

## TD 1 : SOMMES ET PRODUITS

♡ = Exercice thématique, ★ = Niveau de difficulté,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$

### Sommés simples

1 ♡ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Calculer les sommes suivantes :

1) $A_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n \times (n+1)$	3) $C_n = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n+1)^2$
2) $B_n = 1 \times n + 2 \times (n-1) + \dots + n \times 1$	4) $D_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

2 ♡ Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer la somme  $S_n$  des  $n$  premiers entiers impairs.

3 Montrer que la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$  est strictement croissante.

4 ♡★ Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=3}^{n-1} q^k$ où $n \geq 3$ et $q \in \mathbb{K}$	9) $\sum_{k=0}^n 2^k 3^{n-k}$ où $n \in \mathbb{N}$
2) $\sum_{k=1}^{100} (2a^{3k+1} + 2)$ où $a \in \mathbb{K}$	10) $S = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2$ où $n \in \mathbb{N}^*$ . On pourra calculer $S + \sum_{k=1}^n k^2$ .
3) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ où $n \in \mathbb{N}$	11) $\sum_{k=1}^n (-1)^k k$ où $n \in \mathbb{N}^*$ .
4) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ .	12) $\sum_{k=1}^n k 2^k$ où $n \in \mathbb{N}$ .
5) $\sum_{k=0}^n k \times k!$ où $n \in \mathbb{N}$ .	13) $\sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ où $n \in \mathbb{N}^*$ . On pourra effectuer un renversement de la somme.
6) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$ où $n \in \mathbb{N}^*$	14) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ .
7) $\sum_{k=1}^n k(n+1-k)$ où $n \in \mathbb{N}^*$	
8) $\sum_{k=0}^n kq^k$ où $q \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$	

5 ♡★ Pour  $a \in \mathbb{N}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $S_a(n) = \sum_{k=1}^n k^a$ .

- 1) En considérant  $\sum_{k=1}^n (k+1)^2 - \sum_{k=1}^n k^2$ , démontrer que  $S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ .
- 2) Utiliser la même méthode pour déterminer  $S_2(n)$  puis  $S_3(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

6 ♡★ Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .

1) Déterminer  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u_k = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

2) En déduire la valeur de  $\sum_{k=1}^n u_k$  où  $n \in \mathbb{N}^*$ .

7 ★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que 3 divise  $2^n + 1$  si et seulement si  $n$  est impair.

### Sommés doubles

8 ♡★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer les sommes doubles suivantes.

5) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} i$	5) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$
2) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} i$	6) $\sum_{1 \leq i, j \leq n}  i - j $
3) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)$	7) $\sum_{l=1}^n \sum_{k=l+1}^n \frac{l}{k}$
4) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)^2$	8) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$

9 Soient  $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , calculer  $S = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^m \binom{n}{p} k^p$ .

### Produits et factoriels

10 (Rajout sur les sommes doubles(1)).

Soit  $(a_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$  une suite double de nombres réels. Soit  $n$  et  $m$  deux entiers naturels. Intervertir les sommes doubles suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 1) S_1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j}; & 3) S_3 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^m a_{i,j} \text{ où on a sup-} \\ 2) S_2 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} a_{i,j}; & \text{posé } n \leq m. \end{array}$$

11 (Rajout sur les sommes doubles(2))

Calculer

$\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij$  en l'exprimant sous la forme d'un produit de sommes simples.

12 ♡ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer à l'aide de nombres factoriels les produits suivants :

$$\begin{array}{l|l} 1) 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n) & 3) \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \\ 2) 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1). & \end{array}$$

13 ♡ Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} 1) \frac{(2n+3)!}{(2n-1)!}; & 3) \frac{(n+1)!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!}; \\ 2) \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n+1)!}; & 4) \frac{(2n)!}{2^n n!}. \end{array}$$

14 ★ Calculer les produits suivants :

$$\begin{array}{l|l} 1) \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) & 3) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right). \\ 2) \prod_{k=1}^n q^k \text{ avec } q \in \mathbb{K} & \end{array}$$

15 ♡★★

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $\prod_{1 \leq k \leq n} (n+k)$  à l'aide de  $n!$  et  $(2n)!$ .
- Montrer par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{1 \leq k \leq n} (4k-2) = \prod_{1 \leq k \leq n} (n+k)$ . En déduire  $\prod_{1 \leq k \leq n} (4k-2)$ .
- Retrouver cette expression par un calcul direct.

16 ★★ Soit  $a \in \mathbb{K}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$P_n = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k}).$$

- Calculer  $P_n$  lorsque  $a = 1$ .
- On suppose  $a \neq 1$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1-a)P_n = (1-a^{2^{n+1}})$ .
- En déduire la valeur de  $P_n$ .

17 ★★★ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$ .

18 ★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ , calculer :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)!(k+1)!}$$

### Coefficients binomiaux

19 ♡

- Développer  $(x+1)^6, (x-1)^6$ .
- Calculer  $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} 2^p = 3^n$
- Démontrer que, pour tout entier  $n$ , on a  $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = 0$ .

20 Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer la somme double :

$$S_n = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{i}{j}$$

21 ★★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{K}$ , calculer  $(1+x)^{2n}$  de deux manières.
- En déduire la valeur de  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

22 ♡ Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $A_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$  et  $B_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$ .  
 Calculer  $A_n + B_n$  et  $A_n - B_n$ . En déduire la valeur des sommes  $A_n$  et  $B_n$ .

23 ★★ Soient  $n, p$  des entiers naturels avec  $n \geq p$ . Démontrer que

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

24 ♡★★

1) Soient  $n, p$  et  $q$  des entiers naturels, en utilisant la formule d'additivité et un télescopage, calculer la somme

$$\sum_{k=p+1}^q \binom{n+k}{k}$$

2) En déduire  $\sum_{i=0}^n \prod_{j=1}^p (i+j)$ .