Thomas Masanet

I Questions préliminaires

Exercice 1

(Divers)

1) a) Voir cours.

b) Il suffit de se ramener dans les intervalles considérés en utilisant les propriétés de la question précédente. On a que :

$$\begin{aligned}
\cos(10) &= \cos(10-4\pi) = \cos(4\pi-10) \text{ avec } 4\pi-10 \in [0,\pi] \\
\cos(\frac{45\pi+1}{7}) &= \cos(\frac{45\pi+1}{7} - 6\pi) = \cos(\frac{3\pi+1}{7}) \text{ avec } \frac{3\pi+1}{7} \in [0,\pi] \\
\cos(\frac{-3\pi-1}{4}) &= \cos(\frac{3\pi+1}{4}) \text{ avec } \frac{3\pi+1}{4} \in [0,\pi] \\
\sin(10) &= \sin(10-2\pi) = \sin(\pi-(10-2\pi)) = \sin(3\pi-10) \text{ avec } 3\pi-10 \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
\sin(\frac{45\pi+1}{7}) &= \sin(\frac{45\pi+1}{7} - 6\pi) = \sin(\frac{3\pi+1}{7}) \text{ avec } \frac{3\pi+1}{7} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\
\sin(\frac{-3\pi-1}{4}) &= \sin(\pi - \frac{-3\pi-1}{4}) = \sin(\frac{\pi+1}{4}) \text{ avec } \frac{\pi+1}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}$$

c) Tout d'abord, on a que $\sin(\arcsin(12))$ n'est pas défini, ainsi que $\cos(\arccos(12))$.
Pour les 4 autres, on va se ramener encore une fois entre $[0,\pi]$ ou $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ pour pouvoir exploiter les propriétés de bijection réciproque :
Au final, on obtient :

$$\arccos(\cos(12)) = 4\pi-12, \arcsin(\sin(12)) = 12-4\pi, \arccos(\cos(\frac{29\pi+2}{9})) = \frac{7\pi-2}{9}, \arcsin(\sin(\frac{29\pi+2}{9})) = \frac{2\pi-2}{9}.$$

2) La formule $a^(cd) = (a^c)^d$ n'a été formulé que dans le cas où a est positif, ce qui n'est pas le cas ici pour $-1 \cdots$.

3) Revenons à la définition de a^x pour $a > 0$ et $x \in R$: $a^x = \exp(x\ln(a))$. Cette fonction est donc définie est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour $t \in \mathbb{R}$, :

$$(x \mapsto a^x)^{'}(t) = \ln(a)\exp(t\ln(a)) = \ln(a)a^t.$$

4) Il faut ici faire apparaître astucieusement des croissance comparées :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \ln(x)x^2 - \frac{e^x}{x^3} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3}(\frac{\ln(x)x^5}{e^x} - 1) \\
&= \frac{e^x}{x^3}(\frac{\ln(x)}{x}\frac{x^6}{e^x} - 1)
\end{aligned}$$

Or par croissance comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^6}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3} = +\infty$.
On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)x^2 - \frac{e^x}{x^3} = -\infty$.

5) a) Voir cours.

b) $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^-$ sont 2 intervalles sur lesquelles ch (à valeur dans $[1,+\infty[$). On a donc que I_2 est $\mathbb{R}^+$.

c) Ici on va utiliser une intégration par partie. Pour cela montrons la dérivabilité et calculons d'abord la dérivée de la fonction Argch sur $]1,+\infty[$ (et non sur I_2, erreur de ma part) :
Argch est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme bijection réciproque de ch sur $]1,+\infty[$ avec $\text{ch}^{'}(\text{Argch}) = \text{sh}((\text{Argch}))$ qui ne s'annule que pour $x = 1$.
Sur cet intervalle on a alors :

$$\begin{aligned}
\text{Argch}^{'}(x) &= \frac{1}{\text{sh}(\text{Argch}(x))} \\
&\overset{\text{car } \text{sh}(\text{Argch}(x))>0 \text{ sur }]1,+\infty[}{=} \frac{1}{\sqrt{\text{sh}^2(\text{Argch}(x))}} \\
&\overset{\text{Question a)}}{=} \frac{1}{\sqrt{\text{ch}^2(\text{Argch}(x))-1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

