

Thomas Masanet

I Questions préliminaires

Exercice 1

(Divers)

1) a)

$$\begin{aligned}(1+2i)(4+3i) &= [4-6+8i+3i] = -2+11i \\ \frac{4-6i}{3+2i} &= \frac{(4-6i)(3-2i)}{3^2+2^2} = \frac{-26i}{13} = -2i \\ e^{i\frac{\pi}{3}} &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{3}i.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i &= \frac{1}{2}e^{\frac{2i\pi}{3}} \\ \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}} &= \frac{2^9 e^{\frac{9i\pi}{6}}}{\sqrt{2}^{12} e^{\frac{12i\pi}{4}}} = 8e^{\frac{i\pi}{2}} \\ -12e^{i\frac{\pi}{4}} &= (e^{i\pi})12e^{i\frac{\pi}{4}} = 12e^{\frac{5i\pi}{4}}\end{aligned}$$

c) Soit $a, b \in [0, \pi]$ On utilise la formule de l'angle moitié :

$$\begin{aligned}e^{ia} + e^{ib} &= e^{\frac{i(a+b)}{2}} \left(e^{\frac{i(a-b)}{2}} + \frac{-i(a-b)}{2} \right) \\ &= e^{\frac{i(a+b)}{2}} 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{aligned}$$

De plus, comme a et b sont dans $[0, \pi]$, $\frac{a-b}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\cos(\frac{a-b}{2}) \geq 0$ donc la forme trigonométrique de $e^{ia} + e^{ib}$ est $2\cos(\frac{a-b}{2})e^{\frac{i(a+b)}{2}}$.

d) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x) + i\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) + i\sin(\frac{\pi}{2} - x) = e^{i(\frac{\pi}{2} - x)}$. Un argument est donc $\frac{\pi}{2} - x$.

2) Voir TD nombres complexes.

3) a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \\ &= \frac{1}{8} (e^{ix} + e^{-ix})^3 \\ &= \frac{1}{8} (e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix})) \\ &= \frac{1}{8} (2\cos(3x) + 3(2\cos(x))) \\ &= \frac{1}{4} (\cos(3x) + 3\cos(x)).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^4(x) &= \frac{1}{(2i)^4} (e^{ix} - e^{-ix})^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{16} (e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{2} - 4\frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} + 3 \right) \\ &= \frac{1}{8} (\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^3 x \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 \\&= \frac{(e^{3ix} + e^{-3ix} + 3(e^{ix} + e^{-ix}))}{8} \times \frac{e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}}{-4} \\&= \frac{e^{5ix} + e^{3ix} - 2e^{ix} - 2e^{-ix} + e^{-3ix} + e^{-5ix}}{-32} \\&= \frac{2\cos(5x) + 2\cos(3x) - 4\cos(x)}{-32} \\&= -\frac{1}{16}\cos(5x) - \frac{1}{16}\cos(3x) + \frac{1}{8}\cos(x).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= \Re(e^{4ix}) \\&= \Re((e^i x)^4) \\&= \Re((\cos x + i \sin x)^4) \\&= \Re(\cos^4 x + 4i \cos^3 x \sin x - 6\cos^2 x \sin^2 x - 4i \cos x \sin^3 x + \sin^4 x) \\&= \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x\end{aligned}$$

c) Notons r_1 et r_2 les racines de $e^{\frac{i\pi}{4}}$.

Méthode trigonométrique : $r_1 = e^{\frac{i\pi}{8}} = \cos(\frac{\pi}{8}) + i \sin(\frac{\pi}{8})$ et $r_2 = e^{\frac{i\pi}{8}} e^{\frac{i\pi}{2}} = e^{\frac{5\pi}{8}} = \cos(\frac{5\pi}{8}) + i \sin(\frac{5\pi}{8})$

Méthode algébrique : Soit $Z = X + iY$ une des racines de $z = e^{\frac{i\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Les relations $Z^2 = Z$ et $|Z|^2 = |z|$ nous donne les relations suivantes :

$$X^2 - Y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1)$$

$$2XY = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2)$$

$$X^2 + Y^2 = 1 \quad (3)$$

(1)+(3) donne $X^2 = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, (3)-(1) donne $Y^2 = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et (2) donne que X et Y sont de même signe.
On a donc $X = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $Y = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ou $X = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $Y = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Comme de plus $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$ sont positifs (car $\frac{\pi}{8} \in [0, \frac{\pi}{2}]$) on a donc que $r_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et donc on a :

$$\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

4)

