Préparation pour la rentrée en MPSI

Contexte.

Ce document sert de transition entre le lycée et la classe préparatoire. Il a pour but de faciliter la rentrée, de vous permettre de combler d'éventuelles lacunes, et d'arriver déjà « échauffé », afin d'aborder dans de bonnes conditions le rythme soutenu d'une classe préparatoire.

Les exercices proposés ne couvrent pas les programmes de première et de terminale, mais sont destinés à renforcer et à compléter vos capacités calculatoires et logiques. Celles-ci sont le socle sur lequel vous devrez vous appuyer. Les attentes dans ces domaines sont en effet bien plus grandes en classe préparatoire qu'au lycée.

Ces exercices sont corrigés, ils sont également accompagnés de rappels de cours, de méthodes, et de conseils :

— Il est important de bien maîtriser toutes les méthodes rappelées dans ce document.
— Il est recommandé de chercher tous les exercices, sans d'abord regarder la correction.
— Il faut ensuite bien comprendre la correction, et savoir refaire l'exercice rapidement sans la consulter.

Il sera nécessaire de se remettre au travail au moins deux semaines avant la rentrée. Il peut être pertinent d'élargir cette période de travail à 3 ou 4 semaines réparties dans l'été.

Complément.

Il est souhaitable de compléter l'étude de ce document, dans un deuxième temps, par l'étude du polycopié «Raisonner, rédiger» et par l'étude des fiches de calcul 1 à 9 et 21 (sauf la partie relative aux suites récurrentes sur deux rangs) du polycopié «Cahier de calcul».

Ces deux documents seront conservés et étudiés toute l'année, le premier servant de référence pour les attendus de rédaction, et le deuxième vous permettant de vous entraîner en autonomie sur les aspects calculatoires des notions introduites tout au long de l'année.

I. Règles de priorités des opérations

Dans une expression numérique comportant ou non des parenthèses, on effectue les calculs dans l'ordre suivant :

— en premier les calculs écrits entre parenthèses, en commençant par les parenthèses les plus intérieures,
— ensuite les puissances et les factorielles (même niveau de priorité), en faisant les calculs dans l'ordre de la gauche vers la droite,
— ensuite les multiplications et les divisions (même niveau de priorité), en faisant les calculs dans l'ordre de la gauche vers la droite,
— enfin les additions et les soustractions.

Exercice 1.

Répondre par Vrai ou Faux.

- $4x - x^2 = 4x(1 - x^2)$
- $(-1)^3 + 4 - 3 \times 2 = -3$
- $(-1)^4 + 2 \times 3/2 + 1 = 3$
- $1 - (-1)^n = 2$
- $2 \times 4^2 = 64$
- $3 \times 2^2 + (3 - (-1)^2) = 14$
- $2n! = (2n)!$

II. Racine carrée et valeur absolue

On rappelle la définition de la racine carrée d'un réel positif ou nul :

Soit a un réel positif ou nul. Il existe un unique réel positif ou nul x tel que $x^2 = a$; on le note $\sqrt{a}$.
En particulier, l'équation $x^2 = a$ d'inconnue $a \in \mathbb{R}$:
- admet exactement deux solutions réelles opposées si $a > 0$, ce sont $x = \sqrt{a} > 0$ et $x = -\sqrt{a} < 0$;
- admet exactement une solution si $a = 0$, c'est $x = 0$;
- n'a pas de solution réelle si $a < 0$.

On rappelle la définition de la valeur absolue d'un réel :

Soit x un réel. La valeur absolue de x, notée $|x|$ est définie par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
En particulier, la valeur absolue d'un réel est positive ou nulle.

Le résultat de l'exercice suivant est à connaître absolument.

? Exercice 2.

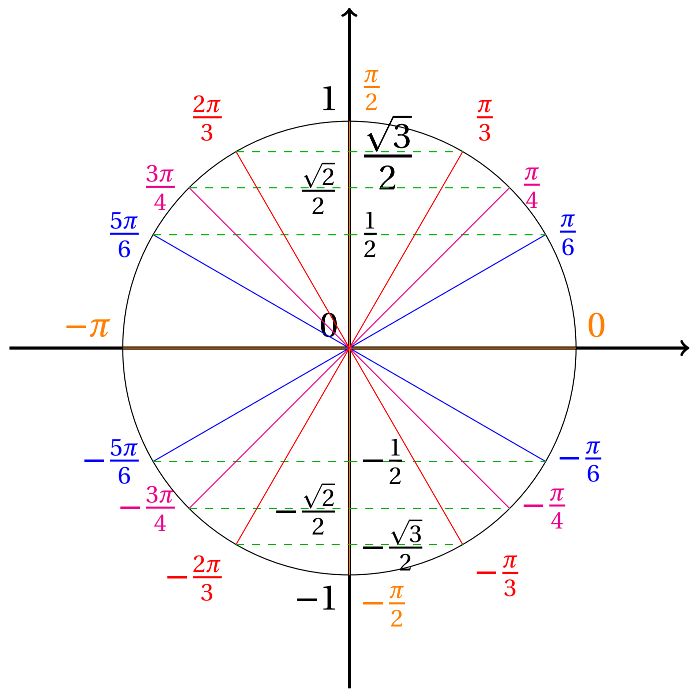
Soit x un réel. Alors $\sqrt{x^2} = |x|$.

III. Trigonométrie

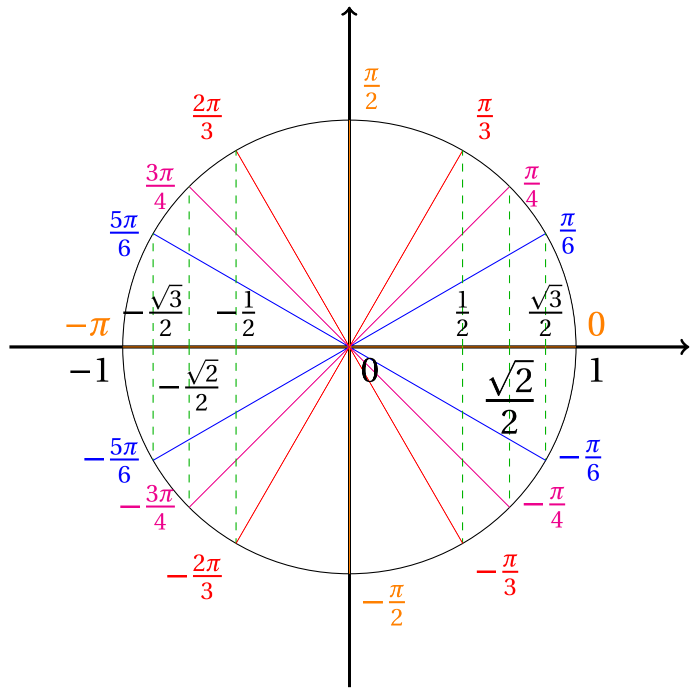
1. Sinus et Cosinus

Les fonctions sinus et cosinus seront revues en première période. En attendant, on rappelle ci-dessous les principales formules trigonométriques à connaître :
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$, $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$, $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Rappel des valeurs remarquables :
- $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/6) = 1/2$, $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin(\pi) = 0$.
  Les autres valeurs remarquables se retrouvent à l'aide d'un cercle trigonométrique ou à l'aide des symétries de sin.

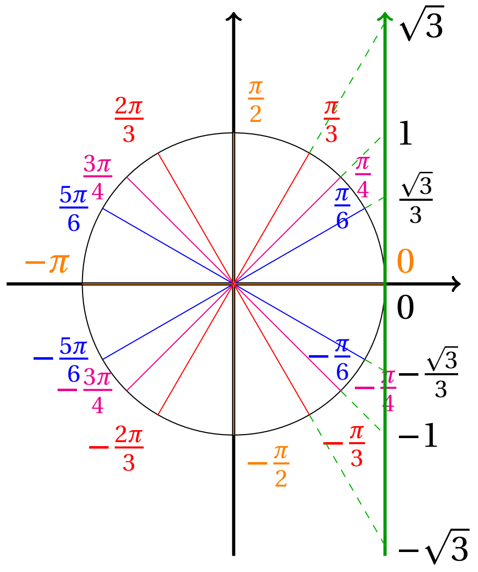


- $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$.
  Les autres valeurs remarquables se retrouvent à l'aide d'un cercle trigonométrique ou à l'aide des symétries de cos.



2. Tangente

Par définition, pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, donc tout réel x non égal à $\frac{\pi}{2}$ à un multiple de π près, on définit $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Comme pour les autres fonctions trigonométriques, on reverra ses principales propriétés à l'occasion du chapitre sur les fonctions.
On rappelle quelques valeurs remarquables : $\tan(0) = 0$, $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$, $\tan(\pi/4) = 1$, $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$.
Les autres valeurs remarquables se retrouvent à l'aide des symétries de tan.



? Exercice 3.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ ne soient pas nuls.
Démontrer que :

1. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$;
2. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.

IV. Exponentielle et logarithme

On rappelle les principales propriétés des fonctions exponentielles et logarithme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [e^x]' = e^x \qquad e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{a+b} = e^a e^b, \ \ e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad [\ln(x)]' = \frac{1}{x} \qquad \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(ab) = \ln(a)+\ln(b), \ \ln(a/b) = \ln(a)-\ln(b), \ \ln(1/a) = -\ln(a)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \ \ln(a^n) = n\ln(a), \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \ln(e^a) = a \qquad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ e^{\ln(a)} = a$$

La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Attention, bien retenir que $\ln(x)$ n'existe que si $x > 0$, mais $\ln(x)$ peut prendre des valeurs négatives ! Par exemple $\ln(1/2) < 0$.

? Exercice 4.

Simplifier les expressions suivantes.

1. $\ln(4)$;
2. $\ln(8e)$;
3. $\ln(\sqrt{2})$;
4. $\ln(1/2)+\ln(2/3)+\ln(3/4)+\ln(4/5)+\ln(5/6)$;
5. $\ln\left((3+2\sqrt{2})^{2024}\right)+\ln\left((3-2\sqrt{2})^{2024}\right)$.

? Exercice 5.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout réel strictement positif x, on définit « x puissance α », noté x^α, par :

$$x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$$

1. Vérifier que cette définition « prolonge » la définition des puissances entières, c'est-à-dire que si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $x^\alpha = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ facteurs}}$, et si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, alors $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$.
2. Démontrer la généralisation de la formule rappelée en début de paragraphe :
$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, \quad \ln(a^b) = b\ln(a)$$
3. Démontrer les formules :
$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b, c \in \mathbb{R}, \quad a^b a^c = a^{bc}, \quad \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}, \quad (a^b)^c = a^{bc}$$
4. Déterminer les limites de x^α en 0^+ et en $+\infty$, en distinguant les cas $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.
5. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}$.

V. Prouver une inégalité

1. Rappels

- On rappelle les règles de signes suivantes :

Signe de a	Signe de b	Signe de $a\times b$	Signe de a/b	Signe de $a+b$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$-$	inconnu
$-$	$+$	$-$	$-$	inconnu
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

- Les 3 identités remarquables usuelles sont à connaître. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \quad ; \quad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

- Les opérations suivantes conservent le sens des inégalités :
  — Ajouter un réel quelconque α : si $x \leqslant y$, alors $x+\alpha \leqslant y+\alpha$.
  — Multiplier par un réel positif α : si $x \leqslant y$ et $\alpha \geqslant 0$, alors $\alpha\times x \leqslant \alpha \times y$.
  — Ajouter des inégalités : si $x \leqslant y$ et $a \leqslant b$, alors $x+a \leqslant y+b$.
  — Multiplier des inégalités de nombres positifs : si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $x\times a \leqslant y \times b$.
  — Appliquer de chaque côté une fonction croissante : si f est croissante sur un intervalle I et si $x, y \in I$ sont tels que $x \leqslant y$, alors $f(x) \leqslant f(y)$.
  Fonctions croissantes de référence : exp sur $\mathbb{R}$, ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Les opérations suivantes renversent le sens des inégalités :
  — Multiplier par un réel négatif α : si $x \leqslant y$ et $\alpha \leqslant 0$, alors $\alpha \times x \geqslant \alpha \times y$.
  — Passer à l'inverse dans des inégalités de nombres de même signe : si $0 < x \leqslant y$, alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$; si $x \leqslant y < 0$, alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$.
  Attention, si x et y sont de signes opposés alors on ne peut pas passer à l'inverse dans l'inégalité $x \leqslant y$.
  Par ailleurs on ne peut pas diviser des inégalités (même de nombres positifs) : si nécessaire il faut procéder en deux temps avec passage à l'inverse puis multiplication (voir la question 3. de l'exercice 6).
  — Appliquer de chaque côté une fonction décroissante : si f est décroissante sur un intervalle I et si $x, y \in I$ sont tels que $x \leqslant y$, alors $f(x) \geqslant f(y)$.
  Fonction décroissante de référence : $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_-$.
- On retiendra qu'il faut toujours être prudent lorsque l'on passe au carré dans une inégalité :
  — Si $0 \leqslant x \leqslant y$, alors $x^2 \leqslant y^2$.
  — Si $x \leqslant y \leqslant 0$, alors $x^2 \geqslant y^2$.
  — Si $x \leqslant 0 \leqslant y$, alors il n'est pas possible de prendre le carré dans l'inégalité.

