<table>
<tr><th>Notions et contenus</th><th>Capacités exigibles</th><th>Détail</th></tr>
<tr><td>Moment cinétique d'un point matériel par rapport à un point et par rapport à un axe orienté.</td><td>Relier la direction et le sens du vecteur moment cinétique aux caractéristiques du mouvement.</td><td>Définir la moment cinétique par rapport à un point $\overrightarrow{L_O}(M)$. Interprétation. Que peut-on dire si $\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{0}$?

Soient M un point matériel de masse m de vitesse $\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, et O un point quelconque, alors on définit le moment cinétique de M par rapport à O dans le référentiel $\mathcal{R}$ comme :
$$\boxed{\overrightarrow{L_O}(M)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p}(M)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v}(M)_{/\mathcal{R}}}$$
Interprétation sur le mouvement :
• Si $\overrightarrow{L_O} \neq \overrightarrow{0}$: rotation du point M caractérisée à un instant t par la norme et le sens de $\overrightarrow{L_O}$
• Si $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{0}$, alors soit M est immobile $\forall t$, soit M décrit une trajectoire rectiligne : $\forall t\ \overrightarrow{v} \parallel \overrightarrow{OM}$

Définir la moment cinétique par rapport à un axe $L_\Delta(M)$. Interprétation.

$$\boxed{L_\Delta(M)_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{L}_{O\in(\Delta)}(M)_{/\mathcal{R}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$
Il traduit le mouvement de rotation de M autour de (Δ). Le sens de la rotation est donné par le signe de $L_\Delta(M)$:
• si $L_\Delta(M) > 0$, alors M a un mouvement de rotation dans le sens trigonométrique (l'axe (Δ) pointant vers nous).
• si $L_\Delta(M) < 0$, alors M a un mouvement de rotation dans le sens horaire.</td></tr>
<tr><td>Moment cinétique d'un système discret de points par rapport à un axe orienté.</td><td>Utiliser le caractère algébrique du moment cinétique scalaire.</td><td>Soit un système Σ constitué de N points matériels M_i de masse m_i. Définir $\overrightarrow{L_O}(\Sigma)$ et $L_\Delta(\Sigma)$.

Soit $\Sigma = \{M_i\}$ un système constitué de points matériels M_i de masse m_i, on définit :
• le moment cinétique du système Σ par rapport à un point O
$$\overrightarrow{L_O}(\Sigma) = \sum_i \overrightarrow{L_O}(M_i) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \overrightarrow{v}(M_i)_\mathcal{R}$$
• le moment cinétique scalaire de Σ par rapport à un axe Δ
$$L_\Delta(\Sigma) = \sum_i L_\Delta(M_i) = \sum_i \left(\overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \overrightarrow{v}(M_i)_\mathcal{R}\right) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}$$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Notions et contenus</th><th>Capacités exigibles</th><th>Détail</th></tr>
<tr>
<td>Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.</td>
<td></td>
<td>

Définir le moment d'une force par rapport à un point, puis par rapport à un axe. Interprétation.

Soit une force $\overrightarrow{f}(M)$ appliquée en un point M.
On définit le moment de la force $\overrightarrow{f}(M)$ par rapport au point O comme :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}(M)}$$

Le moment de $\overrightarrow{f}(M)$ caractérise la <u>rotation possible du point M autour de O</u> sous l'action uniquement de cette force.
Soit (Δ) un axe **orienté** de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_\Delta}$ passant par O.
Le moment $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{f})$ de la force $\overrightarrow{f}(M)$ par rapport à l'axe (Δ) est la projection du moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{f})$ de cette force par rapport à O sur $\overrightarrow{u_\Delta}$:

$$\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O\in(\Delta)}(\overrightarrow{f}) \cdot \overrightarrow{u_\Delta} = (\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{f}(M)) \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$

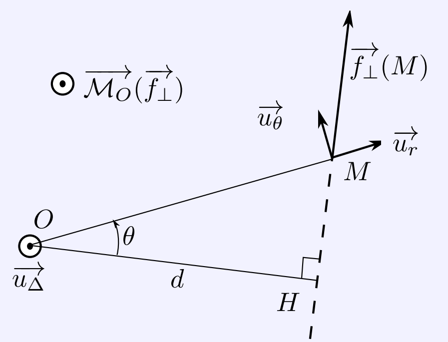
Il caractérise une rotation possible de M autour de l'axe (Δ) sous l'action unique de $\overrightarrow{f}$.
Le sens de la rotation est donné par le signe de $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{f})$:

- si $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{f}) > 0$, alors $\overrightarrow{f}$ engendre une rotation dans le sens trigonométrique (l'axe (Δ) pointant vers nous).
- si $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{f}) < 0$, alors $\overrightarrow{f}$ engendre une rotation dans le sens horaire.

