$

e) Pour obtenir une valeur approchée à 10^{-3} près de l, il faut trouver un réel x tel que $|x - u_n| \leqslant 10^{-3}$. Les questions précédentes prouvent que ce sera le cas du réel u_n si $C^n \leqslant 10^{-3}$ (et même probablement avant car on a une simple majoration et non une égalité). Cette dernière condition est vérifiée si $n\ln(C) \leqslant -3\ln(10)$, soit

$$\boxed{n \geqslant \frac{-3\ln(10)}{\ln(C)}}$$

(attention au changement de sens des inégalités, comme $C \in]0,1[, \ln(C) < 0$). Si on avait une calculatrice sous la main, on pourrait calculer la valeur de $n_0 = \text{Ent}\left(\frac{-3\ln(10)}{\ln(C)}\right) + 1$ (l'ajout d'une unité assure que le nombre entier obtenu est supérieur à la borne souhaitée), puis la valeur de u_{n_0} qui fournira la valeur approchée demandée.

Problème n° 3

Partie 1 : Minoration par une fonction rationnelle

1) La fonction h est définie et dérivable sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ (intervalle de définition de f) comme somme de fonctions usuelles dérivables.
$\forall x > -1, h'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{2(x+2)-2x}{(x+2)^2} = \frac{1}{1+x} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2-4(1+x)}{(1+x)(x+2)^2}$. Le numérateur se simplifie merveilleusement bien : $(x+2)^2 - 4(1+x) = x^2 + 4x + 4 - 4 - 4x = x^2$, on obtient finalement

$$\boxed{h'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(x+2)^2}.}$$

2) L'expression obtenue est manifestement positive sur tout l'intervalle $[\,0,+\infty[$, la fonction h y est donc croissante.
De plus, $h(0) = \ln(1) - 0 = 0$, et $\lim_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ (pas de difficulté ici, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$ en utilisant le quotient des termes de plus haut degré). On peut donc dresser le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$h(x)$	0 ↗	$+\infty$

3) Les variations de h et la valeur calculée pour $h(0)$ prouvent que h reste positive sur tout l'intervalle $[0,+\infty[$, ce qui signifie bien que, $\forall x \geqslant 0, f(x) \geqslant g(x)$.

La fonction g minore donc f sur $[0,+\infty[$.

4) On sait déjà que $f(0) = g(0) = 0$. Calculons maintenant les valeurs des dérivées en 0 . Comme $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et $g'(x) = \frac{4}{(x+2)^2}$ (cf calcul de la dérivée de h), on constate que $f'(0) = g'(0) = 1$.

Les deux courbes ont une tangente commune d'équation $y = x$ en 0.

Partie 2 : Une famille de fonctions majorantes

5) La fonction f_1 est certainement dérivable sur $\mathbb{R}^+$et, $\forall x \geqslant 0, f_1'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$. Cette dérivée étant négative sur $\mathbb{R}^+$, la fonction f_1 y sera décroissante. On calcule facilement $f_1(0) = 0$, mais la limite en $+\infty$ est plus problématique : $f_1(x) = x\left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1\right)$, et il faut connaitre le résultat de croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ pour pouvoir conclure que $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -\infty$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$
$f(x)$	0 ↘	$-\infty$

6) Les calculs de la question précédente montrent que f_1 est négative sur $\mathbb{R}$, donc que, $\forall x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$. Bien entendu, si cette majoration est vrai, on aura a fortiori $\ln(1+x) \leqslant kx$ pour tout réel $k \geqslant 1$ puisque $x \leqslant kx$ lorsque x est positif.

Toutes les fonctions $x \mapsto kx$ avec $k \geqslant 1$ sont donc minorée par f.

7) Le calcul de dérivée est pratiquement le même que précédemment : $f_k'(x) = \frac{1}{1+x} - k = \frac{1-k-kx}{1+x}$. Cette dérivée s'annule effectivement lorsque $kx = 1-k$, donc pour $x = \frac{1-k}{k}$, qui est bien une valeur positive lorsque $k \in]0,1[$.

$f_k'(\frac{1-k}{k}) = 0$

8) Le coefficient directeur du numérateur de f_k' étant négatif, la dérivée sera positive sur l'intervalle $\left[0, \frac{1-k}{k}\right]$ et négative sur l'intervalle $\left[\frac{1-k}{k}, +\infty\right[$. On peut donc dresser le tableau suivant :

x	0	$\frac{1-k}{k}$	$+\infty$
$f'(x)$	1-k	$-$	
$f(x)$	0	m	$-\infty$

La limite en $+\infty$ reste égale à $-\infty$, mais comme le demandait l'énoncé, on ne la détaillera pas.

9) Inutile de chercher à calculer la valeur précise du maximum m, le fait que $f_k(0) = 0$ et la croissance de f_k sur $\left[0, \frac{1-k}{k}\right]$ suffisent à affirmer que :

$$\boxed{m > 0}$$

10) Les calculs précédents prouvent que f_k ne garde pas un signe négatif sur $\mathbb{R}^+$quand $k \in]0,1[$, et donc que $x \mapsto kx$ ne majore pas f dans ce cas. C'est bien sûr encore moins le cas si $k \leqslant 0$ puisque la fonction f_k est alors positive sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$. En conclusion,

$$\boxed{f \text{ minore } x \mapsto kx \text{ si et seulement si } k \geqslant 1.}$$