2. Méthode

Pour comparer deux nombres A et B :

- Dans de nombreux cas, on étudie le signe de la différence $A-B$. Pour cela :
  — Il arrive que le signe de $A-B$ s'obtienne par une étude directe en factorisant l'expression ou en la réduisant au même dénominateur (il est toujours plus simple d'étudier le signe d'un produit ou d'un quotient que d'une somme ou d'une différence). Les identités remarquables rappelées dans la partie précédente peuvent être utiles !
  — Si l'on doit comparer deux nombres $A(x)$ et $B(x)$ avec x un réel appartenant à un certain intervalle I, on peut aussi tenter d'étudier la fonction $f : x \mapsto A(x)-B(x)$, le signe de f sur I pouvant souvent se déduire de son tableau de variations.
- Toujours dans le cas où l'on doit prouver que $A(x) \leqslant B(x)$ avec x un réel appartenant à un certain intervalle I, on peut aussi partir de l'information connue sur x (par exemple $x \geqslant 0$ si $I = [0, +\infty[$, ou $1 \leqslant x \leqslant 2$ si $I = [1, 2]$) pour établir de proche en proche par opérations successives l'inégalité $A(x) \leqslant B(x)$.

3. Conseils

— Les valeurs approchées suivantes sont utiles : $e \approx 2{,}7$; $\ln(2) \approx 0{,}7$; $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.
Ces valeurs approchées seront rappelées dans les énoncés si la calculatrice n'est pas autorisé, inutile de les apprendre maintenant, mais vous les retiendrez sûrement très vite.

— Il faut aussi connaître les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} \forall x \geqslant 1,\ x^n \geqslant 1 & \forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant x^n \leqslant 1 \\ \forall x \geqslant 0,\ e^x \geqslant 1 & \forall x \leqslant 0,\ 0 < e^x \leqslant 1 \\ \forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 & \forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \end{array}$$

— Il existe d'autres méthodes plus sophistiquées permettant d'établir des inégalités, on les rencontrera dans la suite du cours.

4. Exercices

Exercice 6.

1. Comparer les nombres $\dfrac{2}{7}$ et $\dfrac{3}{8}$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^2 \geqslant 4x$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{2+\cos(x)}{2+\sin(x)} \leqslant 3$.
4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 2\ln(x) < x$.

Exercice 7.

1. Comparer les nombres $\dfrac{1}{\ln(2)}$ et $\dfrac{2}{\ln(3)}$, ainsi que les nombres $\dfrac{e-1}{2e-3}$ et 1.
2. Encadrer les réels $\sqrt{29}$ et $\dfrac{16-\sqrt{73}}{3}$ par deux entiers consécutifs.

? Exercice 8.

1. Prouver que : $\forall x \in]3,+\infty[, \dfrac{7x-18}{2x-5} > 3$.
2. Prouver que : $\forall x \in [0,+\infty[, x \leqslant \ln(1+e^x) \leqslant x+\ln(2)$.
3. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, 1-e^{-x} \leqslant x$.

? Exercice 9.

Soit f la fonction définie par : $\forall t \in [1,+\infty[, f(t) = \dfrac{t^2-1}{2t}$.
Prouver que : $\forall t \in [1,+\infty[, 2f\left(\sqrt{t}\right) \leqslant f(t)$.

VI. Prouver une équivalence

1. Rappels

— On dit qu'une proposition $\mathscr{P}_1$ implique une proposition $\mathscr{P}_2$ lorsque l'on peut écrire que : « **si** $\mathscr{P}_1$ est vraie, **alors** $\mathscr{P}_2$ est vraie ». Dans ce cas, on note : $\mathscr{P}_1 \Rightarrow \mathscr{P}_2$.

> **Exemple 1.**
> — Soit $x \in \mathbb{R}$. La proposition « $x \in [0,1]$ » implique la proposition « $x \in \mathbb{R}_+$ ».
> — Soit $x \in \mathbb{R}$. La proposition « $x^2 = 1$ » implique la proposition « $x = -1$ ou $x = 1$ ».

— On dit qu'une proposition $\mathscr{P}_1$ est équivalente à une proposition $\mathscr{P}_2$ lorsque l'on peut écrire que : « $\mathscr{P}_1$ est vraie **si et seulement si** $\mathscr{P}_2$ est vraie », c'est-à-dire lorsque $\mathscr{P}_1$ implique $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_2$ implique $\mathscr{P}_1$. Dans ce cas, on note : $\mathscr{P}_1 \Longleftrightarrow \mathscr{P}_2$.
L'implication $\mathscr{P}_1 \Rightarrow \mathscr{P}_2$ est souvent appelée « implication directe ».
L'implication $\mathscr{P}_2 \Rightarrow \mathscr{P}_1$ est souvent appelée « implication réciproque ».

> **Exemple 2.**
> — Soit $x \in \mathbb{R}$.
> La proposition « $x \in [0,1]$ » n'est pas équivalente à la proposition « $x \in \mathbb{R}_+$ ».
> En effet l'implication directe « $x \in [0,1] \Rightarrow x \in \mathbb{R}_+$ » est vraie.
> Par contre l'implication réciproque « $x \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow x \in [0,1]$ » est fausse.
> — Soit $x \in \mathbb{R}$.
> La proposition « $x^2 = 1$ » est équivalente à la proposition « $x = -1$ ou $x = 1$ ».
> En effet les deux implications $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$ sont vraies.

— Une proposition dépend souvent d'un ou plusieurs paramètres (x dans les exemples précédents). Il est indispensable de préciser dans quel ensemble on prend ces paramètres avant d'écrire l'équivalence, sinon celle-ci risque d'être fausse.

> **Exemple 3.**
> — Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équivalence « $x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = -1$ ou $x = 1$ » est vraie.
> — Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équivalence « $x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = 1$ » est fausse.
> En effet l'implication directe est fausse puisqu'on a oublié la solution $x = -1$.
> — Soit $x \in \mathbb{R}_+$. L'équivalence « $x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = 1$ » est vraie.
> En effet ici on s'est limité à un paramètre x positif, donc la solution $x = -1$ n'est pas à prendre en compte.

— Déterminer une « condition nécessaire et suffisante » pour qu'une proposition $\mathscr{P}_1$ soit vraie, c'est déterminer une proposition $\mathscr{P}_2$ (en général plus simple que $\mathscr{P}_1$) telle que : $\mathscr{P}_1 \Longleftrightarrow \mathscr{P}_2$.

> **Exemple 4.**
> Soit $x \in \mathbb{R}$. La proposition « $x = -1$ ou $x = 1$ » est une condition nécessaire et suffisante pour la proposition « $x^2 = 1$ ».

2. Méthode

Pour prouver que deux propositions $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont équivalentes :

— On peut procéder par équivalences successives, notamment lorsque l'on résout des équations et des inéquations. Il faut alors bien vérifier à chaque étape qu'il est possible de revenir en arrière, c'est-à-dire que l'on a bien une double-implication et non une implication simple.

— On peut procéder par double-implication, c'est-à-dire prouver d'une part que $\mathscr{P}_1$ implique $\mathscr{P}_2$, puis prouver d'autre part que $\mathscr{P}_2$ implique $\mathscr{P}_1$. On procédera ainsi lorsque le raisonnement par équivalences successives n'est pas aisé à mettre en œuvre (voir la question 2 de l'exemple traité ainsi que l'exercice 2.2).
Parfois pour prouver une implication $\mathscr{P}_1 \Rightarrow \mathscr{P}_2$ il est intéressant de procéder par contraposition : plutôt que de prouver que « si $\mathscr{P}_1$ est vraie, alors $\mathscr{P}_2$ est vraie », il revient au même de prouver que « si $\mathscr{P}_2$ n'est pas vraie, alors $\mathscr{P}_1$ n'est pas non plus vraie ».

> **Exemple 5.**
> Il revient au même d'affirmer : « si je suis en retard, alors je prends le bus » et « si je ne prends pas le bus, alors c'est que je ne suis pas en retard ».

3. Conseils

Dans la rédaction d'un raisonnement, il faut toujours préciser l'enchaînement logique liant deux lignes successives :

— Soit on procède par équivalences successives, et dans ce cas le symbole $\Longleftrightarrow$ doit apparaître à chaque étape.

— Soit on procède par implications successives, et dans ce cas plutôt que le symbole $\Rightarrow$ on préférera l'usage de connecteurs logiques écrits en français : « donc », « ainsi », « d'où », « par conséquent », « il vient alors », « on obtient », « on en déduit que »...

Il faut aussi souvent donner des arguments justifiant tel ou tel enchaînement. Les mots de liaison « or », « comme », « étant donné que », « car », « puisque »... sont alors utiles.

4. Exercices

Exercice 10.

1. Soit $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Prouver que : $\dfrac{x+1}{x'+1} = \dfrac{x-1}{x'-1} \iff x = x'$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Prouver que : $a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0$.

Exercice 11.

Dire si les équivalences suivantes sont vraies ou non. Justifier.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x \leqslant 2 \iff x^2 \leqslant 4$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x \leqslant 2 \iff x^3 \leqslant 8$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x \geqslant 1 \iff x^2 + x + 1 \geqslant 3$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $\dfrac{1}{\ln(1+x)}$ existe $\iff 1 + x > 0$.
5. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a : $(a+b)^2 = (a-b)^2 \iff a = 0$ ou $b = 0$.

Exercice 12.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que n^2 est pair si et seulement si n est pair.
2. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui s'annule en 0.
   Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x+1) - P(x-1) = x \iff \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \dfrac{1}{4}x^2$.

VII. Simplifier une expression contenant des fractions

1. Rappels

Dans ce qui suit, a, b, c et d sont des réels quelconques, non nuls s'ils sont au dénominateur des fractions considérées.

— On rappelle dans un premier temps les formules élémentaires suivantes :

$$\frac{a}{1} = a \quad ; \quad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad ; \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \quad ; \quad \frac{a \times b}{a \times c} = \frac{b}{c}$$

La formule à droite permet de simplifier des fractions.

— Multiplier des fractions est facile. En effet, les numérateurs se multiplient entre eux et les dénominateurs se multiplient entre eux :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

En particulier :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a}{d} \times \frac{c}{b} = \frac{c \times a}{d} \times \frac{1}{b} \quad ; \quad a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c} = b \times a \times \frac{1}{c} = \frac{a}{c} \times b$$

— Pour diviser des fractions, on pourra utiliser les formules suivantes :

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a \quad ; \quad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \quad ; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

— Additionner ou soustraire des fractions peut être un petit peu plus compliqué, car nécessite d'avoir des fractions au même dénominateur :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \quad ; \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

2. Méthode

— Pour simplifier une fraction, on doit faire apparaître des facteurs communs au numérateur et au dénominateur, facteurs communs que l'on peut ensuite supprimer. Il s'agit donc d'avoir des expressions les plus factorisées possibles au numérateur et au dénominateur. Pour cela les identités remarquables peuvent aider !

> **Exemple 6.**
> On a : $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2} = \dfrac{(x-1) \times (x+1)}{(x+1) \times (x+1)} = \dfrac{x-1}{x+1}$.
> On a : $\dfrac{9 \times 8 \times 7}{6 \times 5 \times 4} = \dfrac{3 \times 3 \times 4 \times 2 \times 7}{3 \times 2 \times 4 \times 5} = \dfrac{3 \times 7}{5} = \dfrac{21}{5}$.
> Dans ce deuxième exemple, il ne fallait surtout pas calculer $\frac{9\times8\times7}{6\times5\times4} = \frac{504}{120}$ pour ensuite simplifier dans un deuxième temps. Il est beaucoup plus facile de simplifier la fraction dès le départ !

— Les sommes et différences de fractions demandent un minimum de réflexion. Si les dénominateurs des fractions concernées sont différents, il faut alors mettre ces fractions au même dénominateur, ce dénominateur commun étant un multiple des deux dénominateurs de départ.

> **Exemple 7.**
> On a : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{1 \times 3}{2 \times 3} + \dfrac{5 \times 2}{3 \times 2} = \dfrac{3}{6} + \dfrac{10}{6} = \dfrac{13}{6}$.
> On a : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1 \times (x+1)}{x \times (x+1)} - \dfrac{1 \times x}{(x+1) \times x} = \dfrac{x+1}{x(x+1)} - \dfrac{x}{x(x+1)} = \dfrac{(x+1)-x}{x(x+1)}$.
> Ainsi : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

Souvent le dénominateur commun n'a pas besoin d'être le produit des dénominateurs de départ. Plus le dénominateur commun choisi est petit, plus simples seront les calculs qui suivent.

Exemple 8.
On a : $\frac{5}{2}-\frac{3}{4}=\frac{5\times 2}{4}-\frac{3}{4}=\frac{10-3}{4}=\frac{7}{4}$.
On a : $\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1\times(x-1)}{x\times(x-1)}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{(x-1)+1}{x(x-1)}=\frac{x}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}$.
Il aurait été maladroit de choisir $2\times 4=8$ ou $x\times x(x-1)=x^2(x-1)$ pour dénominateurs communs dans les calculs ci-dessus.

