Chapitre 14 : Limites et continuité

B) Continuité sur un intervalle

- Fonctions continues et lien entre monotonie et injectivité

C) Fonctions à valeurs complexes

- Adaptation des divers théorèmes aux fonctions à valeurs complexes. D) Applications aux suites définies par récurrences
  - Etude des suites définies par $u_0 \in I, u_{n+1} = f(u_n) \forall n \in \mathbb{N}$ avec $f : I \to I$.
  - Etude de la monotonie : le cas f croissant
  - Le cas f décroissant
  - Le cas général.
  - Théorème de convergence vers un point fixe si f continue.

Chapitre 15 : Dérivabilité

A) Dérivabilité en un pointDéfinition Dérivable implique continue Une fonction est dérivable si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1. Tangente en un point où la fonction est dérivable Opération sur les fonctions dérivables (somme, produit,...) Dérivabilité à gauche, à droite.

B) Dérivabilité sur un intervalle

- Définition
- Opérations sur les fonctions dérivables
- Dérivabilité de la bijection réciproque.
- Opération sur les fonctions dérivables (somme, produit,...)

C) extremas, théorème de Rolle, TAF et IAF

- Définitions extremas locaux et globaux
- Point critique.
- Un extrema est un point critique.
- Théorème de Rolle
- Théorème des acroissemens finis
- Inégalité des acroissements finis

D) Applications

- Lien entre monotonie et signe de la dérivée sur un intervalle.
- Théorème de limite de la dérivée.
- Etude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $f \in D(I, I)$ telle que $|f^{'}| \leq k < 1$.

E) Fonctions de classe C_k

- Définitions générales
- Premiers résultats
- Formule de Leibniz (vue Lundi).

Questions de cours :

- Preuve du théorème de Rolle et du théorème des acroissements finis.
- Preuve du théorème de limite de la dérivée puis étude pour $n \in \mathbb{N}^*$ de la continuité en 0, dérivabilité en 0 et continuité de la dérivée en 0 pour les fonctions $f_n : x \mapsto x^n \sin(\frac{1}{x})$.
- Etude d'une suite récurrente au choix du colleur de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour f continue. On cherchera un intervalle stable par f, la monotonie de la suite (u_n) et on en déduira sa convergence éventuelle.
- Pour $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I on prouvera les 3 propriétés suivantes :
  a) $f^{'} \geq 0 \Leftrightarrow f$ croissante sur I.
  b) Si : $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$, et que f' s'annule au plus un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante sur I.

c) Si f est strictement croissante sur I, alors : $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ et pour tout sous-intervalle $J \subset I$, il existe $x \in J$ tel que $f'(x) > 0$.

- Prouver que $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in I$
  $\Leftrightarrow$
  f admet un développement limité d'ordre 1 en 0.
  Puis prouver que la composée $g \circ f$ de $f : I \to J$ dérivable en $a \in I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$ est dérivable en a et que $(g \circ f)^{'}(a) = f^{'}(a) g^{'}(f(a))$.