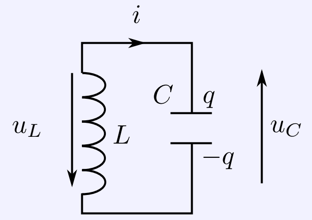
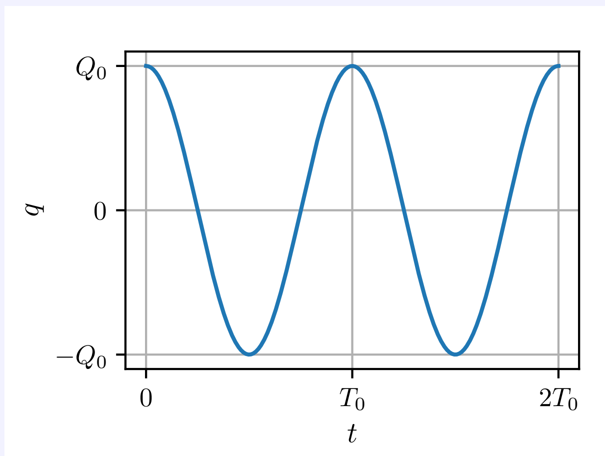
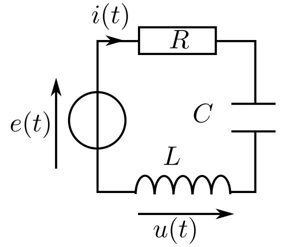
Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
Oscillateur harmonique. Exemples du circuit LC.	Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales. Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.	Sur l'exemple du circuit LC série, avec un condensateur initialement chargé sous la charge $Q_0 = q(t=0)$, établir l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$ pour $t \geq 0$. Définir la pulsation de propre. Résoudre l'équation différentielle. Tracer l'évolution de $q(t)$. D'après la loi des mailles  $u_C(t)+u_L(t) = 0 \quad \text{avec} \quad u_C(t) = q(t)/C \quad \text{et} \quad u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2}$ On en déduit l'équation différentielle $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 q(t) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique. L'ensemble des solutions s'écrit $q(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ D'après les CI, $q(t=0) = Q_0$ et $i(t=0) = 0$, soit $\dot{q}(t=0) = 0$. On en déduit $A = Q_0$ et $B = 0$, d'où $\boxed{q(t) = Q_0\cos(\omega_0 t)}$ 

Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
Oscillateur harmonique. Exemples du circuit LC.	Réaliser un bilan énergétique.	Effectuer un bilan de puissance instantanée, puis un bilan énergétique entre 0 et t. Montrer que $< E_C >_{T_0} = < E_L >_{T_0}$. Le bilan de puissance est obtenu en multipliant la loi des mailles par $i(t)$: $u_C(t)i(t) + u_L(t)i(t) = 0$ Pour avoir le bilan énergétique, on intègre entre 0 et t : $\frac{1}{2}\frac{q(t)^2}{C} + \frac{1}{2}Li(t)^2 = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{C}$ Calculons l'énergie moyenne sur une période $< E_C >_{T_0} = \frac{1}{2C} < q(t)^2 >_{T_0} = \frac{Q_0^2}{2C} < \cos^2(\omega_0 t) >_{T_0}$ Or $< \cos^2(\omega_0 t) >_{T_0} = < \sin^2(\omega_0 t) >_{T_0} = 1/2$, donc $\boxed{< E_C >_{T_0} = \frac{Q_0^2}{4C}}$ Pour l'énergie magnétique, comme $i(t) = \dot{q}(t) = -Q_0\omega_0 \sin(\omega_0 t)$, on a $< E_L >_{T_0} = \frac{1}{2}L < i(t)^2 >_{T_0} = \frac{L\omega_0^2 Q_0^2}{2} < \sin^2(\omega_0 t) >_{T_0}$ Or $L\omega_0^2 = 1/C$ et $< \sin^2(\omega_0 t) >_{T_0} = 1/2$, donc $\boxed{< E_L >_{T_0} = \frac{Q_0^2}{4C} = < E_C >_{T_0}}$

<table>
<tr><th>Notions et contenus</th><th>Capacités exigibles</th><th>Détail</th></tr>
<tr>
<td>Circuit RLC série</td>
<td>Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.
Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.</td>
<td>Soit le circuit RLC série soumis à un échelon de tension : $e(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ E & \text{pour } t > 0 \end{cases}$



