<table>
<tr><th>Notions et contenus</th><th>Capacités exigibles</th><th>Détail</th></tr>
<tr><td>Cas particulier du champ newtonien</td><td></td><td>Définir un champ newtonien. Donner des exemples. Préciser l'énergie potentielle.

Un système dans un champ de force centrale newtonien est soumis à une force centrale de type : $\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r}}$, avec K une constante.
L'énergie potentielle s'écrit alors $\boxed{E_p(r) = -\frac{K}{r}}$ en choisissant l'origine de cette énergie à l'infini.
La force gravitationnelle est une force newtonienne avec $K = Gm_1m_2 > 0$.
La force électrostatique de Coulomb est une force newtonienne avec $K = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$ positif ou négatif.</td></tr>
<tr><td>Lois de Kepler.</td><td>Énoncer les lois de Kepler pour les planètes et les transposer au cas des satellites terrestres.</td><td>A énoncer et faire le lien avec les grandeurs conservées lors du mouvement.

Soit S le centre de masse du Soleil et P le centre de masse d'une planète en orbite autour du Soleil :
1° loi : Le centre de masse de la planète décrit une ellipse dont l'un des foyers est S.
2° loi : Le vecteur position $\overrightarrow{SP}$ balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux (loi des aires).
3° loi : T est la période de révolution de la planète autour de S, a le demi-grand axe de l'ellipse
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s}$$
La première loi est compatible avec un mouvement plan contenant le centre de force S (conséquence de la conservation du moment cinétique par rapport à S), ainsi que l'existence d'un état lié si $E_m < 0$.
La deuxième loi de Newton correspond à une vitesse aréolaire constante qui découle de la conservation du moment cinétique par rapport à S et donnant la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$.</td></tr>
</table>

Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.	Établir que le mouvement est uniforme et déterminer sa période.	Faire la démonstration à partir de la loi de la quantité de mouvement. Considérons un satellite de masse m en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre de centre O et de masse M_T. L'étude est menée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. D'après la seconde loi de Newton projetée selon $\overrightarrow{e}_r$ et $\overrightarrow{e}_\theta$: $$-m\frac{v^2}{R} = -\frac{GmM_T}{\text{et}} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$$ On en déduit $v = \text{cste}$, donc le mouvement est uniforme. On trouve la valeur de la vitesse $$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}}$$
	Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.	Comme le mouvement est circulaire uniforme, on a $v = \dfrac{2\pi R}{T}$ avec T la période de révolution. En utilisant l'expression de la vitesse, on a $$\frac{GM_T}{R} = \frac{4\pi^2 R^2}{T^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$$ Dans le cas d'une orbite elliptique de demi-grand axe a, on aurait $$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$$

Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
Énergie mécanique dans le cas du mouvement circulaire puis dans le cas du mouvement elliptique.	Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement circulaire.	On exprime l'énergie mécanique $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_Tm}{r}$ Pour une orbite circulaire, $v^2 = \frac{GM_T}{R}$, donc $E_m = \frac{1}{2}\frac{GmM_T}{R} - \frac{GM_Tm}{R}$ soit $\boxed{E_m = -\frac{GM_Tm}{2R} = -\frac{K}{2R} \quad \text{avec} \quad K = GmM_T}$
	Exprimer l'énergie mécanique pour le mouvement elliptique en fonction du demi-grand axe.	Le système étant conservatif, $E_m = E_m(A) = E_m(P)$ avec A l'apogée et P le périgée. En ces points, la vitesse est purement orthoradiale, donc $C = \vert\vert\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{v}(M)\vert\vert = r_Av_A = r_Pv_P \quad \text{donc} \quad v_A = \frac{C}{r_A} \quad \text{et} \quad v_P = \frac{C}{r_P}$ En notant $x = \{r_A, r_B\}$, alors d'après la conservation de l'énergie mécanique, x est solution de $E_m = \frac{1}{2}m\left(\frac{C}{x}\right)^2 - \frac{K}{x} \quad \text{soit} \quad E_mx^2 + Kx - \frac{mC^2}{2} = 0$ On exprime le discriminant qui doit être positif (avec $E_m < 0$) pour avoir 2 solutions $\Delta = K^2 + 2mC^2E_m > 0 \quad \text{soit} \quad E_m > -\frac{K^2}{2mC^2} = E_0$ On retrouve la valeur E_0 du minimum de l'énergie potentielle effective. On en déduit les 2 solutions de x : $r_A = -\frac{K}{2E_m} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2E_m} \quad \text{et} \quad r_P = -\frac{K}{2E_m} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2E_m}$ Or $2a = r_A + r_P$, d'où $2a = -\frac{K}{E_m} \quad \text{soit} \quad \boxed{E_m = -\frac{K}{2a}}$

<table>
<tr><th>Notions et contenus</th><th>Capacités exigibles</th><th>Détail</th></tr>
<tr>
<td>Satellites terrestres
Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique.</td>
<td>Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions.</td>
<td>

- Orbite basse (LEO : Low Earth Orbit) : située entre 500 et 1000 kilomètres d'altitude - utilisée pour les systèmes de télécommunication, d'imagerie terrestre ou de météorologie.
- Orbite géostationnaire (GEO) : située à 36000 kilomètres d'altitude) - utilisée pour la météo ou les services de communication comme la télévision, le satellite restant à tout moment au-dessus du même point.
- Orbite moyenne (MEO : Medium Earth Orbit) : située entre 2000 et 36000 kilomètres) - utilisée aux satellites de localisation.

