Chapitre 17 : Relations binaires

A) Familles d'éléments d'un ensemble

- Définition famille d'éléments d'un ensemble
- Famille d'éléments distincts
- Famille de parties d'un ensemble
- Union et intersection d'une famille d'ensemble
- Recouvrement disjoints et partition d'un ensemble

B) Relations binaires

- Défintion relations binaires
- Premiers exemples
- Réflexivité, symétrie, anti-symétrie, transitivité
- Relation d'équivalence
- Classes d'équivalences d'une relation d'équivalence, représentants
- Les classes d'équivalences d'une relation sur E forment une partition de E.
- Définition Relation d'ordre
- Ordre strict, ordre total, ordre partiel
- Maximum et minimum de parties d'un ensemble ordonné.
- Majorant, minorant, borne inférieur, borne supérieure.

Chapitre 18 : Arithmétique

A) Divisibilité sur $\mathbb{Z}$

- Notion de divisibilité
- Couple d'entiers associés
- Divisibilité et division euclidienne.

B) PGCD,PPCM

- Définition PGCD, premières propriétés
- Algorithme d'Euclide étendu (donnant également les coefficients de Bézout)
- Terminaison de l'algorithme, vérification qu'il renvoit le PGCD et les coefficients de Bézout.
- Existence d'une relation de Bézout
- Conséquences de la relation de Bézout
- Entiers premiers entre eux
- Théorème de Bézout, Théorème de Gauss, Factorisation par le PGCD
- Forme irréductible d'un irattionnel
- Extension à un nombre fini d'entiers et aux entiers relatifs
- Définition PPCM et lien avec le PGCD
- Propriétés PPCM

C) Nombres premiers

- Définition nombre premier, nombre composé
- Tout entier admet un diviseur premier
- lien entre nombre premier et entiers premiers entre eux
- Crible d'Erastothène
- Décomposition en produit de facteurs premiers

(À venir : Congruences).

Questions de cours :

- On prouvera les deux résultats suivants
  1) Soit E un ensemble, soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E, et soit $(C, C') \in \mathcal{P}(E)^2$ deux classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$. On a :
    a) soit $C = C'$;
    b) soit $C \cap C' = \emptyset$.
  2) Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ forment une partition de E.
- On prouvera les 2 résultats suivants :
  Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$.
  1) Si $a|c$, $b|c$ et $a \wedge b = 1$, alors (a.b) $| \, c$.
  2) Si $(a, b) \neq (0, 0)$, a $| \, c$ et $b \mid c$, alors $\frac{a \cdot b}{a \wedge b} \in \mathbb{N}$ et $\frac{a \cdot b}{a \wedge b} \Big| \, c$.
- Soit (an), (u_n), (v_n) les suite définies lors de l'algorithme d'Euclide étendu pour $(a, b) \in \mathbb{N}^2, a > b$(avec $a_0 = a$, $a_1 = b$, $u_0 = 1$,$u_1 = 0$, $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$), on admet qu'il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{n_0} = 0$ et $\forall n < n_0, a_n \neq 0$. Montrer les résultats suivants :
  1) $\forall n \in [\![0; n_0 - 1]\!], a_n \wedge a_{n+1} = a \wedge b$. En particulier, $a_{n_0-1} = a \wedge b$.
  2) $\forall n \in [\![0; n_0]\!], a_n = a \cdot u_n + b \cdot v_n$
- Montrer les 2 résultats suivants :
  1) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$. Alors $(c.a) \vee (c.b) = c(a \vee b)$
  2) Soit $(a, b, n) \in \mathbb{N}^2$. Alors $a \vee b \mid n$ si et seulement si $a \mid n$ et $b \mid n$.
- Montrer l'existence et l'unicité d'une décomposition en facteurs premiers pour tout nombre $n \geq 2$ (on reprouvera que tout nombre $n \geq 2$ est produit de nombre premiers).