</td>
</tr>
<tr>
<td>Moment d'une force par rapport à un point ou un axe orienté.</td>
<td>Calculer le moment d'une force par rapport à un axe orienté en utilisant le bras de levier.</td>
<td>

Exprimer $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{f})$ à partir du bras de levier.

Soit H le projeté orthogonal de O sur le support de la force $\overrightarrow{f}(M)$ de norme de la composante orthogonale à l'axe $f_\perp$.
La valeur absolue du moment de $\overrightarrow{f}$ par rapport à l'axe Δ vaut $\boxed{|\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{f})| = d \cdot f_\perp}$, avec $OH = d$ le bras de levier.



</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Notions et contenus</th><th>Capacités exigibles</th><th>Détail</th></tr>
<tr><td>Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen.
Conservation du moment cinétique.</td><td>Identifier les cas de conservation du moment cinétique.</td><td>

Théorème à énoncer et à démontrer pour un système constitué de 2 points matériels. A quelle condition a-t-on conservation de $\overrightarrow{L_O}$ pour un système constitué d'un point matériel ? pour un système de points matériels ?

Soit un système $\Sigma = \{M_i\}$ de points matériels M_i de masse m_i et O un point fixe dans un référentiel R galiléen. D'après le théorème du moment cinétique par rapport au point O,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(\Sigma)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{M_{O,ext}} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{M_{O,ext}} = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_{ext}}(M_i)}$$

Soit un axe Δ orienté selon $\overrightarrow{u_\Delta}$, fixe dans le référentiel R galiléen, alors d'après la loi du moment cinétique scalaire,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}L_\Delta(\Sigma)}{\mathrm{d}t} = M_\Delta \quad \text{avec} \quad M_\Delta = \overrightarrow{M_{O,ext}} \cdot \overrightarrow{u_\Delta}}$$

Démonstration pour $\Sigma = \{M_1, M_2\}$. On note

- $\overrightarrow{F}_{ext,1}$ la résultante des forces extérieures s'appliquant en M_1 ;
- $\overrightarrow{F}_{ext,2}$ la résultante des forces extérieures s'appliquant en M_2 ;
- $\overrightarrow{F}_{12}$ la force exercée par M_1 sur M_2 ;
- $\overrightarrow{F}_{21} = -\overrightarrow{F}_{12}$ la force exercée par M_2 sur M_1.

Par définition du moment cinétique

$$\overrightarrow{L}_O(\Sigma) = \overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{p}(M_1) + \overrightarrow{OM_2} \wedge \overrightarrow{p}(M_2)$$

On dérive et comme O est fixe dans le référentiel d'étude $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{v}(M_1) \parallel \overrightarrow{p}(M_1)$, donc

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O(\Sigma)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}(M_1)}{\mathrm{d}t} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}(M_2)}{\mathrm{d}t}$$

Par application de la seconde loi de Newton à M_1, et à M_2, on a

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O(\Sigma)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \left(\overrightarrow{F}_{ext,1} + \overrightarrow{F}_{21}\right) + \overrightarrow{OM_2} \wedge \left(\overrightarrow{F}_{ext,2} + \overrightarrow{F}_{12}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O(\Sigma)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \overrightarrow{F}_{ext,1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \overrightarrow{F}_{ext,2} + \overrightarrow{F}_{12} \wedge \left(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O(\Sigma)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{M_{O,ext}} + \overrightarrow{F}_{12} \wedge \overrightarrow{M_1M_2}$$

</td></tr>
</table>

Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
Théorème du moment cinétique en un point fixe dans un référentiel galiléen. Conservation du moment cinétique.	Identifier les cas de conservation du moment cinétique.	Or $\overrightarrow{F}_{12} \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$, donc $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O(\Sigma)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{M_{O,ext}}}$$ Pour un point matériel, on peut noter $\overrightarrow{F}_{\text{ext}}$ la résultante des forces s'appliquant au point M, alors $$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}_{\text{ext}}$$ $\overrightarrow{L}_O(M) = \overrightarrow{\text{cste}}$ si la force est centrale, i.e. $\overrightarrow{F}_{\text{ext}} \parallel \overrightarrow{OM}$. Pour un système de points matériels, il y a conservation du moment cinétique si $\overrightarrow{M_{O,ext}} = \overrightarrow{0}$.