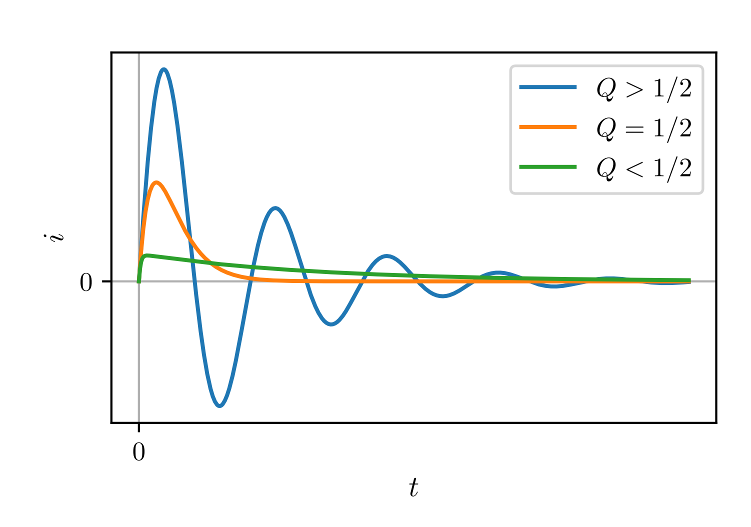
Déterminer i et u à $t = 0^-$, $t = 0^+$ et $t \to +\infty$.
Représenter l'évolution de i en fonction du temps t en discutant de la nature du régime transitoire en lien avec des considérations énergétiques. On fera attention à respecter les conditions initiales (aussi sur la tangente à l'origine), et le régime permanent. Placer les paramètres caractéristiques des différentes courbes.

A $t = 0^-$, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, donc $\boxed{i(t = 0^-) = 0}$. La bobine se comporte comme un fil donc $\boxed{u(t = 0^-) = 0}$. Comme $e(t = 0^-) = 0$, on en déduit $u_c(t = 0^-) = 0$.
Par continuité de l'intensité traversant la bobine, $\boxed{i(t = 0^+) = 0}$. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $\boxed{u_c(t = 0^+) = 0}$. Par la loi des mailles, on en déduit $\boxed{u(t = 0^+) = E}$.
Pour $t \to +\infty$, le régime permanent est atteint, donc

$$\boxed{i(t \to +\infty) = 0 \quad \text{et} \quad u(t \to +\infty) = 0 \quad \text{et} \quad u_c(t \to +\infty) = E}$$

Plus la résistance est faible, moins il y a de dissipation dans le circuit. Dans le cas d'une faible dissipation, on aura des oscillations amorties. En cas de forte dissipation, le régime permanent pourra être atteint sans oscillations.
Les conditions initiales sont $i(t = 0^+) = 0$ et

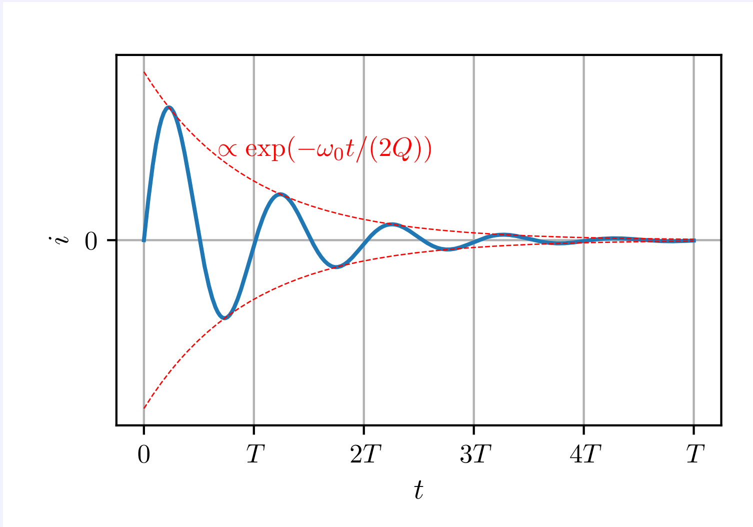
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \frac{1}{L}u(t = 0^+) = \frac{E}{L}$$



</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Notions et contenus</th><th>Capacités exigibles</th><th>Détail</th></tr>
<tr><td>Circuit RLC série</td><td>Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.</td><td>Écrire l'équation sans second membre pour une grandeur $y_h(t)$.
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y_h}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y_h(t) = 0}$$
La pulsation propre est la pulsation de l'oscillateur sans amortissement en régime libre.
Plus le facteur de qualité est élevé, moins il y a d'amortissement. La limite $Q \to +\infty$ correspond à l'oscillateur harmonique.</td></tr>
<tr><td></td><td>Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.</td><td>Écrire le discriminant de l'équation caractéristique.
Préciser la nature du régime transitoire selon le signe de Δ ou les valeurs possibles de Q.
Dans chaque cas, donner la forme générale des solutions de l'équation homogène. Préciser l'expression de la pulsation dans le cas d'un régime pseudo-périodique.