Maintenant, attelons nous au calcul de la primitive de Argch. On a le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\int^{x} \mathrm{Argch}(t)\mathrm{d}t &= [\mathrm{Argch}(t)t]^{x} - \int^{x} \mathrm{Argch}^{'}(t)t\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{Argch}(x)x - \int^{x} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t\\ &= \mathrm{Argch}(x)x - [\sqrt{t^2-1}]^{x}\\ &= \mathrm{Argch}(x)x - \sqrt{x^2-1}.\end{aligned}$$

d) La forme ne peut pas se déduire de ce qui précède,en effet si on redérive l'expression précédente, on obtient simplement Argch ce qui ne nous avance pas beaucoup. Ici on peut néanmoins résoudre l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ sur $\mathbb{R}_+$ pour s'en sortir. et on obtient pour $x \in R_+$:
$(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

6) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a que :

$$\begin{aligned}5\,\mathrm{ch}(x) - 3\,\mathrm{sh}(x) = 4 &\Leftrightarrow 5(\frac{e^x+e^{-x}}{2}) - 3(\frac{e^x-e^{-x}}{2}) = 4\\ &\Leftrightarrow e^x + 4e^{-}x = 4\\ &\Leftrightarrow (e^x)^2 + -4e^x + 4 = 0.\end{aligned}$$

on pose $X = e^x$ et on se ramène à résoudre $X^2 - 4X + 4 = 0$, soit $(X-2)^2 = 0$ soit $X = 2$, soit $x = \ln(2)$.
Donc $S = \{\ln(2)\}$.

7) Tout d'abord, on a que pour $x \in \mathbb{R}_+, \mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\,x) \in [0, \frac{\pi}{2}[\in [0,\pi]$ donc par définition de la fonction Arccos, si $\cos(\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\,x)) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$, on aura que $\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\,x) = \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\,x}\right)$.
Calculons $\cos(\mathrm{Arctan}(\mathrm{sh}\,x))$ en passant par la relation $\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$, ce qui, pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se réécrit $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(x)}}$.
On a donc :

Donc l'égalité est bien vérifiée.

8) Ici, peut essayer de penser à un changement de variable qui fasse disparaître le numérateur. C'est ce qui peut nous faire penser à $u = x^6$. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{x^5}{1+x^{12}}dx &= \int_0^2 \frac{1}{6}\frac{1}{1+(x^6)^2}(6x^5)dx\\ &\overset{u=x^6, du=6x^5dx}{=} \int_0^{2^6} \frac{1}{6}\frac{1}{1+u^2}du\\ &= [\frac{1}{6}\arctan(x)]_0^{2^6}\\ &= \frac{\arctan(64)}{6}.\end{aligned}$$

9) La formule a l'air très compliqué mais ici on applique simplement le théorème fondamentale de l'analyse et on a donc que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $t \mapsto \ln\left(\mathrm{ch}\left(\sin\left(t^8\right)\right) + e^t\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions continues (À noter que $\mathrm{ch} \geq 1$ et $\mathrm{e}^t \geq 0$ donc le ln est bien défini) et on a :

$$(x \mapsto \int_1^x \ln\left(\mathrm{ch}\left(\sin\left(t^8\right)\right) + e^t\right)dt)^{'}(x) = \ln\left(\mathrm{ch}\left(\sin\left(x^8\right)\right) + e^x\right).$$

<u>Exercice 2</u>

(Un peu d'équations différentielles)

1) a) La fonction est définie (et continue) sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ (car c'est l'ensemble sur lequel $x \mapsto xln(x)$ est définie et ne s'annule pas), c'est donc sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ qu'on va chercher une primitive.
la fonction est de la forme $\frac{u^{'}}{u}$ avec $u : x \mapsto \ln(x)$. On a donc que :
- Sur $]0,1[$ une primitive est $x \mapsto \ln(\ln(-x))$
- Sur $]1,+\infty[$ une primitive est $x \mapsto \ln(\ln(x))$.

