Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
Puissance, travail et énergie cinétique. Puissance et travail d'une force dans un référentiel.	Reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force.	Définir la puissance et le travail élémentaire d'une force $\overrightarrow{f}(M)$. Interpréter le signe. Interpréter le signe de la puissance de la résultante des forces $\overrightarrow{F}(M)$ dans un référentiel galiléen. Puissance d'une force $\overrightarrow{f}$ s'appliquant en M dans le référentiel $\mathcal{R}$: $\boxed{P(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}}}$ (en watt (W)) Travail élémentaire d'une force $\overrightarrow{f}$ s'appliquant en M dans le référentiel $\mathcal{R}$: $\boxed{\delta W(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = P(\overrightarrow{f})\mathrm{d}t}$ (en joule (J)) Si $P(\overrightarrow{f}) > 0$ (ou $\delta W(\overrightarrow{f}) > 0$) la force est motrice, si $P(\overrightarrow{f}) < 0$ (ou $\delta W(\overrightarrow{f}) < 0$) la force est résistante. Soit $\overrightarrow{F}$ la résultante des forces s'appliquant à un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen, alors $$m\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{F} \quad \text{et} \quad P(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v}(M) = m\overrightarrow{a}(M)\cdot\overrightarrow{v}(M)$$ Si $P(\overrightarrow{F}) > 0$ alors $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{v} > 0$, donc le mouvement est accéléré, si $P(\overrightarrow{F}) < 0$ alors il est décéléré et si $P(\overrightarrow{F})0 =$ il est uniforme.
Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.	Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.	Énoncer ces deux théorèmes. On démontrera le théorème de la puissance cinétique. Préciser l'intérêt de l'un par rapport à l'autre. Soit un point matériel M de masse m soumis à la résultante des forces $\overrightarrow{F}$ dans un référentiel galiléen : • théorème de l'énergie cinétique : $\mathrm{d}E_c(M) = \delta W(\overrightarrow{F})$ ou $\Delta_{AB}E_c = W_{AB}(\overrightarrow{F})$ • théorème de la puissance cinétique : $\dfrac{\mathrm{d}E_c(M)}{\mathrm{d}t} = P(\overrightarrow{F})$ Le théorème de la puissance cinétique permet d'établir l'équation différentielle du mouvement. Le théorème de l'énergie cinétique sous forme intégrée permet de déterminer la norme de la vitesse à partir de CI. On démontre le théorème de la puissance cinétique par projection de la seconde loi de Newton sur $\overrightarrow{v}$: $$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(M)}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{v}(M) = \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{v}(M) \quad \text{soit} \quad \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}(\overrightarrow{v}(M)\cdot\overrightarrow{v}(M))}{\mathrm{d}t} = P(\overrightarrow{F}) \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}E_c(M)}{\mathrm{d}t} = P(\overrightarrow{F})}$$

<table>
<tr><th>Notions et contenus</th><th>Capacités exigibles</th><th>Détail</th></tr>
<tr>
<td>Champ de force conservative et énergie potentielle
Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle.
Gradient.</td>
<td>Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique.</td>
<td>

Définir une force conservative. Définir le gradient. Donner son expression dans les différents systèmes de coordonnées.

Une force conservative est une force qui dérive d'une énergie potentielle, i.e. $\delta W(\overrightarrow{F}) = -\mathrm{d}E_p$ ou encore $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}E_p$.
On peut établir les expressions du gradient selon le système de coordonnées grâce à la relation $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{e}_x,\overrightarrow{e}_y,\overrightarrow{e}_z)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{e}_r,\overrightarrow{e}_\theta,\overrightarrow{e}_z)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial}{\partial \phi} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{e}_r,\overrightarrow{e}_\theta,\overrightarrow{e}_\phi)}$$

Établir l'énergie potentielle de pesanteur.

Soit Oz un axe vertical ascendant, alors $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e}_z$.
On utilise le gradient en coordonnées cartésiennes, et on projette.
On en déduit que E_p ne dépend que de z, avec

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{e}_x,\overrightarrow{e}_y,\overrightarrow{e}_z)} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{pmatrix}_{(\overrightarrow{e}_x,\overrightarrow{e}_y,\overrightarrow{e}_z)}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = mg \quad \text{soit} \quad \boxed{E_p(z) = mgz + \text{cste}}$$

Si l'axe Oz est vertical descendant, alors $E_p(z) = -mgz + \text{cste}$.

Établir l'énergie potentielle gravitationnelle.