On note Δ le discriminant de l'équation caractéristique $r^2 + \dfrac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$.
• Si $\boxed{Q > 1/2}$, i.e. $\Delta < 0$, alors le régime transitoire est <u>pseudo-périodique.</u>
On pose la <u>pseudo-pulsation</u> telle que $\boxed{\Delta = -4\omega^2}$. Les racines sont $r_{1,2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega$.
Les solutions de l'équation homogène s'écrivent $\boxed{y_h(t) = A\cos(\omega t + \phi)\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2Q}t\right)}$.
• Si $\boxed{Q = 1/2}$, i.e. $\Delta = 0$, alors le régime transitoire est <u>critique.</u>
On a une racine double $r = -\dfrac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$.
Les solutions de l'équation homogène s'écrivent $\boxed{y_h(t) = (At + B)\exp(-\omega_0 t)}$.
• Si $\boxed{Q < 1/2}$, i.e. $\Delta > 0$, alors le régime transitoire est <u>apériodique.</u>
Les racines sont $r_{1,2} = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}$. A noter que les 2 racines sont négatives.
Les solutions de l'équation homogène s'écrivent $\boxed{y_h(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t)}$.</td></tr>
</table>

Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
Circuit RLC série	Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.	Dans le cas du circuit RLC précédent, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t > 0$. Exprimer ω_0 et Q en fonction de R, L et C. On prend $R = \sqrt{\frac{L}{9C}}$. Établir l'expression de $i(t)$. Tracer i en fonction du temps. On dérive la loi des mailles pour $t > 0$: $$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{avec} \quad \frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = i(t)/C \quad \text{et} \quad u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$ On en déduit $\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i(t) = 0}$. On pose $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, soit $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$. Si $R = \sqrt{\frac{L}{9C}}$, alors $Q = 3 > 1/2$ donc le régime transitoire est pseudo-périodique. On aura environ $Q = 3$ pseudo-oscillations. En notant ω la pseudo-pulsation, l'ensemble des solutions s'écrit $$i(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$ Les CI sont $i(t = 0^+) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \frac{1}{L}u(t = 0^+) = \frac{E}{L}$. On en déduit $A = 0$ et $B\omega = \frac{E}{L}$, soit $B = \frac{E}{L\omega}$. D'où la solution $$\boxed{i(t) = \frac{E}{L\omega}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\sin(\omega t)}.$$ 

Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
Circuit RLC série	Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.	En reprenant la forme générale des solutions selon la nature du régime transitoire, donner un ordre de grandeur de la durée τ du régime transitoire. Les trois régimes ont une décroissance exponentielle $e^{-t/\tau}$, avec τ la durée caractéristique du régime transitoire. • Le régime critique permet d'atteindre le régime permanent le plus rapidement, avec $\boxed{\tau_c = \frac{1}{\omega_0}}$ • Pour le régime pseudo-périodique, $\boxed{\tau_{pseudo} = \frac{2Q}{\omega_0} > \tau_c}$ avec $Q > 1/2$. Pour des systèmes faiblement amortis (Q élevé), le régime transitoire dure longtemps. • Pour le régime apériodique, dans le cas d'un fort amortissement $Q \ll 1$, $\boxed{\tau_a \approx \frac{1}{\omega_0 Q} > \tau_c}$. Pour justifier τ_a, on part des racines $r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$. Les 2 racines sont négatives avec la plus grande $r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} > r_1$ Ainsi quand t devient grand, on peut approcher la solution $y_h(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t) \approx B\exp(r_2 t)$ On pose alors $\frac{1}{\tau_a} = -r_2$: $\frac{1}{\tau_a} = \frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad \text{avec} \quad \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$ On en déduit $\frac{1}{\tau_a} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \sqrt{1-4Q^2}\right)$ On effectue un développement limité $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$ dans le cas où $Q \ll 1$: $\frac{1}{\tau_a} \approx \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 - \left(1 - 2Q^2\right)\right) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\tau_a} \approx \frac{\omega_0}{2Q} \times 2Q^2$ On en déduit $\frac{1}{\tau_a} \approx \omega_0 Q \quad \text{donc} \quad \boxed{\tau_a \approx \frac{1}{\omega_0 Q} \quad \text{avec} \quad Q \ll 1}$