3. Conseils

— Pour les fractions empilées à 3 étages, il doit obligatoirement y avoir un trait de fraction plus long que l'autre, le trait le plus long étant placé au niveau du signe « = ». Pour se ramener aux formules de la première partie sans faire d'erreur, on écrit :

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{b\times c}\qquad;\qquad\frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{1}\times\frac{c}{b}=\frac{a\times c}{b}$$

— La formule suivante peut être utile en pratique : $\forall a\in\mathbb{R}_+^*,\ \frac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$.

4. Exercices

Exercice 13.
Simplifier les fractions suivantes :

$$A=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}{2}\qquad;\qquad B=\frac{\frac{1}{5}+\frac{4}{15}}{1+\frac{2}{5}}\qquad;\qquad C=\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}}$$

Exercice 14.

Simplifier les expressions suivantes :

$$f(x)=\frac{4x^2}{1-\frac{2-x}{2+x}}\qquad;\qquad g(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{x}{1-x}\qquad;\qquad h(x)=\frac{6x+4}{4-x^2}-\frac{x}{x+2}$$

puis :

$$u(x)=\frac{e^{2x}+2e^x+1}{1+e^{-x}}\qquad;\qquad v(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}+e^x}{e^{-2x}+e^{-x}}\right)$$

VIII. Simplifier une expression contenant des puissances

1. Rappels

Dans ce qui suit, a et b sont des réels quelconques, non nuls s'ils sont au dénominateur des fractions.

— Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a par définition :

$$a^1=a\quad;\quad a^2=a\times a\quad;\quad a^3=a\times a\times a\quad;\quad a^n=\underbrace{a\times a\times\cdots\times a}_{n\,\text{fois}}$$

On a notamment $0^n=0$ et $1^n=1$.

— Par convention, si a est non nul alors on pose $a^0=1$.
On étend la convention à « $0^0=1$ ».

— Les puissances sont compatibles avec les produits, les inverses et les quotients.
Ainsi, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$(a\times b)^n=a^n\times b^n\quad;\quad\left(\frac{1}{a}\right)^n=\frac{1}{a^n}\quad;\quad\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

De plus pour tous $n,m\in\mathbb{N}$:

$$a^n\times a^m=a^{n+m}\quad;\quad\frac{1}{a^n}=a^{-n}\quad;\quad\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\quad;\quad(a^n)^m=a^{n\times m}$$

En particulier : $a^{n+1}=a\times a^n$; $a^{2n}=(a^2)^n=(a^n)^2$; $\frac{a}{a^n}=\frac{1}{a^{n-1}}$.

— Malheureusement $(a+b)^n$ n'est en général pas égal à a^n+b^n. Il existe toutefois une formule permettant de développer $(a+b)^n$, appelée « formule du binôme de Newton » : elle est moins élémentaire que les formules ci-dessus et sera étudiée dans un chapitre ultérieur.

2. Méthode

Les puissances ne sont pas compatibles avec les sommes et les différences. Pour simplifier une expression mélangeant puissances et sommes (ou différences), il faut donc factoriser cette expression ou réduire au même dénominateur les fractions qui y apparaissent.

3. Conseils

— Les puissances négatives peuvent être utiles dans certains cas, notamment pour trouver une primitive pour certaines fonctions (voir le chapitre sur les intégrales). Cependant si l'on rencontre des puissances négatives dans un calcul, il est souvent efficace pour avancer de les transformer en des puissances positives grâce à la formule $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$.

— On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ (-1)^n=\begin{cases}1 & \text{si } n \text{ est pair}\\ -1 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$.
En particulier, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\left|(-1)^n\right|=1\quad;\quad(-1)^{2n}=1\quad;\quad(-1)^{2n+1}=-1\quad;\quad\frac{1}{(-1)^n}=(-1)^n$$

4. Exercices

Exercice 15.
Simplifier les expressions suivantes :

$$A_n = 2^n + 2^n \quad ; \quad B_n = 2^n - 2^{n-1} \quad ; \quad C_n = 2^{-n} + 2^{-n} \quad ; \quad D_n = \frac{2^n}{2^{-n}}$$

Exercice 16.

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 2^{-1} - 3^{-2} \quad ; \quad B = \frac{3}{2^3} + \frac{2^{-2}}{4} \quad ; \quad C = \frac{\frac{1}{2^n}}{4^n} \quad ; \quad D = \frac{1}{\frac{2^n}{4^n}} \quad ; \quad E = \frac{(-1)^n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

puis :

$$F = (2^n + 2^{n-1}) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad ; \quad G = \frac{x^{2n} - 2x^{4n} + x^{6n}}{x^{2n} - 1} \quad ; \quad H = \frac{x^{2n} - 1}{x^n - 1}$$

IX. Résoudre une équation simple

1. Rappels

— On dispose d'une part des propriétés importantes suivantes :

Un produit de nombres est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$a \times b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$$

Deux fractions sont égales si et seulement si leurs « produits en croix » sont égaux.
Soit $a, c \in \mathbb{R}$ et $b, d \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = c \times b$$

— La notion de fonction bijective sert souvent.
On dit qu'une fonction f de I dans J est bijective si tout élément de J admet un unique antécédent dans I par f.
En particulier :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est bijective sur I et si $x, y \in I$, alors :

$$f(x) = f(y) \iff x = y$$

Fonctions bijectives de référence : exp de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, ln de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
Les deux sens de l'équivalence sont utiles, par exemple :
— Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $x = y \iff \ln(x) = \ln(y)$.
— Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a : $x^3 = y^3 \iff x = y$.

— La fonction $x \mapsto x^2$ n'étant pas bijective sur $\mathbb{R}$, le résultat suivant (déjà mentionné) est utile :

Soit a un réel positif et soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^2 = a \iff x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Par ailleurs si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

2. Méthode

Pour résoudre une équation d'inconnue un réel x :
— On détermine l'ensemble de validité $\mathscr{D}$ de l'équation, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que l'équation ait un sens.

Exemple 9.
— L'ensemble de validité de $(E) : x + 2 = 3 - x$ est $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ puisque l'équation (E) a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
— L'ensemble de validité de $(E') : \sqrt{x-1} = \sqrt{2x}$ est $\mathscr{D} = [1 + \infty[$ puisque l'équation (E') a un sens si et seulement si $x - 1 \geqslant 0$ et $2x \geqslant 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geqslant 1$.

— Pour $x \in \mathscr{D}$, on utilise les propriétés de la partie précédente pour modifier l'équation par des équivalences successives jusqu'à arriver à isoler x. Il est souvent utile à un moment donné de mettre les termes en x d'un côté de l'égalité et les termes constants de l'autre.

Exemple 10.
— Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x + 2 = 3 - x \iff x + x = 3 - 2 \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$$

— Soit $x \in [1, +\infty[$. Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{2x} \iff x - 1 = 2x \iff -1 = 2x - x \iff x = -1$$

— Pour conclure, il faut enfin vérifier que les solutions trouvées à l'issue des équivalences appartiennent bien au domaine de validité de l'équation.

Exemple 11.
- Le domaine de validité de $(E): x+2=3-x$ étant $\mathscr{D}=\mathbb{R}$, on déduit du calcul précédent que (E) admet une unique solution : $\frac{1}{2}$.
- Le domaine de validité de $(E'): \sqrt{x-1}=\sqrt{2x}$ étant $\mathscr{D}=[1+\infty[$, la solution -1 obtenue par le calcul précédent est à rejeter. On en déduit que (E') n'admet pas de solution.

3. Conseils

— Attention, pour pouvoir passer au carré dans une égalité - tout en conservant l'équivalence - il faut impérativement que les deux membres de l'égalité soient de même signe :

$$\forall\, a,b\in\mathbb{R}_+,\ a=b \iff a^2=b^2 \qquad ; \qquad \forall\, a,b\in\mathbb{R}_-,\ a=b \iff a^2=b^2$$

Si a et b sont de signes opposés ou si leurs signes ne sont pas connus, il n'est alors pas possible de passer au carré dans l'égalité.

— Attention à bien lire la question posée : parfois on doit prouver qu'une équation admet une unique solution sans qu'il ne soit demandé de *calculer* cette solution. Dans ce cas il n'est souvent pas possible de résoudre l'équation considérée avec les méthodes vues dans ce chapitre mais il faut utiliser le théorème de la bijection (voir le chapitre sur les fonctions).

4. Exercices

? Exercice 17.

Résoudre les équations suivantes :
- $(E_1): \dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x+1}=0$.
- $(E_2): \ln(x)+\ln(x+1)=\ln(x+2)$.
- $(E_3): 2e^{-x}-e^{-2x}=0$.

? Exercice 18.

Résoudre les équations suivantes :
1. $(x+2)^2=1$.
2. $(x+2)^3=1$.
3. $x^5-4x=0$.
4. $x^5+4x=0$.

? Exercice 19.

Résoudre les équations suivantes :
1. $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1}{2}$.
2. $\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x)=3$.
3. $\sqrt{2x-1}=x$.
4. $\sqrt{\ln(x)}=\big(\ln(x)\big)^2$.

X. Résoudre une inéquation simple

1. Rappels

— On rappelle les règles de signes suivantes :

Signe de a	Signe de b	Signe de $a\times b$	Signe de a/b
+	+	+	+
+	−	−	−
−	+	−	−
−	−	+	+

— La notion de fonction strictement croissante sert souvent :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est strictement croissante sur I et si $x,y\in I$, alors :

$$x<y \iff f(x)<f(y)$$

Fonctions strictement croissantes de référence : exp sur $\mathbb{R}$, ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, $x\mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Les deux sens de l'équivalence sont utiles, par exemple :
— Soit $x,y\in\mathbb{R}_+^*$. On a : $x<y \iff \ln(x)<\ln(y)$.
— Soit $x,y\in\mathbb{R}$. On a : $x^3\geqslant y^3 \iff x\geqslant y$.
On peut aussi appliquer aux deux membres d'une inégalité une fonction strictement décroissante, ce qui a pour conséquence de renverser le sens de l'inégalité. Ce cas intervient en particulier lors du passage à l'inverse dans une inégalité dont les membres sont de même signe.

— La fonction $x\mapsto x^2$ n'étant pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$, le résultat suivant est utile :

Soit a un réel positif et soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$x^2\leqslant a \iff -\sqrt{a}\leqslant x\leqslant\sqrt{a}$$

et :

$$x^2\geqslant a \iff x\geqslant\sqrt{a} \text{ ou } x\leqslant-\sqrt{a}$$

Ces équivalences sont aussi valables avec des inégalités strictes.

2. Méthode

Pour résoudre une inéquation d'inconnue un réel x :

- On détermine l'ensemble de validité $\mathscr{D}$ de l'inéquation, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que l'inéquation ait un sens.

Exemple 12.
— L'ensemble de validité de $(I) : \ln(x) \leqslant \ln(1-x)$ est $\mathscr{D} =]0,1[$ puisque l'inéquation (I) a un sens si et seulement si $x > 0$ et $1 - x > 0$, c'est-à-dire si et seulement $x > 0$ et $x < 1$.
— Le domaine de validité de $(I') : x^4 > x^3$ est $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

- Pour $x \in \mathscr{D}$, on utilise les propriétés de la partie précédente pour modifier l'inéquation par des équivalences successives jusqu'à arriver à l'une ou l'autre des situations suivantes :
  — On réussi à isoler x, souvent en mettant à un moment donné les termes en x d'un côté de l'inégalité et les termes constants de l'autre.
  — On aboutit à l'étude du signe d'un produit ou d'une fraction, en général en factorisant l'expression ou en réduisant au même dénominateur les fractions qui apparaissent. On en déduit les réels x solutions à l'aide d'un tableau de signes, écrit pour $x \in \mathscr{D}$.

Exemple 13.
— Soit $x \in]0,1[$. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln(x) \leqslant \ln(1-x) \iff x \leqslant 1-x \iff 2x \leqslant 1 \iff x \leqslant \frac{1}{2}$$

— Soit $x \in \mathbb{R}$. Il ne faut surtout pas diviser par x^3 dans l'inégalité $x^4 > x^3$, puisque le signe de x^3 n'est pas connu ! La bonne méthode consiste à tout mettre à gauche puis à factoriser :

$$x^4 > x^3 \iff x^4 - x^3 > 0 \iff x^3(x-1) > 0$$

On s'aide alors d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x^3(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi : $x^4 > x^3 \iff x < 0$ ou $x > 1$.

- Pour conclure, il faut enfin vérifier que les solutions trouvées à l'issue de l'étape précédente appartiennent bien au domaine de validité de l'inéquation.

Exemple 14.
— L'ensemble de validité de $(I) : \ln(x) \leqslant \ln(1-x)$ est $\mathscr{D} =]0,1[$. On déduit alors du calcul précédent que (I) admet pour ensemble de solutions : $]0, \frac{1}{2}]$.
— L'ensemble de validité de $(I') : x^4 > x^3$ est $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. On déduit alors du calcul précédent que (I') admet pour ensemble de solutions : $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

3. Conseils

Il faut souvent faire preuve de prudence lorsque l'on manipule des inégalités :

— Si l'on multiplie ou divise les deux côtés de l'inégalité par un réel α, le signe de ce réel doit être maîtrisé, notamment lorsqu'il dépend de l'inconnue x :
  — Si le réel α est strictement positif, alors l'inégalité ne change pas de sens.
  — Si le réel α est strictement négatif, alors l'inégalité change de sens.
— Pour passer à l'inverse dans une inégalité, il faut que les deux membres de l'inégalité soient de même signe, et dans ce cas le passage à l'inverse renverse le sens de l'inégalité.
— Pour passer au carré dans une inégalité, il faut que les deux membres de l'inégalité soient positifs, et dans ce cas le passage au carré conserve le sens de l'inégalité. On peut aussi éventuellement passer au carré dans une inégalité de nombres négatifs, mais dans ce cas le passage au carré renverse le sens de l'inégalité puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Dans le cas où les signes ne sont pas maîtrisés, la méthode la plus simple consiste à ramener tous les termes dans le même membre de l'inégalité, puis factoriser ou réduire au même dénominateur pour pouvoir conclure à l'aide d'un tableau de signes.