b) On cherche une primitive de $x \mapsto -\frac{1+\ln(x)}{x^2\ln(x)^2}$. On a :

$$\begin{aligned}
\int^x -\frac{1+\ln(t)}{t^2\ln(t)^2}\mathrm{d}t &= \int^x \frac{1}{(t\ln(t))^2}((1+\ln(t))\mathrm{d}t) \\
&\overset{u=t\ln(t),\mathrm{d}u=(1+\ln(t))dt}{=} \int^{x\ln(x)} \frac{1}{u^2}du \\
&= \left[\frac{-1}{u}\right]^{x\ln(x)} \\
&= \frac{-1}{x\ln(x)}
\end{aligned}$$

c) On va étudier cette EDL sur $I_1 =]0,1[$ et $I_2 =]1,+\infty[$ afin de pouvoir diviser par $x\ln(x)$ et se ramener à une EDL sous forme normalisée. Sur chacun de ces intervalles donc, (E) peut se réécrire :

$$y^{'} - \frac{1}{xln(x)}y = \frac{-1-\ln(x)}{x^2\ln(x).}$$

D'après la question 1, on a que les solutions de l'équation homogène sur I_1 et I_2 sont :
Sur I_1 :

$$S_h^1 = \{\lambda\exp(\ln(-\ln(x))\} = \{\lambda(-\ln(x))\} \overset{\text{Si } \lambda \text{ parcourt } \mathbb{R}, -\lambda \text{ parcourt } \mathbb{R}}{=} \{\lambda\ln(x)\}.$$

Sur I_2 :

$$S_h^2 = \{\lambda\exp(\ln(\ln(x))\} = \{\lambda\ln(x)\}.$$

d) Pour résoudre ces équations différentielles sur chacun de ces intervalles, on va effectuer une méthode de variation de la constante :
Soit y de la forme $x \mapsto \lambda(x)\ln(x)$ où λ est une fonction de classe $\mathbb{C}_1$.
En appliquant la méthode de la variation de la constante (sur I_1 ou I_2 et en simplifiant ce qui se simplifie toujours dans une méthode de variation de la constante, on obtient que :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution } &\Leftrightarrow \lambda^{'}(x)\ln(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2\ln(x)} \\
&\Leftrightarrow \lambda^x = \frac{-1-\ln(x)}{x^2\ln^2(x)}.
\end{aligned}$$

Or on a vu une primitive de cette fonction dans la question b. Une primitive λ possible de $\lambda^{'}$ est donc $\lambda : x \mapsto \frac{-1}{x\ln(x)}$. Il suit que y est de la forme $x \mapsto \frac{-\ln(x)}{x\ln(x)} = \frac{-1}{x}$. Les solutions de cette équation sont donc (sur I_1 ou I_2) :

$$S_E = \{x \mapsto \frac{-1}{x} + \lambda\ln(x), \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2) a) Il s'agit d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants, commençons par résou dre l'équation caractéristique associée $2r^2 - 5r + 3 = 0$, qui a pour discriminant $\Delta = 25 - 24 = 1$, et pour racines $r_1 = \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}$ et $r_2 = \frac{5-1}{4} = 1$ (qui pouvait aussi être donnée comme racine évidente). Les solutions de l'équation homogène associée sont donc toutes les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ae^{\frac{3}{2}x} + Be^x$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Puisque le second membre est de la forme «polynôme exponentielle» avec un facteur qui est racine de l'équation caractéristique, on va chercher une solution particulière y_p d'expression $y_p(x) = \left(ax^2 + bx\right)e^x$. On aura alors $y_p'(x) = \left(2ax + b + ax^2 + bx\right)e^x$, puis $y_p''(x) = \left(ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b\right)e^x$, donc y_p est solution si et seulement si (en simplifiant par e^x) $2ax^2 + (8a+2b)x + 4a + 4b - 5ax^2 - (10a+5b)x - 5b + 3ax^2 + 3bx = x$, soit $-2ax + 4a - b = x$. Par identification des coefficients, on a $a = -\frac{1}{2}$, puis $b = 4a = -2$. Autrement dit, $y_p(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)e^x$, et les solutions de l'équation complète sont toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ae^{\frac{3}{2}x} + \left(B - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)e^x$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

b) Il s'agit de la résolution d'un problème de Cauchy dont on sait qu'il admet une unique solution.
Pour trouver une telle solution, on peut partir des formes générales des solutions et puis voir ce qu'indique les conditions initiales :
Soit y de la forme $xe^{\frac{3}{2}x} + \left(B - \frac{1}{2}x^2 - 2x\right)e^x$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$