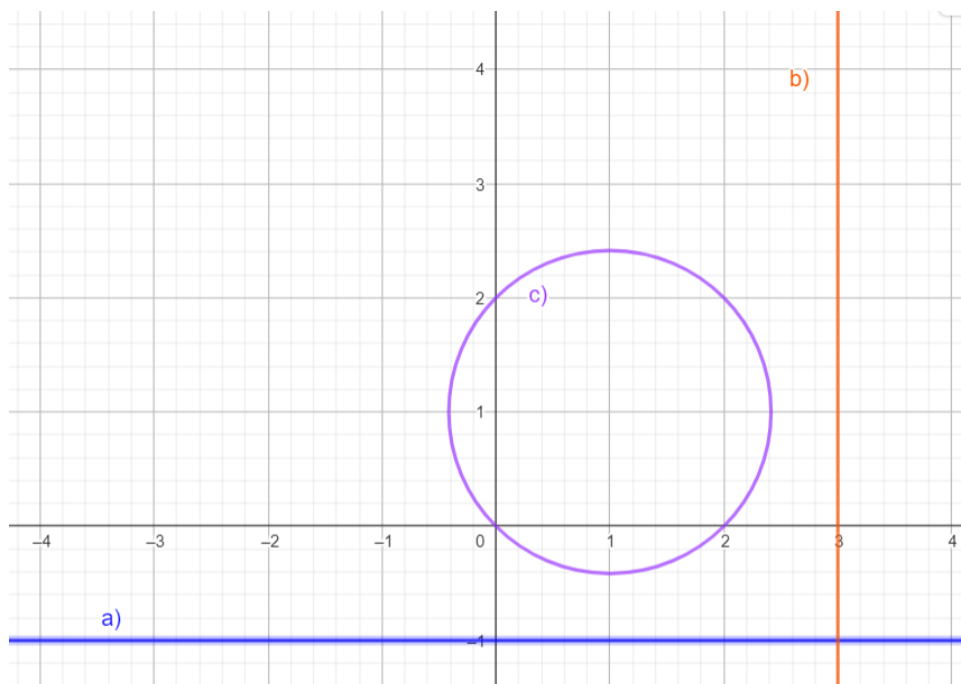
$$\begin{aligned}z^n + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^n = -1 \\&\Leftrightarrow z^n = e^{i\pi} \\&\Leftrightarrow z^n = (e^{i\pi})^n \\&\Leftrightarrow \left(\frac{z}{e^{\frac{i\pi}{n}}}\right)^n = 1 \\&\Leftrightarrow \left(\frac{z}{e^{\frac{i\pi}{n}}}\right) = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\&\Leftrightarrow z = e^{\frac{i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\&\Leftrightarrow z = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.\end{aligned}$$

5) Ici on peut soit faire le calcul en repassant par le discriminant et la forme des solutions d'une équation de degré 2, soit remarquer que 1 est une racine "évidente" auquel cas on obtient automatiquement la factorisation :

$$z^2 - 2iz - 1 + 2i = (z-1)(z-(2i-1)).$$

les solutions de cette équation sont donc 1 et $(2i-1)$.

Exercice 2



1)

2) On sait que les points sont alignés si $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$. Or :

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{c-a} &= \frac{2+(2-d)i}{3-(1+d)i} \\ &= \frac{(2+(2-d)i)(3+(1+d)i)}{9+(1+d)^2} \\ &= \frac{(6-(2-d)(1+d)+i(3(2-d)+2(1+d)))}{9+(1+d)^2} \\ &= \frac{(6-(2-d)(1+d)+i(8-d))}{9+(1+d)^2} \end{aligned}$$

Donc $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$ si et seulement si $(8-d) = 0$ soit si et seulement si $d = 8$

3) La similitude s'écrit comme $z \mapsto az + b$ avec $a = i$ et $b = 2$. $|a| = 1$ et $a \neq 1$ donc on est dans le cas d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (car $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$).

Pour trouver le centre Ω on résout l'équation $f(z) = z$:

$$\begin{aligned} f(z) = z &\Leftrightarrow iz + 2 = z \\ &\Leftrightarrow z(1-i) = 2 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{2}{(1-i)} \qquad \Leftrightarrow z = 1+i. \end{aligned}$$

donc le centre de la rotation est $\Omega = (1, 1)$ d'affixe $z = 1+i$.