L'orbite basse est l'orbite circulaire de rayon $r_0 = R_T$. La vitesse sur cette orbite est

$$v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}}$$

La vitesse de libération est la vitesse minimale à donner à un satellite situé sur l'orbite basse de rayon r_0 afin qu'il s'échappe de l'attraction gravitationnelle. Le satellite aura alors une trajectoire parabolique et une énergie mécanique $E_m = 0$. On déduit v_l à partir de $E_m = 0$:

$$\frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{GmM_T}{r_0} = 0 \quad \text{soit} \quad v_l^2 = 2\frac{GM_T}{r_0}$$

En utilisant l'expression de v_0, on en déduit $\boxed{v_l = \sqrt{2}v_0}$.
</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.</td>
<td>

Un satellite en orbite géostationnaire est perçu immobile dans le référentiel terrestre. Il suit donc la rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles avec la même période $T = 24\,\text{h}$. Ainsi le satellite a une orbite circulaire perpendiculaire à l'axe des pôles terrestres.
De plus, le satellite n'étant soumis qu'à la force gravitationnelle de le Terre dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, son mouvement est plan, dans un plan contenant le centre de la Terre. Donc l'orbite géostationnaire est dans le plan équatorial, avec d'après la troisième loi de Kepler

$$\frac{T^2}{R_g^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_g = \left(\frac{TGM_T}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42 \times 10^3\,\text{km}}$$

L'altitude de l'orbite géostationnaire est donc $\boxed{h_g = 36 \times 10^3\,\text{km}}$.
</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th>Notions et contenus</th><th>Capacités exigibles</th><th>Détail</th></tr>
<tr><td>Point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif</td><td>Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.</td><td>

Dans le cas d'une force centrale newtonienne, écrire le système d'équations adimensionnées à résoudre, le mettre sous la forme d'une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par un vecteur à définir. Écrire un code python permettant de faire la résolution du système et de tracer de la trajectoire.

Soit un point matériel P de masse m soumis dans un référentiel galiléen à la force $\overrightarrow{F} = -\frac{GmM}{r^2}\overrightarrow{e}_r$. D'après la seconde loi de Newton projeté selon $\overrightarrow{e}_r$:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{K}{r^2}$$

On utilise la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$:

$$\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = -\frac{K}{mr^2} \qquad (1)$$

Par analyse dimensionnelle,

$$\left[\frac{C^2}{r^3}\right] = \left[\frac{K}{mr^2}\right] = \left[\frac{r_0}{\tau^2}\right]$$

On résout alors

$$\frac{C^2}{r_0^3} = \frac{r_0}{\tau^2} \quad \text{et} \quad \frac{K}{mr_0^2} = \frac{r_0}{\tau^2} \quad \text{donc} \quad \frac{C^2}{r_0^3} = \frac{K}{mr_0^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{r_0 = \frac{mC^2}{K}}$$

On trouve alors le temps caractéristique

$$\tau = \frac{r_0^2}{C} \quad \text{soit} \quad \boxed{\tau = \frac{m^2C^3}{K^2}}$$

On pose alors les grandeurs adimensionnées $Y = r/r_0$ et $X = t/\tau$, et on a

$$\dot{r} = r_0\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{r_0}{\tau}Y'(X) \quad \text{et} \quad \ddot{r} = \frac{r_0}{\tau^2}Y''(X)$$

L'équation différentielle (1) devient

$$\frac{r_0}{\tau^2}Y''(X) - \frac{C^2}{r_0^3Y^3} = -\frac{K}{mr_0^2Y^2}$$

Or $\frac{C^2}{r_0^3} = \frac{K}{mr_0^2} = \frac{r_0}{\tau^2}$, d'où

$$\boxed{Y''(X) = \frac{1}{Y^3} - \frac{1}{Y^2}}$$

</td></tr>
</table>

Notions et contenus	Capacités exigibles	Détail
Point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif	*Capacité numérique :* à l'aide d'un langage de programmation, obtenir des trajectoires d'un point matériel soumis à un champ de force centrale conservatif.	L'angle θ est solution de $C = r^2\dot{\theta}$. On cherche l'équation différentielle vérifiée par $\theta(X)$. $$\dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}X} = \frac{1}{\tau}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}X} \quad \text{donc} \quad C = \frac{r_0^2}{\tau}Y\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}X}$$ Or $\tau = r_0^2/C$, donc $\boxed{Y\theta'(X) = 1}$. On doit donc résoudre le système $$\begin{cases} Y''(X) = \dfrac{1}{Y^3} - \dfrac{1}{Y^2} \\ \theta'(X) = \dfrac{1}{Y} \end{cases}$$ On pose le vecteur $V(X) = \begin{pmatrix} Y \\ Y' \\ \theta \end{pmatrix}$, solution de l'équation différentielle du premier ordre $$\boxed{V'(X) = \begin{pmatrix} Y' \\ \dfrac{1}{Y^3} - \dfrac{1}{Y^2} \\ \dfrac{1}{Y} \end{pmatrix}}$$

```python
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def eqdiff(V,x) :
    y,dy,z = V
    return np.array([dy,1/y**3-1/y**2,1/y**2])

xs = np.linspace(0,10,100)
#appel de la fonction odeint
sol = odeint(eqdiff,[1,0.3,0],xs)
#trace de la trajectoire
plt.polar(sol[:,2],sol[:,0])
plt.show()
```