4. Exercices

? Exercice 20.
Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \frac{x+1}{x} \leqslant \frac{x}{x+1} \qquad ; \qquad (I_2) : 2e^{-x} - e^{-2x} > 0$$

? Exercice 21.

Résoudre les équations suivantes :

1. $(x+2)^2 \leqslant 1$.
2. $(x+2)^3 \leqslant 1$.
3. $\sqrt{2x-1} > x$.
4. $\sqrt{2x-1} < x$.

Exercice 22.

Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{e^x-1}{e^x+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. $\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) \leqslant 3$.
3. $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x}$.

XI. Résoudre une équation se ramenant à une équation du second degré

1. Rappels

Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
On considère l'équation du second degré suivante :

$$(E)\ :\ ax^2+bx+c=0$$

Pour résoudre l'équation (E), *dans le cas général*, on calcule dans un premier temps son discriminant :

$$\Delta = b^2-4\times a\times c$$

On discute ensuite selon le signe du discriminant Δ :

— Si $\Delta>0$, alors l'équation (E) admet deux solutions :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\times a} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\times a}$$

— Si $\Delta=0$, alors l'équation (E) admet une unique solution : $x_0=-\dfrac{b}{2\times a}$.

— Si $\Delta<0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution.

En pratique, si on peut éviter de calculer le discriminant, en utilisant par exemple une identité remarquable, on le fera sans hésiter !

2. Méthode

— La méthode de résolution d'équations vue précédemment s'applique aussi dans ce paragraphe, à ceci-près qu'ici on rencontrera une équation du second degré à un certain moment du raisonnement. Il reste important de déterminer l'ensemble de validité de l'équation avant de commencer sa résolution.

— Il arrive que l'on puisse se ramener à une équation du second degré à l'aide d'un changement d'inconnue. Cela ne pose pas de problème particulier si l'on n'oublie pas de revenir à l'inconnue initiale à la fin de la résolution.

— Parfois on peut rencontrer une équation faisant apparaître une racine carrée. Dans ce cas isoler la racine carrée d'un côté de l'égalité puis passer au carré est en général une bonne idée. Mais attention, pour conserver l'équivalence en passant au carré dans une égalité il faut vérifier que les deux membres de l'égalité sont de même signe !

3. Conseils

Le calcul du discriminant n'est pas toujours nécessaire (*on l'évite autant que possible !*) :

— Soit $a \geqslant 0$ fixé. L'équation $x^2=a$ admet pour solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

— Il est parfois possible de factoriser l'expression grâce à une identité remarquable.

Exemple 15.
On a : $x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \iff x+1=0 \iff x=-1$.

4. Exercices

Exercice 23.
Résoudre l'équation suivante : $-2x^4+3x^2+2=0$.

Exercice 24.

Résoudre les équations suivantes :

1. $2\big(\ln(x)\big)^2-3\ln(x)+1=0$.
2. $\ln(x)+\ln(x+1)=0$.
3. $e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3=0$.
4. $1-2e^x=\dfrac{e^{-x}}{3}$.
5. $x=\sqrt{2-x}$.
6. $x-\sqrt{x}=\dfrac{3}{2}$.

XII. Résoudre une inéquation se ramenant à une inéquation du second degré

1. Rappels

Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
Soit P le polynôme du second degré défini par : $\forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=ax^2+bx+c$.
Pour déterminer le signe de P, *en général*, on calcule dans un premier temps son discriminant :

$$\Delta = b^2-4\times a\times c$$

On discute ensuite selon le signe du discriminant Δ :

— Si $\Delta>0$, alors P admet deux racines distinctes x_1 et x_2 avec $x_1<x_2$. Dans ce cas P est du signe de a est l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

— Si $\Delta = 0$, alors P admet une unique racine x_0. Dans ce cas P est du signe de a :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

— Si $\Delta < 0$, alors P n'admet pas de racine. Dans ce cas P est du signe de a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

En pratique, si on peut éviter de calculer le discriminant, en utilisant par exemple une identité remarquable, on le fera sans hésiter !

2. Méthode

— Résoudre une inéquation du second degré revient à étudier le signe d'un polynôme du second degré, ce qui impose de connaître ses racines éventuelles. La résolution d'une inéquation du second degré nécessite donc en général la résolution de l'équation du second degré associé.

— La méthode de résolution d'inéquations vue précédemment s'applique aussi dans ce paragraphe, à ceci-près qu'ici on rencontrera une inéquation du second degré à un certain moment du raisonnement. Il reste important de déterminer l'ensemble de validité de l'inéquation avant de commencer sa résolution.

— Il arrive que l'on puisse se ramener à une inéquation du second degré à l'aide d'un changement d'inconnue. Cela ne pose pas de problème particulier si l'on n'oublie pas de revenir à l'inconnue initiale à la fin de la résolution.

— Parfois on peut rencontrer une inéquation faisant apparaître une racine carrée. Dans ce cas isoler la racine carrée d'un côté de l'inégalité puis passer au carré est en général une bonne idée. Mais attention, pour conserver l'équivalence lors du passage au carré dans une inégalité il faut vérifier que les deux membres de l'inégalité sont de même signe !

3. Conseils

Les cas classiques suivants sont à connaître :

— Soit $a \geqslant 0$ fixé. On a l'équivalence : $x^2 \leqslant a \iff -\sqrt{a} \leqslant x \leqslant \sqrt{a}$.

— Soit $a \geqslant 0$ fixé. On a l'équivalence : $x^2 \geqslant a \iff x \geqslant \sqrt{a}$ ou $x \leqslant -\sqrt{a}$.

Ces équivalences sont aussi valables avec des inégalités strictes.

4. Exercices

Exercice 25.

Résoudre l'inéquation suivante : $-2x^4 + 3x^2 + 2 \geqslant 0$.

Exercice 26.

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 1 > 0$.
2. $\ln(x) + \ln(x+1) \leqslant 0$.
3. $e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 > 0$.
4. $1 - 2e^x \geqslant \dfrac{e^{-x}}{3}$.
5. $x > \sqrt{2-x}$.
6. $x - \sqrt{x} = \dfrac{3}{2}$.

XIII. Solutions des exercices

Solution de 1.

Faux, Vrai, Faux, Faux, Faux, Vrai, Faux.

Solution de 2.

Par définition, $\sqrt{x^2}$ *est l'unique réel positif ou nul tel que* $(\sqrt{x^2})^2 = x^2$.
Or $|x|$ *est positif ou nul et vérifie :*

$$\begin{array}{ll} |x|^2 = x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ |x|^2 = (-x)^2 = x^2 & \text{si } x < 0 \end{array}$$

Dans tous les cas, $|x|$ *est un réel positif ou nul tel que* $|x|^2 = x^2$.
Par unicité il vient : $\sqrt{x^2} = |x|$.

Solution de 3.

1. *On calcule :*
$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$$
En divisant numérateur et dénominateur par $\cos(a)\cos(b) \neq 0$ *il vient :*
$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{\sin(b)}{\cos(b)}} = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
2. *On observe que :* $\tan(-b) = \dfrac{\sin(-b)}{\cos(-b)} = \dfrac{-\sin(b)}{\cos(b)} = -\tan(b)$.
Ainsi en remplaçant b *par* $-b$ *dans la relation précédente il vient :*
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)+\tan(-b)}{1-\tan(a)\tan(-b)} = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Solution de 4.

1. $\ln(4) = \ln(2\times 2) = 2\ln(2)$.
2. $\ln(8e) = \ln(2^3) + \ln(e) = 3\ln(2)+1$.
3. $\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(e)$.
4. $\ln(1/2)+\ln(2/3)+\ln(3/4)+\ln(4/5)+\ln(5/6) = \ln(1)-\ln(2)+\ln(2)-\ln(3)+\ln(4)-\ln(4)+\ln(5)-\ln(6) = -\ln(6)$.
5. $\ln\left((3+2\sqrt{2})^{2024}\right) + \ln\left((3-2\sqrt{2})^{2024}\right) = \ln\left(\left((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right)^{2024}\right) = \ln\left(\left(3^2-(2\sqrt{2})^2\right)^{2024}\right) = \ln\left((9-8)^{2024}\right) = \ln(1^{2024}) = \ln(1) = 0$.

Solution de 5.

1. *Si* $\alpha \in \mathbb{N}$, *notons pour simplifier* $n = \alpha$.
D'après le rappel de cours : $\ln(x^\alpha) = \ln(x^n) = n\ln(x)$. *Ainsi* $e^{n\ln(x)} = e^{\ln(x^n)} = x^n = \underbrace{x\times\cdots\times x}_{n=\alpha\in\mathbb{N}\text{ facteurs}}$ *(on utilise le fait que pour tout réel* $y>0$, $e^{\ln(y)} = y$, *avec ici* $y = x^n$*).*
Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, *alors* $x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)} = e^{-\left(-\alpha\ln(x)\right)} = \frac{1}{e^{-\alpha\ln(x)}} = \frac{1}{x^{-\alpha}}$.
2. *On calcule directement :*
$$\ln(a^b) \underset{\text{déf. de } a^b}{=} \ln(e^{b\ln(a)}) \underset{\text{car } \ln(e^y)=y}{=} b\ln(a)$$
3. *On calcule en exploitant les propriétés de l'exponentielle :*
$$a^b a^c = e^{b\ln(a)}e^{c\ln(a)} = e^{b\ln(a)+c\ln(a)} = e^{(b+c)\ln(a)} = a^{b+c}$$
puis
$$\frac{a^b}{a^c} = \frac{e^{b\ln(a)}}{e^{c\ln(a)}} = e^{b\ln(a)-c\ln(a)} = e^{(b-c)\ln(a)} = a^{b-c}$$
La relation de la question précédente donne enfin :
$$(a^b)^c = e^{c\ln(a^b)} = e^{cb\ln(a)} = a^{bc}$$
4. — *Si* $\alpha < 0$.
Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha\ln(x) = +\infty$ *puis par composition des limites avec l'exponentielle il vient* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha\ln(x) = -\infty$ *puis par composition des limites avec l'exponentielle il vient* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$.
— *Si* $\alpha = 0$, *alors* $x^\alpha = x^0 = 1$, *donc en tant que fonction constante égale à* 1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *les limites en* 0^+ *et* $+\infty$ *de* $x \mapsto x^\alpha$ *sont égales à* 1.
— *Si* $\alpha > 0$.
Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha\ln(x) = -\infty$ *puis par composition des limites avec l'exponentielle il vient* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha\ln(x) = +\infty$ *puis par composition des limites avec l'exponentielle il vient* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$.
5. *(On admet la dérivabilité de* $x \mapsto x^\alpha$, *nous apprendrons dans l'année à justifier cela proprement).*
La formule de dérivation composée pour l'exponentielle donne :
$$[x^\alpha]' = [e^{\alpha\ln(x)}]' = [\alpha\ln(x)]' \times e^{\alpha\ln(x)} = \alpha\frac{1}{x}x^\alpha = \alpha x^{-1}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

Solution de 6.

1. *On étudie le signe de la différence :*
$$\frac{2}{7} - \frac{3}{8} = \frac{2\times 8}{7\times 8} - \frac{3\times 7}{8\times 7} = \frac{16-21}{56} = -\frac{5}{56} \leqslant 0 \quad \textit{d'où :}\ \frac{2}{7} \leqslant \frac{3}{8}$$
2. *On étudie le signe de la différence. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a :*
$$(1+x)^2 - 4x = (1+2x+x^2) - 4x = 1-2x+x^2 = (1-x)^2 \geqslant 0$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)^2 \geqslant 4x$.

3. *On a :* $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, *donc :* $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant 2+\cos(x) \leqslant 3$.
   De même : $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, *donc :* $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < 1 \leqslant 2+\sin(x) \leqslant 3$.
   Par inverse de nombres strictement positifs, il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ \dfrac{1}{1} \geqslant \dfrac{1}{2+\sin(x)} \geqslant \dfrac{1}{3}$.
   Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant 2+\cos(x) \leqslant 3$ *et* $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{1}{2+\sin(x)} \leqslant 1$.
   En multipliant ces inégalités de nombres positifs, on obtient le résultat demandé :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{3} \leqslant \frac{2+\cos(x)}{2+\sin(x)} \leqslant 3$$
4. *On étudie les variations de la fonction* $f : x \mapsto 2\ln(x) - x$ *pour en déduire son signe.*
   f *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et on a :*
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$$
   Ainsi $f'(x)$ *est du signe de* $2-x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et on a :*

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$2(\ln(2)-1)$	$\searrow$	

$$\begin{aligned} f(2) &= 2\ln(2) - 2 \\ &= 2(\ln(2)-1) \end{aligned}$$

   Or $\ln(2) \approx 0{,}7$ *donc :* $2(\ln(2)-1) < 0$.
   On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leqslant 2(\ln(2)-2) < 0$.
   Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2\ln(x) - x < 0$, *et finalement :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2\ln(x) < x$.
   Notons qu'il n'a pas été nécessaire de calculer les limites de f *en* 0 *et en* $+\infty$.