4) Par propriété du cours, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $C = (1, 3)$ a pour équation complexe $z \mapsto z_C + e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_C)$ soit $z \mapsto (1+3i) + iz - i(1+3i)$ ou encore $z \mapsto iz + 4 + 2i$.

5) Soit A d'affixe $z_A = 1$, B d'affixe $z_B = -1$ et M le point d'affixe $z_M = z$. On a que

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \in i\mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow (AM) \text{ et } (BM) \text{ sont perpendiculaires.} \\ &\Leftrightarrow M \in \text{au cercle de diamètre } [AB]. \end{aligned}$$

II Problèmes

Exercice 3

1) a) Supposons que $iy \in i\mathbb{R}$ est une solution de (EQ1). En ce cas, par unicité de l'écriture d'un nombre complexe en notation algébrique, il vient

$$\begin{aligned} (iy \text{ sol(EQ1)}) &\Leftrightarrow -iy^3 + (5+3i)y^2 + (7i-16)y + 3 - 21i = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -y^3 + 3y^2 + 7y - 21 = 0 \\ 5y^2 - 16y + 3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier, y est nécessairement solution de l'équation $5y^2 - 16y + 3 = 0$.

- b) D'après la question précédente, on doit également avoir $-y^3 + 3y^2 + 7y - 21 = 0$.
- c) Le polynôme $y \mapsto 5y^2 - 16y + 3$ admet pour discriminant $\Delta = 16^2 - 4 \times 15 = 14^2$. Les racines de cette dernière équation du deuxième degré sont $y_1 = \frac{16+14}{10} = 3$, $y_2 = \frac{16-14}{10} = \frac{1}{5}$. On vérifie alors que 3 est bien racine des deux équations du système précédent, ce qui garantit que $z_0 = 3i$ est une racine imaginaire pure de l'équation (1). Par identification des coefficients, on a la factorisation :

$$P(z) = z^3 - (5 + 3i)z^2 + (7 + 16i)z + 3 - 21i = (z - 3i)(z^2 - 5z + 7 + i)$$

- d) Résolvons l'équation $z^2 - 5z + 7 + i = 0$. Son discriminant est $\Delta = 25 - 4(7 + i) = -3 - 4i$. Cherchons une racine carrée δ de Δ en notation algébrique :

$$(x + iy)^2 = -3 - 4i \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ x^2 + y^2 = 5 \\ xy < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \\ xy < 0 \end{cases}$$

Une racine carrée de Δ est $\delta = 1 - 2i$. Les formules pour les équations polynomiales de degré deux permettent alors de conclure que $z_1 = \frac{5+1-2i}{2} = 3 - i$ et $z_2 = \frac{5-1+2i}{2} = 2 + i$ sont aussi solutions de (1). Finalement, l'ensemble des solutions de (1) est

$$S = \{3i; 3 - i; 2 + i\}$$

- 2) a) Supposons que z est solution de (2), et que (u, v) est une solution de (3), alors d'une part $u^3 \times v^3 = -i$ et d'autre part, la formule du binôme donne $u^3 + v^3 = (u + v)^3 - 3uv(u + v) = z^3 - 3iz = i - 1$, puisque z est solution de (2). Ainsi, (u^3, v^3) est solution du système somme-produit :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = i - 1 \\ u^3 \times v^3 = -i \end{cases}$$

Ce sont donc les solutions de l'équation :

$$w^2 + (1 - i)w - i = 0$$

- b) i et -1 sont racines de (E), on a donc $u^3 = i$ et $v^3 = -1$ ou le contraire. Convenons que $u^3 = i$, et déterminons en ce cas les valeurs possibles pour u : il s'agit des racines troisièmes de i . Or,
- une racine cubique particulière de $i = e^{i\pi/2}$ est $e^{i\pi/6}$.
 - les racines troisièmes de l'unité sont $1, j = e^{2i\pi/3} = e^{4i\pi/6}$ et j^2 .
 - en conclusion, les racines troisièmes de i sont $e^{i\pi/6}, e^{5i\pi/6}, e^{9i\pi/6} = e^{3i\pi/2}$.