II Problèmes

Exercice 3

(**Autour de la fonction** arcsin)

Partie I

1) La fonction φ est définie sur R. De plus, les fonctions sin et Arcsin étant impaires, φ est impaire. Enfin, comme sin est 2π-périodique, $x \mapsto \sin(2x)$ est π-périodique. Il en va de même de φ. On pourra mener l'étude sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis compléter par symétrie centrale. Enfin, comme $\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \varphi(x)$, la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ est axe de symétrie. Résumons, φ est impaire et π-périodique.

2) - Soit $x \in [0, \pi/4]$. En ce cas, $2x \in [0, \pi/2]$. Par conséquent, $2x$ est l'unique antécédent de $\sin(2x)$ appartenant à $[-\pi/2, \pi/2]$, c'est-à-dire

$$\varphi(x) = \text{Arcsin}(\sin(2x)) = 2x$$

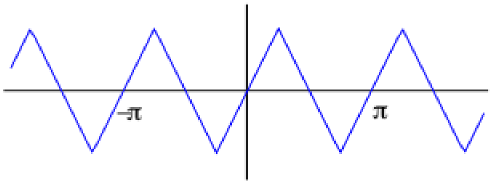
- Soit $x \in [\pi/4, \pi/2]$. En ce cas, $2x \in [\pi/2, \pi]$. D'où $\pi - 2x \in [0, \pi/2]$. Comme de plus,

$$\sin(2x) = \sin(\pi - 2x),$$

$\pi - 2x$ est l'unique antécédent de $\sin(2x)$ appartenant à $[-\pi/2, \pi/2]$, c'est-à-dire

$$\varphi(x) = \text{Arcsin}(\sin(2x)) = \pi - 2x$$

3) D'après les propriétés de symétrie de φ, il suffit de la représenter sur $[0, \pi/4]$, de compléter par symétrie par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{4}$, puis par symétrie centrale et enfin de translater le graphe ainsi obtenu. On obtient ainsi :



Partie II

1) **(Intervalle d'étude)**

a) Soit $x \in \mathbf{R}$, on déduit de l'inégalité $(1-|x|)^2 \geqslant 0$ que $2|x| \leqslant 1 + x^2$. De plus, il y a égalité précisément lorsque $|x| = 1$.

b) La fonction Arcsin est définie sur $[-1, 1]$. Or, d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ appartient à $[-1, 1]$. Par composition, f est donc définie sur $\mathbf{R}$.

c) Soit $x \in \mathbf{R}, f(-x) = \text{Arcsin}\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) = -\text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = -f(x)$. Par suite f est impaire.

2) **(Tableau de variations)**

a) Soit $t \in]-\pi/2, \pi/2[$, nous avons

$$\frac{2\tan t}{1 + \tan^2 t} = \frac{2\frac{\sin t}{\cos t}}{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} = \frac{2\sin t \cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sin(2t)$$

Ainsi, $f(\tan t) = \text{Arcsin}\left(\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}\right) = \text{Arcsin}(\sin 2t) = \varphi(t)$.

b) Soit $x \in \mathbf{R}$, Posons $t = \text{Arctan}(x)$, de sorte que $t \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $x = \tan t$. D'après la question précédente, il s'ensuit immédiatement que $f(x) = \varphi(t) = \varphi \circ \text{Arctan}(x)$.

