TD 6 : Fonctions usuelles (Corrigé des questions non traitées en TD)

3 2) Pour $E=\{a;b\}$, on a $P(E)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$ et on a donc :

$$P(P(E))=\begin{cases}\emptyset & \text{Parties à 0 élément}\\ \{\emptyset\},\{\{a\}\},\{\{b\}\},\{\{a,b\}\} & \text{Parties à 1 élément}\\ \{\{a\},\{b\}\},\{\{a\},\{\emptyset\}\},\{\{b\},\{\emptyset\}\} & \\ \{\{a\},\{a,b\}\}\},\{\{b\},\{a,b\}\}\},\{\{\emptyset\},\{a,b\}\} & \text{Parties à 2 éléments}\\ \{\{a\},\{b\},\{\emptyset\}\},\{\{a\},\{\emptyset\},\{a,b\}\}, & \\ \{\{b\},\{\emptyset\},\{a,b\}\},\{\{b\},\{a\},\{a,b\}\} & \text{Parties à 3 éléments}\\ \{\{a\},\{b\},\{\emptyset\},\{a,b\}\} & \text{Parties à 4 éléments}\end{cases}$$

6 2) Ici on peut raisonner avec les relations sur les opérations entre ensembles ou par double inclusion. Commençons par les relations :

$$\bar{A}\backslash\bar{B}=\bar{A}\cap\bar{\bar{B}}=\bar{A}\cap=B\cap\bar{A}=B\backslash A.$$

Maintenant, faisons le par double inclusion :
Soit $x\in\bar{A}\backslash\bar{B}$, x n'appartient pas à $\bar{B}$ donc $x\in B$. De plus $x\in\bar{A}$ donc $x\notin A$. Donc $x\in B\backslash A$.
Réciproquement, si $x\in B\backslash A$, $x\in B$ donc $x\notin\bar{b}$ et $x\notin A$ donc $x\in\bar{A}$. Donc $x\in\bar{A}\backslash\bar{B}$.
Par double inclusion, on obtient bien l'égalité.

8

1) On raisonne par double inmplication :
($\Rightarrow$) On suppose que $E\subset F$, soit $A\in P(E)$, on a que $A\subset E$ (par définition de l'ensemble des parties d'un ensemble) et $E\subset F$ donc $A\subset F$ donc $A\in P(F)$. Donc $\mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F)$, ce qui prouve la première implication.
($\Leftarrow$) On suppose maintenant que $\mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F)$. Soit $x\in E,\{x\}\in P(E)$ et $P(E)\subset P(F)$ donc $\{x\}\in P(F)$ donc $x\in F$. Donc $E\subset F$ ce qui prouve l'implication réciproque.
Par double implication on a : $E\subset F\Longleftrightarrow\mathcal{P}(E)\subset\mathcal{P}(F)$.

2) On veut établir l'égalité de deux ensembles, on raisonne par double inclusion :
($\subset$) Soit $A\in P(E\cap F)$. Par définition de l'ensemble des parties, $A\subset E\cap F$ et comme $E\cap F\subset E$ et $E\cap F\subset F$, on a que $A\subset E$ et $A\subset F$ donc $A\in P(E)$ et $A\in P(F)$ donc $A\in P(E)\cap P(F)$. Donc $\mathcal{P}(E\cap F)\subset\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)$.
($\supset$) Soit $A\in\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)$, $A\in\mathcal{P}(E)$ donc $A\subset E$ et $A\in\mathcal{P}(F)$ donc $A\subset F$. Donc $A\subset E\cap F$ donc $A\in\mathcal{P}(E\cap F)$. Donc $\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)\subset\mathcal{P}(E\cap F)$.
Par double inclusion, $\mathcal{P}(E)\cap\mathcal{P}(F)=\mathcal{P}(E\cap F)$.

3) Ici on va chercher un contre-exemple (La difficulté de ce type d'exercices est d'identifier si on veut prouver une chose ou son contraire. Si vous ne savez pas, tentez une option et si ça ne marche pas, passez à l'autre.)
Posons $E=\{1\}$ et $F=\{2\}$. $\{1,2\}\subset E\cup F$ donc $\{1,2\}\in P(E\cup F)$ mais $\{1,2\}\notin P(E)$ et $\{1,2\}\notin P(F)$ donc $\{1,2\}\notin P(E)\cup P(F)$.
On a un élement qui est dans $\mathcal{P}(E\cup F)$ mais pas dans $\mathcal{P}(E)\cup\mathcal{P}(F)$ donc les 2 ensembles ne sont pas égaux.

9

$$\begin{aligned}A\bar{\times}B&=\{(x,y)\in E\times F,(x,y)\notin A\times B\}\\&=\{(x,y)\in E\times F,x\notin A\text{ ou }y\notin B.\}\\&=\{(x,y),x\in\bar{A}\text{ ou }y\in\bar{B}.\}\\&=\bar{A}\times F\cup E\times\bar{B}.\end{aligned}$$

(Note : On pourrait un peu plus justifier les étapes intermédiaires. Si vous avez trouvé que la réponse est $\bar{A}\times F\cup E\times\bar{B}$. vous pouvez prouver ensuite que $\bar{A}\times F\cup E\times\bar{B}=A\bar{\times}B$ par double inclusion).

23

1) Soit $(p,q)\in\mathbb{N}\times\{0\}$, on a donc $p\in\mathbb{N}$ et $q=0$ donc $f(p,q)=p\in\mathbb{N}$. Donc $f(\mathbb{N}\times\{0\})\subset\mathbb{N}$. De plus, $\forall n\in\mathbb{N},f(n,0)=n$ donc $\mathbb{N}\subset f(\mathbb{N}\times\{0\})$. Donc $f(\mathbb{N}\times\{0\})=\mathbb{N}$.

2) Soit$(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$(p,q) \in f^{-1}(\{4\}) \Leftrightarrow f(p,q) = 4 \Leftrightarrow p+q=4 \Leftrightarrow (p,q) \in \{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1)(4,0)\}$$

Donc $f^{-1}(\{4\}) = \{(0,4),(1,3),(2,2),(3,1)(4,0)\}$

3) Soit $(p,q) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$. On a $p = 2k, k \in \mathbb{N} etq = 2m, m \in \mathbb{N}$. Donc $f(p,q) = 2(k+m) \in 2\mathbb{N}$.

On a donc que $f(2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}) \in 2\mathbb{N}$, montrons que $2\mathbb{N} \in f(2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N})$. Soit $l, \in 2\mathbb{N}, l = 2k, k \in \mathbb{N}$. On a alors $(0,2k) \in 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$ et $f(0,2k) = 2k = l$ donc $2\mathbb{N} \in f(2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N})$.

Donc $f(2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}) = 2\mathbb{N}$.

4) Soit$(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a :

$$(p,q) \in f^{-1}(2\mathbb{N}) \Leftrightarrow f(p,q) \in 2\mathbb{N} \Leftrightarrow p+q \in 2\mathbb{N} \Leftrightarrow p \text{ et } q \text{ ont même parité.}$$

Donc Si on note I l'ensemble des entiers naturels impairs, on a que $f^{-1}(2\mathbb{N}) = I \times I \cup 2\mathbb{N} \times 2\mathbb{N}$.