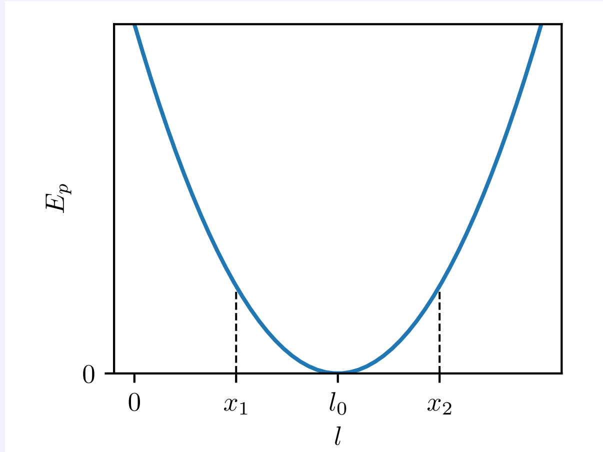
La force gravitationnelle s'exprime en coordonnées sphériques $\overrightarrow{F} = -Gm_1m_2\dfrac{\overrightarrow{e}_r}{r^2}$. En utilisant le gradient en sphérique et en projetant, on en déduit que E_p ne dépend que de r et

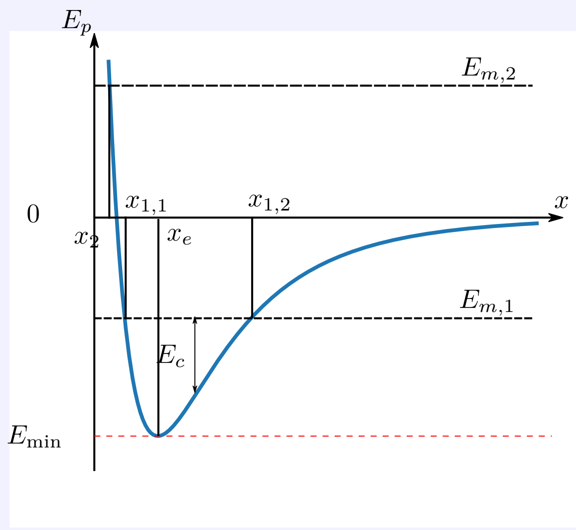
$$-\frac{Gm_1m_2}{r^2} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_p(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} + \text{cste}}$$

Conventionnellement, on choisit l'origine de cette énergie à l'infini, alors la constante est nulle.
On constate que $E_p(r)$ est une fonction croissante de r, donc l'interaction gravitationnelle est une interaction attractive.

</td>
</tr>
</table>

Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
Champ de force conservative et énergie potentielle Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique.	Établir l'énergie potentielle élastique. On considère un repère cartésien d'axe (Ox) colinéaire au ressort, avec O une des extrémités du ressort. Alors la force exercée sur l'autre extrémité s'écrit $\overrightarrow{F} = -k(x-l_0)\overrightarrow{e}_x$, avec $x = l$ la longueur du ressort. On utilise le gradient en cartésien, et on a $-k(x-l_0) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_p(x) = \dfrac{1}{2}k(x-l_0)^2 + \text{cste}}$ Établir l'énergie potentielle électrostatique dans le cas d'un champ uniforme. Soit la force $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} = qE_0\overrightarrow{e}_x$ la force exercée par un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E} = E_0\overrightarrow{e}_x$ sur une charge q placée en M. Par application du gradient, on a $qE_0 = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_p(x) = -qE_0x + \text{cste}}$ On pose alors le potentiel électrique $V(x)$ tel que $\boxed{E_p(x) = qV(x)}$, alors $\boxed{V(x) = -E_0x + \text{cste}}$. Il est à noter qu'en régime stationnaire, on a toujours $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$. Établir l'énergie potentielle électrostatique dans le cas d'un champ créé par une charge ponctuelle. La force électrostatique s'exprime en coordonnées sphériques comme $\overrightarrow{F} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r^2}\overrightarrow{e}_r$. En utilisant le gradient en sphériques, on a $\dfrac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r^2} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_p(r) = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0r} + \text{cste}}$ Conventionnellement, on choisit l'origine de cette énergie à l'infini, alors la constante est nulle. On peut remarquer que si $q_1q_2 > 0$, alors $E_p(r)$ est une fonction décroissante de r, donc la force est répulsive. Et inversement, si $q_1q_2 < 0$, alors $E_p(r)$ est une fonction croissante de r, donc la force est attractive.

Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
Champ de force conservative et énergie potentielle Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.	Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. Déduire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.	Soit l'énergie $E_p(x,y) = ax^2 + by^2$, déterminer la force $\overrightarrow{F}$ dérivant de cette énergie. On cherche $\overrightarrow{F}$ telle que $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$, soit $$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad \text{et} \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad \text{donc} \quad \boxed{\overrightarrow{F} = 2ax\overrightarrow{e}_x + 2by\overrightarrow{e}_y}$$ Dans le cas de la force élastique, représenter E_p en fonction de l, et déduire qualitativement le sens et l'intensité de la force élastique. Comme $\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}E_p$, on en déduit $\overrightarrow{F} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}l}\overrightarrow{e}_x$. Ainsi en x_1, comme $E_p'(x_1) < 0$, on a $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{e}_x > 0$. En x_2, comme $E_p'(x_2) > 0$, on a $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{e}_x < 0$. En $x = l_0$, comme $E_p'(l_0) = 0$, on a $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$. Comme $\|\overrightarrow{F}\| = \lvert E_p'(l)\rvert$, on en déduit que la force est moins intense pour x proche de l_0. 
Énergie mécanique Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.	Distinguer force conservative et force non conservative. Reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique. Utiliser les conditions initiales.	Énoncer le théorème de l'énergie mécanique. A quelles conditions un système est dit conservatif ? Soit un point matériel M de masse m soumis dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen à des forces conservatives de résultante $\overrightarrow{F}_c$ et des forces non-conservatives de résultante $\overrightarrow{F}_{nc}$, alors d'après le théorème de l'énergie mécanique $$\mathrm{d}E_m(M)_{/\mathcal{R}} = \delta W(\overrightarrow{F}_{nc})$$ Le système est dit conservatif si les forces non conservatives ne travaillent pas, alors $\mathrm{d}E_m = 0$, soit $E_m = \text{cste}$.

Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
Mouvement conservatif à une dimension	Identifier sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. Déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.	Le système étant conservatif à une dimension on a $E_m = E_c(\dot{x}) + E_p(x) = \text{cste}$. Comme $E_c(\dot{x}) \geq 0$, on en déduit $\boxed{E_p(x) \leq E_m}$. Sur l'exemple ci-contre, • le mouvement est lié si $E_m \in [E_{\min}, 0[$, alors $x \in [x_{1,1}, x_{1,2}]$; • le mouvement est diffusif si $E_m \geq 0$, alors $x \geq x_2$. Dans le cas d'un mouvement lié, la situation correspond à un puits de potentiel. Le système est confiné dans le puits et oscille entre $x_{1,1}$ et $x_{1,2}$. On note que si $E_m = E_{\min}$ alors il n'y a qu'une seule valeur possible de x : x_e. Cela correspond à une position d'équilibre. Dans le cas d'un mouvement diffusif, la situation correspond à une barrière de potentiel. Le système ne peut pas accéder aux valeurs de x inférieures à x_2.  L'énergie cinétique est l'écart entre l'énergie mécanique et l'énergie potentielle. Ainsi l'énergie cinétique est maximale en $x = x_e$. L'énergie cinétique est nulle quand $E_m = E_p(x)$.
Positions d'équilibre. Stabilité.	Déduire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.	Une position d'équilibre x_e correspond à un extremum de $E_p(x)$: $E_p'(x_e) = 0$. La position d'équilibre est stable si l'extremum est un minimum : $E_p''(x_e) > 0$. La position d'équilibre est instable si l'extremum est un maximum : $E_p''(x_e) < 0$.
Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.	Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.	Soit un système conservatif à une dimension x. Le point matériel M de masse m est astreint à se déplacer selon l'axe Ox sous l'action de la force $\overrightarrow{F} = f(x)\overrightarrow{e}_x$. D'après la seconde loi de Newton projetée selon $\overrightarrow{e}_x$: $m\ddot{x} + f(x) = 0$. On effectue un développement limité autour de x_e, position d'équilibre stable. Alors $x(t) = x_e + X(t)$ avec $\lvert X(t)/x_e \rvert \ll 1$. $\ddot{x} = \ddot{X} \quad \text{et} \quad f(x) = f(x_e) + (x - x_e)f'(x_e) + o(x - x_e)$ Comme $\overrightarrow{F}$ est une force conservative, on a $f(x) = -E_p'(x)$, et $f(x_e) = 0$ car x_e est une position d'équilibre, on a $f(x) = -XE_p''(x_e) + o(X)$. On en déduit l'équation différentielle $m\ddot{X} = -XE_p''(x_e) \quad \text{soit} \quad \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{E_p''(x_e)}{m}}$

Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
	Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non linéaire et faire apparaître l'effet des termes non linéaires.	Expliquer comment écrire une équation différentielle d'ordre 2 sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 1 vectorisée. Rappeler la syntaxe de la fonction `odeint`. Écrire un script pour résoudre l'équation $$\theta'' + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = g/L$$ On prendra $\omega_0 = 0$, $\theta(t=0) = \pi/3$, $\dot{\theta}(t=0) = 0$ et on fera la résolution pour $t \in [0, 3T_0]$.

On cherche à écrire l'équation sous la forme $Y'(t) = F(Y,t)$. On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \theta'(t) \end{pmatrix}$. On a alors

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ \theta''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta'(t) \\ -\omega_0^2 \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad Y'(t) = F(Y,t)$$

`odeint(F,Y0,t)` prend comme arguments la fonction `F` telle que $Y'(t) = F(Y,t)$, les conditions initiales `Y0` et la liste des valeurs de temps pour lesquels on veut une valeur approchée de `Y`.
On peut proposer le code suivant pour résoudre avec comme CI $\theta(0) = \pi/3$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

om = 1 #en rad.s^{-1}
T = 2*np.pi/om
def F_pend(Y,t) :
    return np.array([Y[1],-(om**2)*np.sin(Y[0])])

ts = np.linspace(0,3*T)
sol = odeint(F_pend,[np.pi/3,0],ts)
plt.plot(ts,sol[:,0])
plt.show()
```