TD 9 : Ensembles et applications

En l'absence de précisions, E et F désignent des ensembles.

Ensembles

1 Décrire en extension et en compréhension les ensembles suivants, si cela est possible :

1) Les entiers naturels impairs.
2) L'ensemble des puissances de 10 .
3) L'ensemble des nombres rationnels.
4) L'intervalle $]0,1]$.
5) L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ positives ;
6) L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui s'annulent sur $[0;1]$
7) L'ensemble des valeurs prises par une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
8) L'ensemble des antécédents d'un réel fixé y par une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2 Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble, lesquelles de ces propositions sont correctes ?

1) $a \in E$
2) $a \subset E$
3) $\{a\} \in E$
4) $\{a\} \subset E$
5) $\emptyset \subset E$
6) $\emptyset \in E$
7) $\{\emptyset\} \subset E$
8) $\{\emptyset\} \in E$

3 Soit $E = \{a\}$.

1) Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.
2) Même question pour $E = \{a; b\}$.

4 Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.

5 Étant données A, B et C trois parties de E, justifier les équivalences suivantes :

1) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$.
2) $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.
3) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

6 Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :

1)
$$A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$$

2) Étant données A et B deux parties de E, justifier que :
$$\bar{A} \backslash \bar{B} = B \backslash A$$

7 Soient A et B deux parties de E. Résoudre l'équation $A \cup X = B$ d'inconnue X une partie de E.

8

1) Montrer que $E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
2) Établir que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
3) Est-il vrai que $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?

9 Soient E et F deux ensembles et A et B des sous-ensembles de E et F respectivement.
Donner le complémentaire de $A \times B$ (dans $E \times F$) en fonction des complémentaires de A et B.

10 Soient E et F deux ensembles, A_1, A_2 des parties de E et B_1, B_2 des parties de F.

1) Montrer que :
$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$$

2) Montrer que :
$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$$

3) Est-il vrai que :
$$(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$$

11 Soit E un ensemble, et soit A, B et C des parties de E. On note

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B).$$

On dit que $A \triangle B$ est la différence symétrique de A et B.

1) Calculer $E \Delta A, \emptyset \Delta A, A \Delta A$ et $(E \backslash A) \Delta A$.
2) Montrer que $(E \backslash A) \Delta (E \backslash B) = A \Delta B$.
3) Montrer que $(A = B) \Leftrightarrow (A \cup B = A \cap B) \Leftrightarrow (A \triangle B = \emptyset)$.
4) Montrer que $A \Delta B = A \triangle C$ si et seulement si $B = C$.
5) Montrer que $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.
6) Montrer que $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$.

Applications

12 Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1) $\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x^2+1} \end{aligned}$
2) $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(x, y) \mapsto (x + y, x - y)$
3) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$
4) $\begin{aligned} f_4 : \mathbb{C} &\to \mathbb{C}^* \\ z &\mapsto e^z \end{aligned}$
5) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto x + \frac{1}{x^2+1}$
6) $f_6 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \backslash \{1\} \to \mathbb{Q}$ $(p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$

13 Soient $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ les applications définies par :

$$f(k) = 2k \text{ et } g(k) = \begin{cases} k/2 & \text{si } k \text{ pair} \\ \frac{k-1}{2} & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

1) Etudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f et g.
2) Préciser les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ et étudier leur injectivité, surjectivité et bijectivité.

14 Soit $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos(x) \end{aligned}$. Déterminer :

1) $f(\mathbb{R})$;
2) $f\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$;
3) $f\left(\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]\right)$;
4) $f(]\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}[)$;
5) $f^{-1}\left(\left\{\frac{1}{2}\right\}\right)$;
6) $f^{-1}([2; 3])$;
7) $f([0; \pi])$;
8) $f^{-1}(\{1\})$;
9) $f^{-1}([-1; 1])$;
10) $f^{-1}(]0; 3])$

15 On considère $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

1) L'application f est-elle injective ?
2) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$.
3) Déterminer $f^{-1}(\{1\})$.
4) Déterminer $f^{-1}(\{2\})$.
5) L'application est-elle surjective ?

16 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{3x-1}{x-2}$.

1) Montrer qu'il existe un unique réel, noté a, n'ayant pas d'image par f.
2) Montrer qu'il existe un unique réel, noté b, n'ayant pas d'antécédent par f.
3) Montrer que la restriction, g, de f à $\mathbb{R} \backslash \{a\}$ au départ et $\mathbb{R} \backslash \{b\}$ à l'arrivée est une bijection et préciser g^{-1}.

17 Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Établir les implications suivantes :

1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
3) $g \circ f$ injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective.
4) $g \circ f$ surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective.

18

1) Soit E un ensemble et A, B et C trois sous-ensembles de E. Exprimer $\mathbb{1}_{A \cup B \cup C}$.
2) Soit E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. Écrire $(\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$ comme fonction indicatrice.
3) Traiter les questions de l'exercice à l'aide de fonctions indicatrices.

19

1) Soit A, B, F trois ensembles non vides, et soit $f \in \mathcal{F}(A,F)$ et $g \in \mathcal{F}(B,F)$ deux bijections. On suppose que A et B sont disjoints. Montrer que le recollement $h : A \cup B \to F$ de f et g (i.e ; $h : x \mapsto f(x)$ si $x \in A$, $g(x)$ si $x \in B$) est une bijection si et seulement si $f(A) \cap g(B) = \emptyset$.
2) En déduire que $f : [0;1] \to [0;1]$ est une bijection.

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \in \left[0; \frac{2}{3}\right[\\ 2x-1 & \text{si } x \in \left[\frac{2}{3}; 1\right] \end{cases}$$

.

20 ★★ Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que fofof $= f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

21 Soit $f : E \to F$ une application.

1) Montrer que :
$$\forall A \in \mathcal{P}(E), A \subset f^{-1}(f(A))$$
2) Montrer que :
$$\forall B \in \mathcal{P}(F), f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$$

22

Soit $(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$. On considère l'application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$
$$X \longmapsto (X \cap A, X \cap B).$$

Montrer que f est injective si, et seulement si, $A \cup B = E$. Montrer que f est surjective si, et seulement si, $A \cap B = \square$. Dans le cas où f est bijective, expliciter f^{-1}.

23 Soit $f : (p,q) \in \mathbb{N}^2 \mapsto p+q$. Déterminer :

1) $f(\mathbb{N} \times \{0\})$;
2) $f^{-1}(\{4\})$;
3) $f(2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N})$;
4) $f^{-1}(2\mathbb{N})$

24 Soit E et F deux ensembles, soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$, et soit $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que :
$$f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.$$

25 Soit E et F deux ensembles non vides, et $f \in \mathcal{F}(E,F)$.

1) Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$.
2) Montrer que f est surjective si et seulement si : $\forall B \subset F, f\left(f^{-1}(B)\right) = B$.
On définit une fonction $\Phi_f \in \mathcal{F}(\mathcal{P}(F), \mathcal{P}(E))$ par :
$$\forall Y \in \mathcal{P}(F), \Phi_f(Y) = \{x \in E \mid f(x) \in Y\}.$$
3) Montrer que f est injective si et seulement si Φ_f est surjective.
4) Montrer que f est surjective si et seulement si Φ_f est injective.

26 ★★

1) Donner un exemple de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'ayant aucun point fixe.
2) Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non monotone.
3) Donner un exemple de bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$.

27 ★★★ Soit E un ensemble. Montrer que E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas en bijection.Si φ est une telle bijection, on pourra considérer $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$