c) D'après les résultats de la Partie I - φ est strictement décroissante sur $]-\pi/2, -\pi/4]$, - φ est strictement croissante sur $]-\pi/4, \pi/4[$, - φ est strictement décroissante sur $[\pi/4, \pi/2[$.
La fonction Arctan : $\mathbf{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ est une bijection strictement croissante est continue. D'après le Théorème de la bijection, elle réalise des bijections strictement croissantes de ▹ de $]-\infty, -1]$ sur $]-\pi/2, -\pi/4]$, ▹ de $]-1, 1[$ sur $]-\pi/4, \pi/4[$, ▹ de $[1, \infty[$ sur $[\pi/4, \pi/2[$,
Par composition de deux fonctions monotones, nous en déduisons que - f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$, - f est strictement croissante sur $]-1, 1[$, - f est strictement décroissante sur $[1, \infty[$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

d) Le tableau suivant résume les variations f :
Pour le calcul des limites en $\pm\infty$, procédons par composition : effectuons le changement de variable $y(x) = \text{Arctan}\, x$, il vient :
- $y(x) = \text{Arctan}(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\frac{\pi}{2}$ - $\varphi(y) \underset{y\to\pm\pi/2}{\longrightarrow} 0$
Par composition des limites, il s'ensuit que $\lim_{x\to\pm\pi/2} f(x) = 0$.

e) D'après la question 1.a, $\frac{2x}{1+x^2} \in]-1,1[$, pour tout x différent de 1 et -1 . Comme Arcsin est dérivable sur] - 1, 1[, il en résulte par composition que f est dérivable sur $\mathbf{R}\backslash\{\pm 1\}$. De plus, pour tout x différent de 1 et -1 , on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \times \frac{2\left(1+x^2\right)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} \times \frac{2\left(1-x^2\right)}{1+x^2} \\ &= \frac{2}{1+x^2} \times \frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} = \pm\frac{2}{1+x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, - Pour tout $x \in]-1,1\left[, 1-x^2>0\right.$ et par conséquent $f'(x)=\frac{2}{1+x^2}$. - Pour tout $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty\left[, 1-x^2<0\right.$ et $f'(x)=-\frac{2}{1+x^2}$.

Exercice 4

Partie I : Généralités

1) Par définition, $d(x)=f'''+af''+bf'+cf$, donc y est solution de (E) si et seulement si $y'''+ay''+by'+cy=f'''+af''+bf'+cf$, soit $(y-f)'''+a(y-f)''+b(y-f)'+c(y-f)=0$, c'est-à-dire si et seulement si $y-f$ est solution de (H).
2) Supposons donc $y_p(x)=Ae^{kx}$, alors $y_p'(x)=kAe^{kx}$, $y_p''(x)=k^2Ae^{kx}$ et $y_p'''(x)=k^3Ae^{kx}$. La fonction y_p est donc solution de (E) (après simplification par les exponentielles) si et seulement si $A\left(k^3+ak^2+bk+c\right)=1$. Si k est solution de l'équation caractéristique, cette équation n'a manifestement pas de solution, mais dans le cas contraire, il suffit de poser $A=\frac{1}{k^3+ak^2+bk+c}$ pour obtenir une solution de (E).
3) On doit avoir $r^3+ar^2+br+c=(r-k)^3=r^3-3r^2k+3rk^2-k^3$. Par identification des coefficients, $a=-3k$, donc $6k+2a=2(a+3k)=0$, puis $3k^2=b$, donc $3k^2+2ak+b=3k^2-6k^2+3k=2=0$, et enfin $c=-k^3$, donc $k^3+ak^2+bk+c=k^3-3k^3+3k^2-k^3=0$ (cette dernière égalité était de toute façon donnée puisqu'elle indique juste que k est racine de l'équation car actéristique).
4) Posons donc $y_p(x)=Ax^3e^{kx}$, alors $y_p'(x)=\left(kAx^3+3Ax^2\right)e^{kx}$, $y_p''(x)=\left(k^2Ax^3+6kAx^2+6Ax\right)e^{kx}$ et $y_p'''(x)=\left(k^3Ax^3+9k^2Ax^2+18kAx+6A\right)$ La fonction y_p est donc solution de (E) (toujours en se débarassant des exponentielles) si $k^3Ax^3+9k^2Ax^2+18kAx+6A+ak^2Ax^3+6akAx^2+6aAx+bkAx^3+3bAx^2+cAx^3=1$, soit $A\left(k^3+ak^2+bk+c\right)x^3+A\left(9k^2+6ak+3b\right)x^2+A(18k+6a)x+6A=1$. D'après la question précédente, les coefficients devant x^3, devant x^2 et devant x s'annulent (ce sont ceux qu'on a calculés à un facteur près) et il ne reste donc que la condition 6 A = 1 à vérifier. Autrement dit, $y_p : x \mapsto \frac{1}{6}x^3e^{kx}$ est solution particulière de (E).
5) Supposons donc que $y_1'''+ay_1''+by_1'+cy_1=d_1(x)$, et que $y_2'''+ay_2''+by_2'+cy_2=d_2(x)$, alors il suffit d'additionner les deux équations et d'appliquer la linéarité de la dérivation pour obtenir $(y_1+y_2)'''+a(y_1+y_2)''+b(y_1+y_2)'+c(y_1+y_2)=d_1(x)+d_2(x)$, ce qui est exactement l'énoncé du principe de superposition.