En utilisant l'égalité $i = uv$, on obtient les valeurs de v correspondantes :

u	$e^{i\pi/6}$	$e^{5i\pi/6}$	$-i$
$v = i/u$	$e^{i\pi/3}$	$e^{-i\pi/3}$	-1
$z = u + v$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$	$-(1+i)$

- c) En sommant les couples (u, v) précédemment obtenus, on obtient l'ensemble de solutions de (2) :

$$S = \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i); \frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i); -(1+i) \right\}$$

- d) Posons $Z = e^z$. Z vérifie l'équation (2) donc $Z = 3i, 3 - i$ ou $2 + i$. Il nous faut donc trouver les $z \in \mathbb{C}$ tels que $z = 3i, 3 - i$ ou $2 + i$. Je détaille pour le $Z = 3i$ et je donne les solutions pour les deux autres :

$$3i = e^{\ln(3)} e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

$$\text{Donc } e^z = 3i \iff z = \ln(3) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$$

De la même manière on obtient que $Z = 3 - i \iff z = \ln(\sqrt{10}) + i(\varphi_1 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ et $Z = 2 + i \iff z = \ln(\sqrt{5}) + i(\varphi_2 + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$ où φ_1 et φ_2 sont des arguments de $\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{i}{\sqrt{10}}$ et $\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{i}{\sqrt{5}}$ respectivement.

Exercice 4

- 1) a) $12 = 2 \times 5 + 2$ donc $12 \equiv 2[5]$.
 $27 = 3 \times 9 + 0$ donc $27 \equiv 0[9]$.
 $29 = 3 \times 9 + 2$ donc $29 \equiv 2[9]$.
- b) $a \equiv l[b]$ donc $a = kb + l$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Donc $z^a = z^{kb} z^l = (z^b)^k z^l = z^l$.
 Pour $a \equiv 0[b]$ on a alors $z^a = z^0 = 1$.
- 2) a) Ce sont les racines cubiques de l'unité, soit : $z_1 = 1, z_2 = j = e^{\frac{2i\pi}{3}}, z_3 = j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.
- b) Lorsque $p \equiv 0[3]$ on sait d'après la question 1b) que $z_1^p = z_2^p = z_3^p = 1$. Donc pour $m \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$

$$S_{n,m} = \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 0[3]}}^n \binom{n}{p} z_m^p = \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 0[3]}}^n \binom{n}{p} 1 = S_n.$$

- c) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ car on somme les racines troisièmes de l'unité.

$$z_1^2 = 1, z_2^2 = j^2 = z_3, z_3^2 = j^4 = j = z_2 \text{ donc :}$$

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 + z_3 + z_2 = z_1 + z_2 + z_3.$$

De plus, d'après la question 1b) $a \equiv 1[3] \Rightarrow z_1^a = z_1^1, z_2^a = z_2^1, z_3^a = z_3^1$ et $a \equiv 2[3] \Rightarrow z_1^a = z_1^2, z_2^a = z_2^2, z_3^a = z_3^2$.
 Dans les deux cas, on a donc $z_1^a + z_2^a + z_3^a = z_1 + z_2 + z_3 = 0$ ou $z_1^a + z_2^a + z_3^a = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

d)

$$\begin{aligned}
 S'_{n,1} + S'_{n,2} + S'_{n,3} &= \left[\sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 0[3]}}^n \binom{n}{p} z_1^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 1[3]}}^n \binom{n}{p} z_1^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 2[3]}}^n \binom{n}{p} z_1^p \right] \\
 &+ \left(\sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 0[3]}}^n \binom{n}{p} z_2^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 1[3]}}^n \binom{n}{p} z_2^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 2[3]}}^n \binom{n}{p} z_2^p \right) \\
 &+ \left(\sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 0[3]}}^n \binom{n}{p} z_3^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 1[3]}}^n \binom{n}{p} z_3^p + \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 2[3]}}^n \binom{n}{p} z_3^p \right) \\
 &= \left[\sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 0[3]}}^n \binom{n}{p} (z_1^p + z_2^p + z_3^p) + \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 1[3]}}^n \binom{n}{p} (z_1^p + z_2^p + z_3^p) + \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 2[3]}}^n \binom{n}{p} (z_1^p + z_2^p + z_3^p) \right] \\
 &\stackrel{\text{Question 2 c)}}{=} \sum_{\substack{p=0 \\ p \equiv 0[3]}}^n \binom{n}{p} (z_1^p + z_2^p + z_3^p) + 0 + 0 \\
 &= S_{n,1} + S_{n,2} + S_{n,3}.
 \end{aligned}$$

e) On applique les formules du binôme pour les 3 sommes et on obtient : $S'_{n,1} = 2^n$, $S'_{n,2} = (1+j)^n = (-j^2)^n = e^{\frac{ni\pi}{3}}$ et $S'_{n,3} = (1+j^2)^n = (-j)^n = e^{\frac{-ni\pi}{3}}$.