Solution de 7.

1. — *On calcule :* $\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{2}{\ln(3)} = \dfrac{\ln(3) - 2\ln(2)}{\ln(2)\times\ln(3)} = \dfrac{\ln(3) - \ln(2^2)}{\ln(2)\times\ln(3)} = \dfrac{\ln(3)-\ln(4)}{\ln(2)\times\ln(3)}$.
   Comme $2 > 1$ *et* $3 > 1$, *on a* $\ln(2) > 0$ *et* $\ln(3) > 0$.
   De plus comme $\ln$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on a :* $\ln(3) < \ln(4)$.
   On en déduit que : $\dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{2}{\ln(3)} = \dfrac{\ln(3)-\ln(4)}{\ln(2)\times\ln(3)} < 0$, *d'où :* $\dfrac{1}{\ln(2)} < \dfrac{2}{\ln(3)}$.
   — *On calcule :* $\dfrac{e-1}{2e-3} - 1 = \dfrac{(e-1)-(2e-3)}{2e-3} = \dfrac{2-e}{2e-3}$.
   Comme $e \approx 2{,}7$, *on a aussi* $2e > 4$, *donc* $2-e<0$ *et* $2e-3>0$.
   On en déduit que : $\dfrac{e-1}{2e-3} - 1 = \dfrac{2-e}{2e-3} < 0$, *d'où :* $\dfrac{e-1}{2e-3} < 1$.
2. — *On a :* $25 < 29 < 36$.
   Par stricte croissance de $t \mapsto t^2$ *sur* $\mathbb{R}_+$, *il vient :* $\sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36}$.
   Ainsi : $5 < \sqrt{29} < 6$.
   — *De même on a :* $64 < 73 < 81$, *donc :* $8 = \sqrt{64} < \sqrt{73} < \sqrt{81} = 9$.
   En multipliant par -1 (<0), *il vient :* $-8 > -\sqrt{73} > -9$.
   On ajoute 16 *dans chaque membre de l'inégalité :* $8 > 16 - \sqrt{73} > 7$.
   En multipliant par $\dfrac{1}{3}$ (>0), *il vient :* $\dfrac{8}{3} > \dfrac{16-\sqrt{73}}{3} > \dfrac{7}{3}$.
   En particulier : $\dfrac{9}{3} > \dfrac{8}{3} > \dfrac{16-\sqrt{73}}{3} > \dfrac{7}{3} > \dfrac{6}{3}$, *d'où :* $3 > \dfrac{16-\sqrt{73}}{3} > 2$.

Solution de 8.

1. *On a pour tout* $x \in]3,+\infty[$ *:* $\dfrac{7x-18}{2x-5} - 3 = \dfrac{(7x-18)-3(2x-5)}{2x-5} = \dfrac{x-3}{2x-5} > 0$.
   D'où : $\forall x \in]3,+\infty[,\ \dfrac{7x-18}{2x-5} > 3$.
2. *On a :* $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant 1 \leqslant e^x$.
   En ajoutant e^x, *il vient :* $\forall x \in [0,+\infty[,\ e^x \leqslant 1 + e^x \leqslant 2e^x$.
   Par croissance de $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on obtient :* $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ln(e^x) \leqslant \ln(1+e^x) \leqslant \ln(2e^x)$.
   Or $\ln(e^x) = x$ *et* $\ln(2e^x) = \ln(2) + \ln(e^x) = \ln(2) + x$.
   On a donc bien : $\forall x \in [0,+\infty[,\ x \leqslant \ln(1+e^x) \leqslant x + \ln(2)$.
3. *On étudie les variations de la fonction* $f : x \mapsto x - 1 + e^{-x}$ *pour en déduire son signe.*
   f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a :* $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - e^{-x}$.
   Par stricte croissance de $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on a pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*
   $$f'(x) > 0 \iff 1 > e^{-x} \iff \ln(1) > \ln(e^{-x}) \iff 0 > -x \iff 0 < x$$
   Ainsi :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$f(0) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$$

   On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.
   Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 + e^{-x} \geqslant 0$, *et finalement :* $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1 - e^{-x}$.

Solution de 9.

On étudie le signe de la différence (comme $t \geqslant 1$, *on a* $t = (\sqrt{t})^2$*) :*

$$\begin{aligned} 2f(\sqrt{t}) - f(t) &= \frac{t-1}{\sqrt{t}} - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{2(t-1)\sqrt{t}}{2t} - \frac{(t-1)(t+1)}{2t} = \frac{t-1}{2t}\left(2\sqrt{t} - t - 1\right) \\ &= -\frac{t-1}{2t}(\sqrt{t}-1)^2 \leqslant 0 \end{aligned}$$

puisque $t \geqslant 1$, *donc* $t - 1 \geqslant 0$.
Finalement on a bien démontré que : $\forall t \geqslant 1,\ 2f(\sqrt{t}) \leqslant f(t)$

Solution de 10.

1. *Pour* $x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, *on a les équivalences :*

$$\begin{aligned}
&\frac{x+1}{x'+1}=\frac{x-1}{x'-1} && \\
\iff\ & \frac{(x+1)(x'-1)}{x'+1}=x-1 && \left(\text{en multipliant de chaque côté par } x'-1\ (\neq 0)\right)\\
\iff\ & (x+1)(x'-1)=(x-1)(x'+1) && \left(\text{en multipliant de chaque côté par } x'+1\ (\neq 0)\right)\\
\iff\ & xx'-x+x'-1=xx'+x-x'-1 && (\text{en développant})\\
\iff\ & 2x'=2x && (\text{en simplifiant et réorganisant})\\
\iff\ & x'=x && (\text{en simplifiant par } 2\ (\neq 0))
\end{aligned}$$

2. *Soit $a,b\in\mathbb{R}$. Prouvons l'équivalence demandée en procédant par double-implication.*
   — *Implication $\Leftarrow$:*
   On suppose que $a=b=0$.
   On a alors immédiatement : $a^2+b^2=0^2+0^2=0+0=0$.
   On a ainsi prouvé que si $a=b=0$, alors $a^2+b^2=0$.
   — *Implication $\Rightarrow$:*
   Il ne paraît pas simple de prouver directement que si $a^2+b^2=0$, alors $a=b=0$.
   Essayons donc de prouver la contraposée.
   Pour cela on suppose que l'on n'a pas $a=b=0$, c'est-à-dire que $a\neq 0$ ou $b\neq 0$.
   Si $a\neq 0$, alors on a $a^2>0$. De plus par propriété d'un carré, on a $b^2\geqslant 0$.
   Ainsi $a^2+b^2>0$, et notamment $a^2+b^2\neq 0$.
   De même si $b\neq 0$, alors $a^2+b^2\neq 0$.
   On a ainsi prouvé que si $a\neq 0$ ou $b\neq 0$, alors $a^2+b^2\neq 0$.
   Par contraposition, on en déduit que si $a^2+b^2=0$, alors $a=b=0$.

   Par double-implication, on en déduit que pour tous $a,b\in\mathbb{R}$:

$$a^2+b^2=0 \iff a=b=0$$

> *De façon plus générale, on pourra retenir qu'une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si tous ces nombres sont nuls.*

Solution de 11.

1. *Soit $x\in\mathbb{R}$. L'équivalence « $x\leqslant 2\iff x^2\leqslant 4$ » est fausse.*
   L'implication $\Rightarrow$ est fausse. Par exemple si $x=-5$, alors $x\leqslant 2$ et pourtant on n'a pas $x^2\leqslant 4$ puisque ici $x^2=25$.
   L'implication $\Leftarrow$ est vraie, puisque si $x^2\leqslant 4$, alors par propriété de la fonction $t\mapsto t^2$ on sait que cela implique $-2\leqslant x\leqslant 2$, et en particulier on a $x\leqslant 2$.
   Les équivalences suivantes sont correctes :
   — *Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On a : $x\leqslant 2\iff x^2\leqslant 4$ (par stricte croissance de $t\mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$).*
   — *Soit $x\in\mathbb{R}$. On a : $-2\leqslant x\leqslant 2\iff x^2\leqslant 4$ (par propriété de la fonction $t\mapsto t^2$).*
2. *Soit $x\in\mathbb{R}$. L'équivalence « $x\leqslant 2\iff x^3\leqslant 8$ » est vraie.*
   Elle est une conséquence de la stricte croissance de la fonction $t\mapsto t^3$ sur $\mathbb{R}$.
3. *Soit $x\in\mathbb{R}$. L'équivalence « $x\geqslant 1\iff x^2+x+1\geqslant 3$ » est fausse.*
   L'implication $\Rightarrow$ est vraie. En effet, si $x\geqslant 1$, alors par stricte croissance de $t\mapsto t^2$ sur $\mathbb{R}_+$ on a aussi $x^2\geqslant 1$, d'où : $x^2+x+1\geqslant 1+1+1=3$.
   L'implication $\Leftarrow$ est fausse. En effet on a : $x^2+x+1\geqslant 3\iff x^2+x-2\geqslant 0$. Or à l'aide du discriminant on trouve que les racines du trinôme $x\mapsto x^2+x-2$ sont 1 et -2. Son coefficient dominant 1 étant positif, il vient :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Ainsi $x^2+x-2\geqslant 0$ implique $x\geqslant 1$ ou $x\leqslant -2$, ce deuxième cas n'étant pas pris en compte dans l'équivalence.
4. *Soit $x\in\mathbb{R}$. L'équivalence « $\frac{1}{\ln(1+x)}$ existe $\iff 1+x>0$ » est fausse.*
   L'implication $\Rightarrow$ est vraie, puisque le domaine de définition de la fonction $\ln$ étant $\mathbb{R}_+^*$, pour que $\frac{1}{\ln(1+x)}$ existe il faut obligatoirement avoir $1+x>0$.
   L'implication $\Leftarrow$ est fausse, puisque savoir que $1+x>0$ ne suffit pas pour savoir que $\frac{1}{\ln(1+x)}$ existe : il faut aussi que le dénominateur soit non nul, c'est-à-dire que $1+x\neq 1$.
5. *Soit $a,b\in\mathbb{R}$. L'équivalence « $(a+b)^2=(a-b)^2\iff a=0$ ou $b=0$ » est vraie.*
   En effet on a les équivalences :

$$(a+b)^2=(a-b)^2 \iff a^2+b^2+2ab=a^2+b^2-2ab \iff 4ab=0$$

   Comme un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, il vient bien :

$$(a+b)^2=(a-b)^2 \iff a=0 \text{ ou } b=0$$

Solution de 12.

1. *Soit $n\in\mathbb{N}$. Prouvons l'équivalence demandée en procédant par double-implication.*
   — *Implication $\Leftarrow$:*
   On suppose que n est pair : il existe un entier k tel que $n=2\times k$.
   Alors $n^2=4k^2=2\times k'$ où $k'=2k^2$ est un entier, ce qui prouve que n^2 est pair.
   On a ainsi prouvé que si n est pair, alors n^2 est pair.
   — *Implication $\Rightarrow$:*
   Il ne paraît pas simple de prouver directement que si n^2 est pair, alors n est pair.
   Essayons donc de prouver la contraposée.
   Pour cela on suppose que n n'est pas pair, c'est-à-dire que n est impair : il existe un entier k tel que $n=2\times k+1$.
   Alors avec l'identité remarquable habituelle il vient :

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2\times(2k^2+2k)+1$$

   En posant $k'=2k^2+2k$, il vient : $n^2=2\times k'+1$, où k' est un entier.
   On en déduit que n^2 est impair.
   On a ainsi prouvé que si n est impair, alors n^2 est impair.
   Par contraposition, on en déduit que si n^2 est pair, alors n est pair.

   Par double-implication, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$n^2 \text{ est pair} \iff n \text{ est pair}$$

2. *Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 qui s'annule en 0. Prouvons l'équivalence demandée en procédant par double-implication.*
   — *Implication $\Longrightarrow$:*
   On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R},\, P(x+1) - P(x-1) = x$.
   P est de degré $\leqslant 2$ et s'annule en 0, donc : $\forall x \in \mathbb{R},\, P(x) = ax^2 + bx$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$.
   Il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\, a(x+1)^2 + b(x+1) - a(x-1)^2 - b(x-1) = x$.
   Après simplification, il reste : $\forall x \in \mathbb{R},\, 4ax + 2b = x$.
   En particulier pour $x = 0$ on obtient $2b = 0$, donc $b = 0$.
   L'égalité précédente devient alors : $\forall x \in \mathbb{R},\, 4ax = x$.
   En particulier pour $x = 1$ on obtient $4a = 1$, donc $a = \frac{1}{4}$.
   On a ainsi prouvé que si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x-1) = x$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \frac{1}{4}x^2$.
   — *Implication $\Longleftarrow$:*
   On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R},\, P(x) = \frac{1}{4}x^2$.
   Avec l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, il vient pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$P(x+1) - P(x-1) = \frac{1}{4}\Big((x+1)^2 - (x-1)^2\Big) = \frac{1}{4}\Big((x+1) - (x-1)\Big)\Big((x+1) + (x-1)\Big) = \frac{1}{4} \times 2 \times 2x = x$$
   On a ainsi prouvé que si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \frac{1}{4}x^2$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x+1) - P(x-1) = x$.
   Par double-implication, on a ainsi prouvé que pour tout polynôme P de degré $\leqslant 2$ qui s'annule en 0, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R},\, P(x+1) - P(x-1) = x \iff \forall x \in \mathbb{R},\, P(x) = \frac{1}{4}x^2$$

Solution de 13.