Partie II : Un cas particulier

1) Posons donc $y(x)=e^{-2x}\cos(x)$, alor s $y'(x)=-2e^{-2x}\cos(x)-e^{-2x}\sin(x)=(-2\cos(x)-\sin(x))e^{-2x}$, puis $y''(x)=(4\cos(x)+2\sin(x))e^{-2x}+(2\sin(x)-\cos(x))e^{-2x}=(3\cos(x)+4\sin(x))$, et enfin $y'''(x)=(-6\cos(x)-8\sin(x))e^{-2x}+(-3\sin(x)+4\cos(x))e^{-2x}=(-2\cos(x)-11\sin(x))e^{-2x}$. On remplace tout dans le membre de gauche de l'équation : $y'''(x)+5y''(x)+9y'(x)+5y(x)=e^{-2x}(-2\cos(x)-11\sin(x)+15\cos(x)+20\sin(x)-18\cos(x)-9\sin(x)+5\cos(x))=0$, ce qui prouve que y est solution de (H_1).
2) L'équation $r^3+5r^2+9r+5=0$ admet $r=-1$ comme solution évidente : $-1+5-9+5=0$. On peut donc factoriser le membre de gauche sous la forme $r^3+5r^2+9r+5=(r+1)\left(ar^2+br+c\right)=ar^3+(a+b)r^2+(b+c)r+c$. Par identification des coefficients, $a=1$, puis $a+b=5$, donc $b=4$, et $b+c=9$ donc $c=5$, ce qui est cohérent avec l'équation du coefficient constant. Reste à chercher les racines de $r^2+4r+5=0$, qui a pour discriminant $\Delta=16-20=-4$ et admet donc pour racines $r_1=\frac{-4-2i}{2}=-2-i$ et $r_2=\frac{-4+2i}{2}=-2+i$. Finalement, $\mathcal{S}=\{-1,-2+i,-2-i\}$
3) C'est la même démonstration que pour le deuxième ordre : si $y(x)=e^{rx}$, alors $y'(x)=re^{rx}$, $y''(x)=r^2e^{rx}$ et $y'''(x)=r^3e^{rx}$, donc la fonction y est solution de (H_1) si et seulement si $e^{kx}\left(r^3+5r^2+9r+5\right)=0$, donc si r est solution de l'équation car actéristique.
4) Les fonctions $x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{-2x+ix}$ et $x \mapsto e^{-2x-ix}$ sont donc solutions de (H_1). D'après le principe de superposition, toute addition de deux solutions de (H_1) est encore solution de (H_1) et de même pour tout multiple d'une solution de (H_1) (ça c'est évident, le membre de gauche de l'équation étant simplement multiplié par une constante). En particulier, $x \mapsto \frac{e^{-2x+ix}+e^{-2x-ix}}{2}=e^{-2x}\times\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=e^{-2x}\cos(x)$ est aussi solution de (H_1). De même, $x \mapsto \frac{e^{-2x+ix}-e^{-2x-ix}}{2i}=e^{-2x}\sin(x)$ est aussi solution. Toutes les fonctions proposées dans l'énoncé sont donc également solutions de (H_1) par superposition.
   a) En effet, $z'=y'''+4y''+5y'$, donc $z'+z=y'''+5y''+9y'+5y=0$.
   b) On applique juste le théorème pour les EDL d'ordre 1, les solutions sont toutes les fonctions de la forme $z : x \mapsto Ke^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$

