Chapitre 13 : Systèmes linéaires et matrices.

A) Introduction aux systèmes linéaires

- Opérations élémentaires(sur les lignes)
- Méthode du pivot : 3 cas
- Cas 1 : Une unique solution
- Cas 2 : Equation de compatibilité non vérifiée : système incompatible
- Cas 3 : Infinité de solutions : inconnues principales, inconnues secondaires.
- Systèmes dépendant d'un paramètre
- Interprétation géométrique systèmes à 2 inconnues (intersection de droites)
- Interprétation géométrique systèmes à 3 inconnues (intersection de plans)
- Résolution systèmes 2 équations 2 inconnues : Notion de déterminant
- Un système à 2 équations et 2 inconnues a une unique solution ssi son déterminant est non nul.

B) Matrices

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes ($M_{n,p}(\mathbb{K})$).
- Matrice ligne, matrice colonne, i-ème colonne, j-ème ligne d'une matrice, Matrice carrée.
- Addition et multiplication par un scalaire, combinaison linéaire de matrices, matrice nulle.
- $(M_{n,p}(\mathbb{K}),+)$ est un groupe abélien.
- Matrices élémentaires, symbole de Kronecker
- Décomposition matrice comme combinaison linéaires de matrices élémentaires.
- Produit matriciel, existence de diviseurs de 0 et non "simplifiabilité" dans le produits.
- Bilinéarité et "associativité" du produit matriciel.
- Produit de 2 matrices élémentaires, produit d'une matrice par une matrice élémentaire.
- Transposition, propriétés de la transposition
- Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes
- Matrices de transvection, dilation, permutation.
- Lien matrices système

C) Systèmes linéaires (généraux)

- Définitions générales,équations,coefficients,inconnues, second membre, système homogène associé, solution.
- Ecriture matricielle d'un système linéaire.
- Structure ensemble des solutions (solution particulière +solution équation homogène).
- Algorithme du pivot de Gauss (se ramener aux cas de bases).

C) L'anneau des matrices carrées

- Matrice identité, structure d'anneau non commutatif.
- Formule de Jacobi/ Binôme pour mattrices qui commutent.
- Matrice nilpotente.
- Matrices diagonales, matrices scalaires
- Produit de matrices diagonales (commutent), produit d'une matrice par une matrice diagonale.
- Matrice triangulaire supérieur/inférieur
- Le produit de matrices triangulaire est triangulaire.
- Les matrices triangulaires forment un sous-anneau de l'ensemble des matrices.
- Matrice symétriques, anti-symétriques
- Toute matrice est somme de manière unique d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique.3
- Matrices inversibles, inverse d'un produit de matrices, groupe des matrices inversibles.
- Inverse d'une transposée
- Inversibilité des matrices d'opération élémentaire
- Opérations élémentaires préservent l'inversibilité
- A inversible $\Leftrightarrow AX = Y$ a une unique solution $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$.
- Si $A_1X = A_2X \forall X, A_1 = A_2$.

- Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution de $AX = Y$.
- Lemme sur l'inversibilité de matrice (vers l'inversibilité apr le pivot de Gauss).

Remarque : Nous n'avons pas encore vu la méthode d'inversion de matrices par résolution du pivot de Gauss.

Questions de cours :

- Résolution d'un (ou plusieurs) système $3\times$ 3 ou 4×4 au choix du colleur, par méthode du pivot.
- Calcul de l'inverse d'une matrice au choix du colleur par résolution du système $AX = Y(Y$ quelconque).
- Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures est un anneau (on remontrera toutes les hypothèse).
- On prouvera les 2 assertions suivantes :

  1) Lorsque les tailles des matrices rendent licite le produit matriciel, on a :

$$E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell} \quad \text{c'est-à-dire} \quad E_{i,j}E_{k,\ell} = \begin{cases} E_{i,\ell} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

  2) Soit A une matrice et $E_{i,j}$ une matrice élémentaire. Si les tailles des matrices rendent licite le produit matriciel effectué, alors :
  la matrice $E_{i,j}A$ est celle dont toutes les lignes sont nulles, à l'exception de la i-ème, qui est égale à la j-ème ligne de A.