— *Le plus petit multiple commun de 6 et de 4 est 12. Ainsi :*
$$A = \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{2}{12} - \frac{3}{12}}{2} = \frac{-\frac{1}{12}}{\frac{2}{1}} = -\frac{1}{12} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{24}$$
— *Le plus petit multiple commun de 5 et de 15 est 15. Ainsi :*
$$B = \frac{\frac{1}{5} + \frac{4}{15}}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{3}{15} + \frac{4}{15}}{\frac{5}{5} + \frac{2}{5}} = \frac{\frac{7}{15}}{\frac{7}{5}} = \frac{7}{15} \times \frac{5}{7} = \frac{1}{3}$$
— *On a :* $C = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{2 \times \sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \times \sqrt{\pi}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Solution de 14.

— *On a :* $f(x) = \dfrac{4x^2}{1 - \frac{2-x}{2+x}} = \dfrac{4x^2}{\frac{2+x}{2+x} - \frac{2-x}{2+x}} = \dfrac{4x^2}{\frac{(2+x)-(2-x)}{2+x}} = \dfrac{\frac{4x^2}{1}}{\frac{2x}{2+x}} = \dfrac{4x^2}{1} \times \dfrac{2+x}{2x}$.
Finalement : $f(x) = 2x \times (2+x)$.

On aura noté que le trait de fraction joue le rôle de parenthèses :
$$\frac{a}{c} - \frac{b-d}{c} = \frac{a - (b-d)}{c}$$

— *On a :* $g(x) = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{1-x} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{-(x-1)} = \dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x}{x-1} = 0$.
On retiendra le résultat important suivant :

Le nombre $a - b$ est l'opposé du nombre $b - a$.
Ainsi : $a - b = -(b-a)$.

— *On a :* $h(x) = \dfrac{6x+4}{4-x^2} - \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{6x+4}{(2-x)(2+x)} - \dfrac{x}{2+x}$.
Il vient : $h(x) = \dfrac{6x+4}{(2-x)(2+x)} - \dfrac{x(2-x)}{(2+x)(2-x)} = \dfrac{(6x+4) - x(2-x)}{(2-x)(2+x)}$.
Finalement : $h(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{(2-x)(2+x)} = \dfrac{(x+2)^2}{(2-x)(2+x)} = \dfrac{x+2}{2-x}$.

— *On a :* $u(x) = \dfrac{e^{2x} + 2e^x + 1}{1 + e^{-x}} = \dfrac{(e^x)^2 + 2e^x + 1}{1 + \frac{1}{e^x}} = \dfrac{(e^x+1)^2}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \dfrac{\frac{(e^x+1)^2}{1}}{\frac{e^x+1}{e^x}}$.
Ainsi : $u(x) = \dfrac{(e^x+1)^2}{1} \times \dfrac{e^x}{e^x+1} = (e^x+1) \times e^x$.

— *On a :* $v(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x} + e^x}{e^{-2x} + e^{-x}}\right) = \ln\left(\dfrac{(e^x)^2 + e^x}{\frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{e^x}}\right) = \ln\left(\dfrac{e^x(e^x+1)}{\frac{1}{(e^x)^2} + \frac{1}{e^x}}\right)$.
Ainsi : $v(x) = \ln\left(\dfrac{\frac{e^x(e^x+1)}{1}}{\frac{1+e^x}{(e^x)^2}}\right) = \ln\left(\dfrac{e^x(e^x+1)}{1} \times \dfrac{(e^x)^2}{1+e^x}\right)$.
Finalement : $v(x) = \ln\big((e^x)^3\big) = \ln(e^{3x}) = 3x$.

Solution de 15.

— *On a :* $A_n = 2^n + 2^n = 2^n \times (1+1) = 2^n \times 2 = 2^{n+1}$.
— *On a :* $B_n = 2^n - 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} - 2^{n-1} = 2^{n-1} \times (2-1) = 2^{n-1}$.
— *On a :* $C_n = 2^{-n} + 2^{-n} = \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1+1}{2^n} = \dfrac{2}{2^n} = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
— *On a :* $D_n = \dfrac{2^n}{2^{-n}} = 2^n \times \dfrac{1}{2^{-n}} = 2^n \times 2^n = 2^{n+n} = 2^{2n}$.
On peut éventuellement poursuivre le calcul en écrivant : $D_n = (2^2)^n = 4^n$.

Solution de 16.

— *On a :* $A = 2^{-1} - 3^{-2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{9}{18} - \dfrac{2}{18} = \dfrac{7}{18}$.

— *On a :* $B = \dfrac{3}{2^3} + \dfrac{2^{-2}}{4} = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{4} \times 2^{-2} = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{3}{8} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{6}{16} + \dfrac{1}{16} = \dfrac{7}{16}$.

— *On a :* $C = \dfrac{\frac{1}{2^n}}{4^n} = \dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{4^n}{1}} = \dfrac{1}{2^n} \times \dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1}{2^n \times 4^n} = \dfrac{1}{(2\times 4)^n} = \dfrac{1}{8^n} = \dfrac{1}{(2^3)^n} = \dfrac{1}{2^{3n}}$.

— *On a :* $D = \dfrac{1}{\frac{2^n}{4^n}} = \dfrac{4^n}{2^n} = \dfrac{(2^2)^n}{2^n} = \dfrac{2^{2n}}{2^n} = 2^{2n-n} = 2^n$.

— *On a :* $E = \dfrac{(-1)^n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{\frac{(-1)^n}{1}}{\frac{(-1)^n}{2^n}} = \dfrac{(-1)^n}{1} \times \dfrac{2^n}{(-1)^n} = 2^n$.

— *On a :* $F = (2^n + 2^{n-1}) \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 2^{n-1} \times (2+1) \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 2^{n-1} \times 3 \times \dfrac{1}{3^n}$.

Ainsi : $F = 2^{n-1} \times \dfrac{1}{3^{n-1}} = \dfrac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

— *On a :* $G = \dfrac{x^{2n} - 2x^{4n} + x^{6n}}{x^{2n}-1} = \dfrac{x^{2n} - 2(x^{2n})^2 + (x^{2n})^3}{x^{2n}-1}$.

On peut mettre x^{2n} en facteur : $G = \dfrac{x^{2n} \times \left(1 - 2x^{2n} + (x^{2n})^2\right)}{x^{2n}-1}$.

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ *:*

$$G = \frac{x^{2n} \times (1 - x^{2n})^2}{x^{2n}-1} = \frac{x^{2n} \times \left(-(x^{2n}-1)\right)^2}{x^{2n}-1} = \frac{x^{2n} \times (-1)^2 \times (x^{2n}-1)^2}{x^{2n}-1}$$

Finalement : $G = x^{2n} \times (x^{2n}-1)$.

> *On retiendra que si $a, b \in \mathbb{R}$, alors :* $a - b = -(b-a)$ *et* $(a-b)^2 = (b-a)^2$.

— *En reconnaissant l'identité remarquable* $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$*, on a :*

$$H = \frac{x^{2n}-1}{x^n-1} = \frac{(x^n)^2 - 1^2}{x^n - 1} = \frac{(x^n-1)(x^n+1)}{x^n-1} = x^n + 1$$

Solution de 17.

— *L'ensemble de validité de* (E_1) *est* $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$*, puisque les dénominateurs doivent être non nuls.*
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$*. On a :*

$$(E_1) \iff \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x+1} \iff (x+1)\times(x+1) = x \times x \iff (x+1)^2 = x^2$$

Ainsi :

$$(E_1) \iff x^2 + 2x + 1 = x^2 \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$$

Comme $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$*, l'équation* (E_1) *admet une unique solution :* $-\frac{1}{2}$.

— *L'ensemble de validité de* (E_2) *est* $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$*, puisqu'on doit avoir* $x > 0$ *et* $x+1 > 0$ *et* $x+2 > 0$ *pour que les logarithmes soient définis.*
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$*. Comme* $t \mapsto \ln(t)$ *est bijective sur* $\mathbb{R}_+^*$*, on a :*

$$(E_2) \iff \ln\bigl(x \times (x+1)\bigr) = \ln(x+2) \iff x \times (x+1) = x + 2$$

Ainsi :

$$(E_2) \iff x^2 + x = x + 2 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Comme $\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $-\sqrt{2} \notin \mathbb{R}_+^*$*, l'équation* (E_2) *admet une unique solution :* $\sqrt{2}$.

— *L'ensemble de validité de* (E_3) *est* $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$*. Comme* $t \mapsto \ln(t)$ *est bijective sur* $\mathbb{R}_+^*$*, on a :*

$$(E_3) \iff 2e^{-x} = e^{-2x} \iff \ln(2e^{-x}) = \ln(e^{-2x})$$

Avec les propriétés du logarithme, il vient :

$$(E_3) \iff \ln(2) + \ln(e^{-x}) = \ln(e^{-2x}) \iff \ln(2) - x = -2x$$

Finalement :

$$(E_3) \iff -x + 2x = -\ln(2) \iff x = -\ln(2)$$

Ainsi l'équation (E_3) *admet une unique solution :* $-\ln(2)$.

Solution de 18.

Dans cet exercice, l'ensemble de validité des équations est $\mathbb{R}$.

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. On a d'après le rappel :*

$$(x+2)^2 = 1 \iff x+2 = 1 \text{ ou } x+2 = -1 \iff x = -1 \text{ ou } x = -3$$

Ainsi l'équation $(x+2)^2 = 1$ *admet deux solutions :* -1 *et* -3.

Remarque : on pouvait aussi développer, passer tout du même côté et factoriser, mais c'est maladroit ; on pouvait aussi tout mettre du même côté et utiliser une identité remarquable, mais c'est aussi un peu plus long.

2. *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. Comme* $t \mapsto t^3$ *est bijective sur* $\mathbb{R}$*, on a :*

$$(x+2)^3 = 1 \iff (x+2)^3 = 1^3 \iff x+2 = 1 \iff x = -1$$

Ainsi l'équation $(x+2)^3 = 1$ *admet une unique solution :* -1.

3. *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. On a :*

$$x^5 - 4x = 0 \iff x \times (x^4 - 4) = 0 \iff x \times \left((x^2)^2 - 2^2\right) = 0$$

On peut factoriser avec l'identité remarquable :

$$x^5 - 4x = 0 \iff x \times (x^2 - 2) \times (x^2 + 2) = 0$$

Comme un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, il vient :

$$x^5 - 4x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^2 = 2 \text{ ou } x^2 = -2$$

Il n'est pas possible d'avoir $x^2 = -2$*. Finalement :*

$$x^5 - 4x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Ainsi l'équation $x^5 - 4x = 0$ *admet trois solutions :* 0, $\sqrt{2}$ *et* $-\sqrt{2}$.

4. *Soit* $x \in \mathbb{R}$*. On a :*

$$x^5 + 4x = 0 \iff x \times (x^4 + 4) = 0$$

Or : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^4 \geqslant 0$*, donc :* $\forall x \in \mathbb{R},\ x^4 + 4 > 0$.

Le facteur x^4+4 étant non nul, il vient :

$$x^5+4x=0 \iff x=0$$

Ainsi l'équation $x^5+4x=0$ admet une unique solution : 0.

Solution de 19.