c) Il s'agit d'une équation du second or dre à coefficients constants. On a déjà résolution l'équation caractéristique plus haut, les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions de la forme $y_h : x \mapsto Ae^{-2x}\cos(x) + Be^{-2x}\sin(x)$, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Reste à trouver une solution particulière de la forme $y_p(x) = Le^{-x}$. On aura alors $y_p'(x) = -Le^{-x}$, puis $y_p'' = y_p$ et y_p est solution de l'équation si $L - 4L + 5L = \lambda$, soit $L = \frac{\lambda}{2}$. Les solutions de notre équation sont donc toutes les fonctions de la forme $y : x \mapsto A\cos(x)e^{-2x} + B\sin(x)e^{-2x} + \frac{\lambda}{2}e^{-x}$, avec $(A,B,\lambda) \in \mathbb{R}^3$.

d) Il n'y a en fait presque rien à rédiger : si y est solution de (H_1), alors z est solution de $z' + z = 0$, donc $z = y'' + 4y' + 5y = \lambda e^{-x}$ pour un certain réel λ. D'après la question précédente, y est alors nécessairement de la forme $x \mapsto A\cos(x)e^{-2x} + B\sin(x)e^{-2x} + \frac{\lambda}{2}e^{-x}$, ce qui prouve bien la réciproque souhaitée (il suffit de renommer les constantes).

5) Avec les notations de la question 4 , on a donc $y'(x) = -Ae^{-x} - 2B\cos(x)e^{-2x} - B\sin(x)e^{-2x} - 2C\sin(x)e^{-2x} + C\cos(x)e^{-2x}$, puis $y''(x) = Ae^{-x} + 3B\cos(x)e^{-2x} + 4B\sin(x)e^{-2x} - 4C\cos(x)e^{-2x} + 3C\sin(x)e^{-2x}$. Les con ditions proposées imposent donc $A+B = 2, -A-2B+C = -2$ et $A+3B-4C = -2$. Pour une fois, on va procéder par substitution : $A = 2-B$, donc en remplaçant dans la deuxième équation $-B + C = 0$, soit $C = B$. On remplace tout dans la troisième équation : $2 - B + 3B - 4B = -2$, soit $-2B = -4$, donc $B = 2$, dont on déduit $C = 2$ et $A = 0$. Finalement, $y_0(x) = 2(\cos(x) + \sin(x))e^{-2x}$.

6) La fonction y_0 s'annule quand $\cos(x)+\sin(x) = 0$, donc si $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$. Ceci ne peut se produire que si $x \equiv -\frac{\pi}{2} - x[2\pi]$, donc $x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$.

7) On connait déjà les solutions de l'équation homogène, il ne reste plus qu'à trouver une solution particulière. On va pour cela procéder par superposition (en écrivant $34\,\mathrm{ch}(2x) = 17e^{2x} + 17e^{-2x}$) : cherchons d'abord une solution y_1 de l'équation $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 17e^{2x}$ sous la forme $y_1(x) = Ke^{2x}$. On aura alors $y_1'(x) = 2Ke^{2x}, y_1''(x) = 4Ke^{2x}$ et $y_1'''(x) = 8Ke^{2x}$, donc y_1 convient si $8K + 20K + 18K + 5K = 17$, soit $K = \frac{17}{51} = \frac{1}{3}$. De même, on cherche une solution y_2 de l'équation $y''' + 5y'' + 9y' + 5y = 17e^{-2x}$ sous la forme $y_2(x) = Le^{2x}$. On aura alors $y_2'(x) = -2Le^{2x}$, $y_2''(x) = 4Le^{2x}$ et $y_2'''(x) = -8Le^{2x}$, donc y_2 convient si $-8L + 20L - 18L + 5L = 17$, soit $L = -17$. Par superposition, la fonction $y_p : x \mapsto \frac{1}{3}e^{2x} + 17e^{-2x}$ est donc solution particulière de notre équation, dont toutes les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ae^{-x} + B\cos(x)e^{-2x} + C\sin(x)e^{-2x} + \frac{1}{3}e^{2x} + 17e^{-2x}$