$$\text{Donc } S'_{n,1} + S'_{n,2} + S'_{n,3} = 2^n + e^{\frac{ni\pi}{3}} + e^{\frac{-ni\pi}{3}} = 2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right).$$

Or d'après la question précédente, $S'_{n,1} + S'_{n,2} + S'_{n,3} = S_{n,1} + S_{n,2} + S_{n,3} \stackrel{2b)}{=} 3S_n$.

$$\text{Donc } S_n = \frac{1}{3} \left(2^n + 2\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right).$$

Exercice 5

- 1) a) La formule de Jacobi nous donne que $z^n - 1 = (z-1)(1+z+\dots+z^{n-1})$. Donc on a $z^n - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $1+z+\dots+z^{n-1} = 0$.
b)

$$\begin{aligned}
 1+z+\dots+z^{n-1} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ 1+z+\dots+z^{n-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq 1 \\ \frac{1-z^n}{1-z} = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow z^n = 1 \text{ et } z \neq 1
 \end{aligned}$$

Finalement, les solutions de l'équation

$$1+z+\dots+z^{n-1} = 0$$

sont les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité différentes de 1 :

$$S = \{\omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$$

- c) D'après la question précédente, ω est solution de l'équation de la question b). A l'aide de la formule de Moivre, il s'ensuit que,

$$0 = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{2i\pi}{n}} \right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

Finalement, en identifiant les parties réelles de cette dernière égalité, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = 0.$$

- d) Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On utilise une factorisation par l'angle moitié :

$$|\omega^k - 1|^2 = \left| e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \right|^2 = \left| 2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right|^2 = 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

La formule de linéarisation $\sin^2 \theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$ permet de conclure que

$$|\omega^k - 1|^2 = 2 \left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right)$$

Il ne reste plus qu'à sommer terme à terme. A l'aide de la question précédente, il en découle que

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\omega^k - 1|^2 = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right) = 2n$$

- 2) a) Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Si $p = 0$ ou $p = n$, alors $\omega^p = 1$ et par conséquent $\sum_{k=1}^n \omega^{kp} = n$. Si $p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, alors $\omega^p \neq 1$ et l'identité géométrique donne :

$$\sum_{k=1}^n \omega^{kp} = \omega^p \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^p)^k = \omega^p \frac{(\omega^p)^n - 1}{\omega^p - 1} = 0$$

Finalement,

$$\sum_{k=1}^n \omega^{kp} = \begin{cases} n & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- b) Soit $z \in \mathbb{C}$, la formule du binôme donne

$$\sum_{k=1}^n (z + \omega^k)^n = \sum_{k=1}^n \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} z^{n-p} (\omega^k)^p = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} z^{n-p} \sum_{k=1}^n (\omega^k)^p$$

Or, d'après la question précédente, la somme intérieure est nulle sauf si $p \in \{0, n\}$, auxquels cas, elle vaut n . Par suite

$$\sum_{k=1}^n (z + \omega^k)^n = \binom{n}{0} n z^n + \binom{n}{n} n z^0 = n(1 + z^n)$$

- 3) a) $\sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega^k b) = na + b \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = na$, car $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.

- b) À l'aide de l'inégalité triangulaire, il en résulte directement que

$$n|a| = |na| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (a + \omega^k b) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| = \sum_{p=1}^n |a + \omega^p b|$$

Le changement d'indice $k = n - p$ dans la dernière somme donne alors

$$n|a| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| = \sum_{p=1}^n |a + \omega^p b| = \sum_{k=0}^{n-1} |b + \omega^k a|$$

- c) En divisant par n , on obtient pour tout couple (a, b) :

$$|a| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b| \quad \text{et} \quad |a| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |b + \omega^k a|$$

Dans la deuxième inégalité, échangeons les rôles de a et b , il vient $|b| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$. Finalement, en ajoutant terme à terme il vient :

$$|a| + |b| \leq \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |a + \omega^k b|$$