1. *On a :* $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x>0$, *donc :* $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x+1\neq 0$.
   L'ensemble de validité de l'équation est $\mathbb{R}$.
   Soit $x\in\mathbb{R}$. On a :
   $$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1}{2} \iff (e^x-1)\times 2=1\times(e^x+1) \iff 2e^x-2=e^x+1$$
   On met les termes en e^x d'un côté et les termes constants de l'autre :
   $$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1}{2} \iff 2e^x-e^x=1+2 \iff e^x=3$$
   Comme la fonction $t\mapsto \ln(t)$ est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient enfin :
   $$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{1}{2} \iff \ln(e^x)=\ln(3) \iff x=\ln(3)$$
   Ainsi l'équation $\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac12$ admet une unique solution : $\ln(3)$.
2. *L'équation $\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x)=3$ est bien définie si et seulement si $x>0$ et $2x>0$ et $3x>0$, c'est-à-dire si et seulement si $x>0$.*
   Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. On a :
   $$\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x)=3 \iff \ln\big(x\times 2x\times 4x\big)=3 \iff \ln(8x^3)=3$$
   Comme la fonction $t\mapsto e^t$ est bijective sur $\mathbb{R}$, on obtient :
   $$\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x)=3 \iff e^{\ln(8x^3)}=e^3 \iff 8x^3=e^3 \iff x^3=\frac{e^3}{2^3}$$
   Comme la fonction $t\mapsto t^3$ est bijective sur $\mathbb{R}$, il vient enfin :
   $$\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x)=3 \iff x^3=\left(\frac{e}{2}\right)^3 \iff x=\frac{e}{2}$$
   On vérifie que $\frac{e}{2}\in\mathbb{R}_+^*$.
   Ainsi l'équation $\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x)=3$ admet une unique solution : $\frac{e}{2}$.
3. *L'équation $\sqrt{2x-1}=x$ est bien définie si et seulement si $2x-1\geqslant 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x\geqslant\frac12$.*
   Soit $x\in[\frac12,+\infty[$. Comme $t\mapsto t^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a :
   $$\sqrt{2x-1}=x \iff \big(\sqrt{2x-1}\big)^2=x^2 \iff 2x-1=x^2 \iff x^2-2x+1=0$$
   En reconnaissant une identité remarquable, il vient :
   $$\sqrt{2x-1}=x \iff (x-1)^2=0 \iff x-1=0 \iff x=1$$
   Comme $1\in[\frac12,+\infty[$, l'équation $\sqrt{2x-1}=x$ admet une unique solution : 1.
4. *L'équation $\sqrt{\ln(x)}=\big(\ln(x)\big)^2$ a un sens si et seulement si $x>0$ et $\ln(x)\geqslant 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x\geqslant 1$.*
   Soit $x\in[1,+\infty[$. Comme $t\mapsto t^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a :
   $$\sqrt{\ln(x)}=\big(\ln(x)\big)^2 \iff \big(\sqrt{\ln(x)}\big)^2=\Big(\big(\ln(x)\big)^2\Big)^2 \iff \ln(x)=\big(\ln(x)\big)^4$$
   On ramène tout à gauche et on factorise :
   $$\sqrt{\ln(x)}=\big(\ln(x)\big)^2 \iff \ln(x)-\big(\ln(x)\big)^4=0 \iff \ln(x)\times\Big(1-\big(\ln(x)\big)^3\Big)=0$$
   Comme un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, on obtient :
   $$\sqrt{\ln(x)}=\big(\ln(x)\big)^2 \iff \ln(x)=0 \textit{ ou } 1-\big(\ln(x)\big)^3=0$$
   Autrement dit :
   $$\sqrt{\ln(x)}=\big(\ln(x)\big)^2 \iff x=1 \textit{ ou } \big(\ln(x)\big)^3=1^3$$
   Comme la fonction $t\mapsto t^3$ est bijective sur $\mathbb{R}$, on a finalement :
   $$\sqrt{\ln(x)}=\big(\ln(x)\big)^2 \iff x=1 \textit{ ou } \ln(x)=1 \iff x=1 \textit{ ou } x=e$$
   On vérifie que $1\in[1,+\infty[$ et $e\in[1,+\infty[$.
   Ainsi l'équation $\sqrt{\ln(x)}=\big(\ln(x)\big)^2$ admet deux solutions : 1 et e.

Solution de 20.

— *L'ensemble de validité de (I_1) est $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, puisque les dénominateurs doivent être non nuls.*
Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. Il ne faut surtout pas multiplier par x et par $x+1$ dans l'inégalité, puisque les signes de x et de $x+1$ ne sont pas connus ! La bonne méthode consiste à tout mettre à gauche puis à réduire au même dénominateur :
$$(I_1) \iff \frac{x+1}{x}-\frac{x}{x+1}\leqslant 0 \iff \frac{(x+1)\times(x+1)-x\times x}{x\times(x+1)}\leqslant 0$$
Ainsi :
$$(I_1) \iff \frac{(x+1)^2-x^2}{x(x+1)}\leqslant 0 \iff \frac{2x+1}{x(x+1)}\leqslant 0$$
On s'aide d'un tableau de signes, construit pour x dans l'ensemble de validité $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$:

x	$-\infty$		-1		$-\frac12$		0		$+\infty$
x		$-$	$\|\|$	$-$	$\|$	$-$	$\|\|$	$+$	
$x+1$		$-$	$\|\|$	$+$	$\|$	$+$	$\|\|$	$+$	
$2x+1$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$\frac{2x+1}{x(x+1)}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Ainsi : $(I_1) \iff \frac{2x+1}{x(x+1)}\leqslant 0 \iff x<-1$ *ou* $-\frac12\leqslant x<0$.
L'inéquation (I_1) admet donc pour ensemble de solutions : $]-\infty,-1[\,\cup\,[-\frac12,0[$.

— *L'ensemble de validité de (I_2) est $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.*
Soit $x\in\mathbb{R}$. Comme $t\mapsto\ln(t)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :
$$(I_2) \iff 2e^{-x}>e^{-2x} \iff \ln(2e^{-x})>\ln(e^{-2x})$$
Avec les propriétés du logarithme, il vient :
$$(I_2) \iff \ln(2)+\ln(e^{-x})>\ln(e^{-2x}) \iff \ln(2)-x>-2x$$
Finalement :

$$(I_2) \iff -x+2x>-\ln(2) \iff x>-\ln(2)$$

Ainsi l'inéquation (I_2) *admet pour ensemble de solutions :* $]-\ln(2),+\infty[$.

Solution de 21.

1. *L'inéquation* $(x+2)^2 \leqslant 1$ *a un sens pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $t^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant t \leqslant 1$, *on a :*
   $$(x+2)^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x+2 \leqslant 1 \iff -3 \leqslant x \leqslant -1$$
   Ainsi l'inéquation $(x+2)^2 \leqslant 1$ *admet pour ensemble de solutions :* $[-3,-1]$.
2. *L'inéquation* $(x+2)^3 \leqslant 1$ *a un sens pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $t \mapsto t^3$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *on a :*
   $$(x+2)^3 \leqslant 1 \iff (x+2)^3 \leqslant 1^3 \iff x+2 \leqslant 1 \iff x \leqslant -1$$
   Ainsi l'inéquation $(x+2)^3 \leqslant 1$ *admet pour ensemble de solutions :* $]-\infty,-1]$.
3. *L'inéquation* $\sqrt{2x-1} > x$ *a un sens si et seulement si* $2x-1 \geqslant 0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x \geqslant \frac{1}{2}$.
   Soit $x \in [\frac{1}{2},+\infty[$. *Comme* $t \mapsto t^2$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$, *on a :*
   $$\sqrt{2x-1} > x \iff \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 > x^2 \iff 2x-1 > x^2 \iff 0 > x^2-2x+1$$
   En reconnaissant une identité remarquable, il vient :
   $$\sqrt{2x-1} > x \iff 0 > (x-1)^2$$
   Or un carré est toujours positif, donc cette dernière inégalité n'est jamais vérifiée.
   Ainsi l'inéquation $\sqrt{2x-1} > x$ *n'admet pas de solution.*
4. *Comme dans la question précédente, on a pour* $x \in [\frac{1}{2},+\infty[$ *:*
   $$\sqrt{2x-1} < x \iff 0 < (x-1)^2$$
   Or un carré est toujours positif, donc $(x-1)^2$ *est strictement positif si et seulement si* $(x-1)^2 \neq 0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x \neq 1$.
   Ainsi l'inéquation $\sqrt{2x-1} < x$ *admet pour ensemble de solutions :* $[\frac{1}{2},1[\cup]1,+\infty[$.

Solution de 22.

1. *On a :* $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$, *donc :* $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x+1 > 0$.
   Ainsi l'inéquation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $e^x+1 > 0$ *et comme* $2 > 0$, *on peut multiplier par ces quantités dans l'inégalité :*
   $$\frac{e^x-1}{e^x+1} \geqslant \frac{1}{2} \iff (e^x-1)\times 2 \geqslant 1 \times (e^x+1) \iff 2e^x-2 \geqslant e^x+1$$
   On met les termes en e^x *d'un côté et les termes constants de l'autre :*
   $$\frac{e^x-1}{e^x+1} \geqslant \frac{1}{2} \iff 2e^x-e^x \geqslant 1+2 \iff e^x \geqslant 3$$
   Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$, *il vient enfin :*
   $$\frac{e^x-1}{e^x+1} \geqslant \frac{1}{2} \iff \ln(e^x) \geqslant \ln(3) \iff x \geqslant \ln(3)$$
   Ainsi l'inéquation $\frac{e^x-1}{e^x+1} \geqslant \frac{1}{2}$ *admet pour ensemble de solutions :* $[\ln(3),+\infty[$.
2. *L'inéquation* $\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) \leqslant 3$ *a un sens si et seulement si* $x>0$ *et* $2x>0$ *et* $3x>0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x>0$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On a :*
   $$\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) \leqslant 3 \iff \ln\left(x \times 2x \times 4x\right) \leqslant 3 \iff \ln(8x^3) \leqslant 3$$
   Comme la fonction $t \mapsto e^t$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *on obtient :*
   $$\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) \leqslant 3 \iff e^{\ln(8x^3)} \leqslant e^3 \iff 8x^3 \leqslant e^3 \iff x^3 \leqslant \frac{e^3}{2^3}$$
   Comme la fonction $t \mapsto t^3$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *il vient enfin :*
   $$\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) \leqslant 3 \iff x^3 \leqslant \left(\frac{e}{2}\right)^3 \iff x \leqslant \frac{e}{2}$$
   Or, on a pris x *dans* $\mathbb{R}_+^*$ *au départ.*
   Ainsi l'inéquation considérée admet pour ensemble de solutions : $]0,\frac{e}{2}]$.
3. *L'inéquation* $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x}$ *a un sens si et seulement si* $x^2-x \geqslant 0$ *et* $2-x \geqslant 0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x(x-1) \geqslant 0$ *et* $x \leqslant 2$.
   Pour déterminer le signe de $x(x-1)$, *on peut construire un tableau de signes :*

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Il vient : $x(x-1) \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$ *ou* $x \geqslant 1$.
   Ainsi l'inéquation $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x}$ *a un sens si et seulement si* $x \in]-\infty,0] \cup [1,2]$.
   Soit $x \in]-\infty,0] \cup [1,2]$. *Comme* $t \mapsto t^2$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$, *on a :*
   $$\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x} \iff \left(\sqrt{x^2-x}\right)^2 > \left(\sqrt{2-x}\right)^2 \iff x^2-x > 2-x$$
   Avec les propriétés de la fonction $t \mapsto t^2$, *il vient :*
   $$\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x} \iff x^2 > 2 \iff x > \sqrt{2} \text{ ou } x < -\sqrt{2}$$
   Or, on a pris x *dans* $]-\infty,0] \cup [1,2]$ *au départ.*
   On rappelle de plus que $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.
   On en déduit que l'inéquation $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x}$ *admet pour ensemble de solutions :*
   $$]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},2]$$

Solution de 23.

L'équation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ *et on observe que* $x^4 = \left(x^2\right)^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. *On pose* $t = x^2$ *:*
$$-2x^4+3x^2+2=0 \iff -2\left(x^2\right)^2+3x^2+2=0 \iff -2t^2+3t+2=0$$
Discriminant : $\Delta = 3^2-4\times(-2)\times 2 = 9+16 = 25 = 5^2 > 0$.

L'équation $-2t^2+3t+2=0$ admet donc deux solutions :

$$t_1=\frac{-3-5}{2\times(-2)}=\frac{-8}{-4}=2 \quad et \quad t_2=\frac{-3+5}{2\times(-2)}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

On reprend les équivalences précédentes :

$$-2x^4+3x^2+2=0 \iff -2t^2+3t+2=0 \iff \left(t=2 \text{ ou } t=-\frac{1}{2}\right)$$

Or $t=x^2$:

$$-2x^4+3x^2+2=0 \iff \left(x^2=2 \text{ ou } \underbrace{x^2=-\frac{1}{2}}_{impossible}\right) \iff \left(x=-\sqrt{2} \text{ ou } x=\sqrt{2}\right)$$

Ainsi l'équation $-2x^4+3x^2+2=0$ admet deux solutions : $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Solution de 24.

