Devoir maison n°2 (Pour le Mardi 03/11)

Le devoir maison est à effectuer seul ou en binôme, sans utilisation d'aide extérieure. Vous pouvez me poser des question si vous bloquez et avez besoin de pistes mais ne le faites qu'après avoir essayé des choses vous mêmes. Le devoir est à rendre sur COPIE DOUBLE.

Problème n° 1

(Changement de phase sin et cos)

1) Soit $X \in \mathbb{R}$,$(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$.On note $N(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}$.

a) Montrer que le point $M = (\frac{a}{N(a,b)}, \frac{b}{N(a,b)})$ est un point du cercle trigonométrique. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(c) = \frac{a}{N(a,b)}$ et $\sin(c) = \frac{b}{N(a,b)}$.

b) Trouver un tel point c pour $a = -2$ et $b = 2$ puis pour $a = 6$ et $b = \sqrt{12}$.

c) Montrer que si $c \in \mathbb{R}$ est tel que $\cos(c) = \frac{a}{N(a,b)}$ et $\sin(c) = \frac{b}{N(a,b)}$, alors :

$$a\cos(X) + b\sin(X) = N(a,b)\cos(X-c).$$

Applications :

2) Déterminer le maximum et le minimum de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) + \sqrt{6}.$$

3) Déterminer les solutions de l'équation définie sur $\mathbb{R}$ par $\sqrt{3}\cos(x) - 3\sin(x) - 3 = 0$.

4) Pour quelles valeurs de $x \in [-\pi, \pi]$, $\frac{3\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)+\sqrt{6}}{\sqrt{3}\cos(x)-3\sin(x)-3}$ est-il bien défini ? Etudier le signe de cette expression sur $[-\pi,\pi]$ quand elle est bien définie. (On pourra utiliser que pour tout $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$).

Problème n° 2

(Complexes et trigonométrie)

On définit la fonction polynomiale $P : z \mapsto \frac{1}{2i}\left((z+i)^5 - (z-i)^5\right)$.

1) a) Démontrer que résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ revient à résoudre l'équation $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$.

b) En déduire toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$. On les simplifiera avec la technique de l'angle moitié.

2) a) En développant, démontrer que $P : z \mapsto 5z^4 - 10z^2 + 1$.

b) Trouver les racines de P par une autre méthode que celle de la question 1 .

3) On définit la fonction cotan : $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Démontrer que $\text{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right) > 1$.

b) Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\text{cotan}\left(\frac{\pi}{5}\right)$ (Prendre le temps de bien réfléchir et justifier).

Problème n° 3

(Des complexes bien cachés)

Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 0[3]}}^{n} \binom{n}{p} = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \tag{1}$$

.

1) On redonne la définition suivante :

(Rappels sur les congruences entières :)

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $l \in \{0,1,\cdots,b-1\}$. On dit que $a \equiv l[b]$ si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = kb + l$.

Par exemple $7 \equiv 1[3]$ car $7 = k*3+1$ pour $k=2$.

a) Montrer que $12 \equiv 2[5]$, que $27 \equiv 0[9]$ et trouver $l \in \mathbb{N}$ tel que $29 \equiv l[3]$.

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2, l \in \{0,1,\cdots,b-1\}$ et soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^b = 1$. Montrer que $a \equiv l[b] \Rightarrow z^a = z^l$. Que vaut alors z^a quand $a \equiv 0[b]$?

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \sum_{\substack{p=0 \\ p\equiv 0[3]}}^{n} \binom{n}{p}$$

a) Donner les solutions complexes de $z^3 = 1$. On nommera z_1, z_2 et z_3 ces solutions.

b) Montrer que pour tout $m \in [\![1,3]\!]$, $S_n = S_{n,m}$ où $S_{n,m} = \sum_{\substack{p=0 \\ p\equiv 0[3]}}^{n} \binom{n}{p} z_m^p$.

c) Donner la valeur de $z_1+z_2+z_3$ puis montrer que $z_1^2+z_2^2+z_3^2 = z_1+z_2+z_3$. En déduire la valeur de $z_1^a+z_2^a+z_3^a$ pour $a \equiv 1[3]$ ou $a \equiv 2[3]$.

d) Pour $m \in [\![1,3]\!]$ on pose $S'_{n,m} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z_m^p$. On admettra que :

$$S'_{n,m} = \sum_{\substack{p=0 \\ p\equiv 0[3]}}^{n} \binom{n}{p} z_m^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p\equiv 1[3]}}^{n} \binom{n}{p} z_m^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p\equiv 2[3]}}^{n} \binom{n}{p} z_m^p.$$

(Il s'agit en fait d'une relation de Chasles qui au lieu de séparer pair/impair sépare selon les 3 congruences possibles d'un entier modulo 3)

Montrer que $S'_{n,1} + S'_{n,2} + S'_{n,3} = S_{n,1} + S_{n,2} + S_{n,3}$.

d) Calculer $S'_{n,m}$ pour $m \in [\![1,3]\!]$ puis en déduire l'équation (1).

Problème n° 4

(Exercice BONUS (facultatif) pour s'entraîner sur les racines n-ièmes de l'unité) :

Soit $u = e^{\frac{2i\pi}{11}}$. On pose :

$$S = u + u^3 + u^4 + u^5 + u^9 \text{ et } T = u^2 + u^6 + u^7 + u^8 + u^{10}$$

1) Justifier que $u^{11} = 1$ et $\bar{u} = \frac{1}{u}$.

2) En déduire que S et T sont conjugués.

3) Démontrer que $S+T = -1$ et $S \times T = 3$.

4) En déduire les valeurs de S et T.

5) On rappelle que par définition : $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{11}\right)}$.

6) a) Démontrer que :

$$i\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) = \frac{u^3-1}{u^3+1} = -\sum_{k=1}^{10}\left(-u^3\right)^k$$

b) Démontrer que : $4i\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = 2\left(u-u^{10}\right)$.

c) En déduire que : $\tan\left(\frac{3\pi}{11}\right) + 4\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right) = i(T-S) = \sqrt{11}$.