1. *L'équation a un sens si et seulement si $x>0$.*
   Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. En posant $t=\ln(x)$, il vient :
   $$2\big(\ln(x)\big)^2-3\ln(x)+1=0 \iff 2t^2-3t+1=0$$
   Après calcul, les solutions de l'équation $2t^2-3t+1=0$ sont : $\frac{1}{2}$ et 1.
   On reprend les équivalences précédentes :
   $$2\big(\ln(x)\big)^2-3\ln(x)+1=0 \iff 2t^2-3t+1=0 \iff \left(t=\frac{1}{2} \text{ ou } t=1\right)$$
   Or que $t=\ln(x)$:
   $$2\big(\ln(x)\big)^2-3\ln(x)+1=0 \iff \left(\ln(x)=\frac{1}{2} \text{ ou } \ln(x)=1\right)$$
   Comme la fonction $t\mapsto e^t$ est bijective sur $\mathbb{R}$, il vient finalement :
   $$2\big(\ln(x)\big)^2-3\ln(x)+1=0 \iff \left(x=e^{1/2} \text{ ou } x=e^1\right)$$
   Les deux solutions obtenues appartiennent bien à $\mathbb{R}_+^*$.
   Ainsi l'équation $2\big(\ln(x)\big)^2-3\ln(x)+1=0$ admet deux solutions : $\sqrt{e}$ et e.
2. *L'équation a un sens, si et seulement si $x>0$ et $x+1>0$, si et seulement si $x>0$ (car dans ce cas on a aussi $x+1>0$).*
   Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction $t\mapsto\ln(t)$ est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :
   $$\ln(x)+\ln(x+1)=0 \iff \ln\big(x\times(x+1)\big)=\ln(1) \iff x\times(x+1)=1$$
   Ainsi :
   $$\ln(x)+\ln(x+1)=0 \iff x^2+x-1=0$$
   Après calcul, l'équation $x^2+x-1=0$ admet deux solutions :
   $$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad et \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
   Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Or $\sqrt{5}>\sqrt{4}=2$, donc $x_1<0$ et $x_2>0$.
   On en déduit que l'équation $\ln(x)+\ln(x+1)=0$ admet une unique solution : $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
3. *L'équation a un sens pour tout $x\in\mathbb{R}$.*
   Soit $x\in\mathbb{R}$. On a en posant $t=e^x$:
   $$\begin{aligned} e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3=0 &\iff e^{2x}\times e^{\ln(2)}+e^x\times e^{\ln(5)}-3=0\\ &\iff 2(e^x)^2+5e^x-3=0\\ &\iff 2t^2+5t-3=0\end{aligned}$$
   Après calcul, l'équation $2t^2+5t-3=0$ admet deux solutions : -3 et $\frac{1}{2}$.
   On reprend les équivalences précédentes :
   $$\begin{aligned} e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3=0 &\iff 2t^2+5t-3=0\\ &\iff t=-3 \text{ ou } t=\tfrac{1}{2}\\ &\iff \underbrace{e^x=-3}_{impossible} \text{ ou } e^x=\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$
   Comme la fonction $t\mapsto\ln(t)$ est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient finalement :
   $$e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3=0 \iff x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
   Ainsi l'équation $e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3=0$ admet une unique solution : $-\ln(2)$.
4. *L'équation a un sens pour tout $x\in\mathbb{R}$.*
   Soit $x\in\mathbb{R}$. Comme $e^x\neq0$, on peut multiplier par e^x et on a :
   $$1-2e^x=\frac{e^{-x}}{3} \iff e^x\times(1-2e^x)=e^x\times\frac{e^{-x}}{3} \iff e^x-2(e^x)^2=\frac{1}{3}$$
   En posant $t=e^x$, il vient :
   $$1-2e^x=\frac{e^{-x}}{3} \iff -2t^2+t-\frac{1}{3}=0$$
   Discriminant : $\Delta=1^2-4\times(-2)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3}<0$.
   On en déduit que l'équation $-2t^2+t-\frac{1}{3}=0$ n'admet pas de solution.
   Ainsi l'équation $1-2e^x=\frac{e^{-x}}{3}$ n'admet pas de solution.
5. *L'équation a un sens si et seulement si $2-x\geqslant0$, c'est-à-dire si et seulement si $x\leqslant2$.*
   Soit $x\in\,]-\infty,2]$.
   On souhaite passer au carré dans l'égalité : pour conserver l'équivalence, il faut pour cela que les deux membres de l'égalité soient de même signe, ici positifs.
   On note d'une part que si $x<0$, alors l'égalité $x=\sqrt{2-x}$ ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif ou nul.
   On suppose donc pour la suite que $x\in[0,2]$.
   Comme la fonction $t\mapsto t^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a :
   $$x=\sqrt{2-x} \iff x^2=\left(\sqrt{2-x}\right)^2 \iff x^2=2-x \iff x^2+x-2=0$$
   Après calcul, l'équation $x^2+x-2=0$ admet deux solutions : -2 et 1.
   Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans $[0,2]$.
   On en déduit que l'équation $x=\sqrt{2-x}$ admet une unique solution : 1.
6. *L'équation a un sens si et seulement si $x\geqslant0$.*
   Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On a :
   $$x-\sqrt{x}=\frac{3}{2} \iff x-\frac{3}{2}=\sqrt{x}$$
   Si $x<\frac{3}{2}$, alors l'égalité $x-\frac{3}{2}=\sqrt{x}$ ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif ou nul.

On suppose donc pour la suite que $x \in [\frac{3}{2}, +\infty[$.
Comme la fonction $t \mapsto t^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$x - \sqrt{x} = \frac{3}{2} \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 \iff x^2 - 3x + \frac{9}{4} = x$$

Ainsi :

$$x - \sqrt{x} = \frac{3}{2} \iff x^2 - 4x + \frac{9}{4} = 0$$

Après calcul, l'équation $x^2 - 4x + \frac{9}{4} = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2} \quad et \quad x_2 = 2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans $[\frac{3}{2}, +\infty[$.
Or $\sqrt{7} > \sqrt{4} = 2$, donc $\frac{\sqrt{7}}{2} > 1$.
Il vient : $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2} < 2 - 1 = 1 < \frac{3}{2}$ et : $x_2 = 2 + \frac{\sqrt{7}}{2} > 2 + 1 = 3 \geqslant \frac{3}{2}$.
On en déduit que l'équation $x - \sqrt{x} = \frac{3}{2}$ admet une unique solution : $2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Solution de 25.

L'inéquation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on observe que $x^4 = (x^2)^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = x^2$:

$$-2x^4 + 3x^2 + 2 \geqslant 0 \iff -2(x^2)^2 + 3x^2 + 2 \geqslant 0 \iff -2t^2 + 3t + 2 \geqslant 0$$

Discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0$.
Le polynôme $t \mapsto -2t^2 + 3t + 2$ admet donc deux racines :

$$t_1 = \frac{-3-5}{2 \times (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \quad et \quad t_2 = \frac{-3+5}{2 \times (-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Comme $a = -2 < 0$, on obtient le tableau de signes suivant :

t	$-\infty$		$-1/2$		2		$+\infty$
$-2t^2 + 3t + 2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On reprend les équivalences précédentes :

$$-2x^4 + 3x^2 + 2 \geqslant 0 \iff -2t^2 + 3t + 2 \geqslant 0 \iff -\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 2$$

Or $t = x^2$:

$$-2x^4 + 3x^2 + 2 \geqslant 0 \iff -\frac{1}{2} \leqslant x^2 \leqslant 2 \iff x^2 \leqslant 2 \iff -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$$

On a pu supprimer l'inégalité $-\frac{1}{2} \leqslant x^2$ puisqu'elle est toujours vraie.
Ainsi l'inéquation $-2x^4 + 3x^2 + 2 \geqslant 0$ admet pour ensemble de solutions : $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Solution de 26.

1. *L'inéquation a un sens si et seulement si $x > 0$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En posant $t = \ln(x)$, il vient :

$$2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 1 > 0 \iff 2t^2 - 3t + 1 > 0$$

   Après calcul, le signe du polynôme $t \mapsto 2t^2 - 3t + 1$ est donné par :

t	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2t^2 - 3t + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On reprend les équivalences précédentes :

$$2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 1 > 0 \iff 2t^2 - 3t + 1 > 0 \iff \left(t < \frac{1}{2} \ ou\ t > 1\right)$$

   Or $t = \ln(x)$:

$$2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 1 > 0 \iff \left(\ln(x) < \frac{1}{2} \ ou\ \ln(x) > 1\right)$$

   Comme la fonction $t \mapsto e^t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, il vient finalement :

$$2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 1 > 0 \iff \left(x < e^{1/2} \ ou\ x > e^1\right)$$

   On rappelle que les solutions de l'inéquation sont à chercher dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Ainsi l'inéquation $2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 1 > 0$ admet pour ensemble de solutions :

$$]0, \sqrt{e}[\cup]e, +\infty[$$

2. *L'inéquation a un sens si et seulement si $x > 0$ (dans ce cas on a aussi $x + 1 > 0$).*
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\ln(x) + \ln(x+1) \leqslant 0 \iff \ln\big(x \times (x+1)\big) \leqslant \ln(1) \iff x \times (x+1) \leqslant 1$$

   Ainsi :

$$\ln(x) + \ln(x+1) \leqslant 0 \iff x^2 + x - 1 \leqslant 0$$

   Après calcul, le signe du polynôme $x \mapsto x^2 + x - 1$ est donné par :

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
$x^2 + x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On reprend les équivalences précédentes :

$$\ln(x) + \ln(x+1) \leqslant 0 \iff x^2 + x - 1 \leqslant 0 \iff \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

   On rappelle que les solutions de l'inéquation sont à chercher dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Or $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, donc : $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$.
   Ainsi l'inéquation $\ln(x) + \ln(x+1) \leqslant 0$ admet pour ensemble de solutions : $]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$.

3. *L'inéquation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On a en posant $t = e^x$:

$$\begin{aligned} e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 > 0 &\iff e^{2x} \times e^{\ln(2)} + e^x \times e^{\ln(5)} - 3 > 0 \\ &\iff 2(e^x)^2 + 5e^x - 3 > 0 \\ &\iff 2t^2 + 5t - 3 > 0 \end{aligned}$$

   Après calcul, le signe du polynôme $t \mapsto 2t^2 + 5t - 3$ est donné par :

t	$-\infty$		-3		$1/2$		$+\infty$
$2t^2 + 5t - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On reprend les équivalences précédentes :

$$e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3>0 \iff 2t^2+5t-3>0 \iff \left(t<-3 \text{ ou } t>\frac{1}{2}\right)$$

Or que $t=e^x$:

$$e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3>0 \iff \left(\underbrace{e^x<-3}_{\text{impossible}} \text{ ou } e^x>\frac{1}{2}\right) \iff e^x>\frac{1}{2}$$

Comme la fonction $t\mapsto \ln(t)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient finalement :

$$e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3>0 \iff x>\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ainsi l'inéquation $e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3>0$ admet pour ensemble de solutions :

$$]-\ln(2),+\infty[$$

4. *L'inéquation a un sens pour tout $x\in\mathbb{R}$.*
Soit $x\in\mathbb{R}$. Comme $e^x>0$, on peut multiplier par e^x et on a :
$$1-2e^x\geqslant\frac{e^{-x}}{3} \iff e^x\times(1-2e^x)\geqslant e^x\times\frac{e^{-x}}{3} \iff e^x-2(e^x)^2\geqslant\frac{1}{3}$$
En posant $t=e^x$, il vient :
$$1-2e^x\geqslant\frac{e^{-x}}{3} \iff -2t^2+t-\frac{1}{3}\geqslant 0$$
Discriminant : $\Delta=1^2-4\times(-2)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3}<0$.
On en déduit que le polynôme $t\mapsto -2t^2+t-\frac{1}{3}$ n'admet pas de racine.
Comme $a=-2<0$, on a alors : $\forall\, t\in\mathbb{R},\ -2t^2+t-\frac{1}{3}<0$.
Ainsi l'inéquation $1-2e^x\geqslant\frac{e^{-x}}{3}$ n'admet pas de solution.

5. *L'inéquation a un sens si et seulement si $2-x\geqslant 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x\leqslant 2$.*
Soit $x\in]-\infty,2]$.
On souhaite passer au carré dans l'inégalité : il faut pour cela que les deux membres de l'inégalité soient de même signe, ici positifs.
On note d'une part que si $x<0$, alors l'inégalité $x>\sqrt{2-x}$ ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif.
On suppose donc pour la suite que $x\in[0,2]$.
Comme la fonction $t\mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a :
$$x>\sqrt{2-x} \iff x^2>\left(\sqrt{2-x}\right)^2 \iff x^2>2-x \iff x^2+x-2>0$$
Après calcul, le signe du polynôme $x\mapsto x^2+x-2$ est donné par :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On reprend les équivalences précédentes :
$$x>\sqrt{2-x} \iff x^2+x-2>0 \iff (x<-2 \text{ ou } x>1)$$
On rappelle que les solutions de l'inéquation sont à chercher dans $[0,2]$.
Ainsi l'inéquation $x>\sqrt{2-x}$ admet pour ensemble de solutions : $]1,2]$.

6. *L'équation a un sens si et seulement si $x\geqslant 0$.*
Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On a :
$$x-\sqrt{x}=\frac{3}{2} \iff x-\frac{3}{2}=\sqrt{x}$$
Si $x<\frac{3}{2}$, alors l'égalité $x-\frac{3}{2}=\sqrt{x}$ ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif.
On suppose donc pour la suite que $x\in[\frac{3}{2},+\infty[$.
Comme la fonction $t\mapsto t^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a :
$$x-\sqrt{x}=\frac{3}{2} \iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2 \iff x^2-3x+\frac{9}{4}=x$$
Ainsi :
$$x-\sqrt{x}=\frac{3}{2} \iff x^2-4x+\frac{9}{4}=0$$
Après calcul, l'équation $x^2-4x+\frac{9}{4}=0$ admet deux solutions :
$$x_1=2-\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad x_2=2+\frac{\sqrt{7}}{2}$$
Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans $[\frac{3}{2},+\infty[$.
Or $\sqrt{7}>\sqrt{4}=2$, donc $\frac{\sqrt{7}}{2}>1$.
Il vient : $x_1=2-\frac{\sqrt{7}}{2}<2-1=1<\frac{3}{2}$ et : $x_2=2+\frac{\sqrt{7}}{2}>2+1=3\geqslant\frac{3}{2}$.
On en déduit que l'équation $x-\sqrt{x}=\frac{3}{2}$ admet une unique solution : $2+\frac{\sqrt{7}}{2}$.