Chapitre 0

Raisonner, rédiger

Ce document est un chapitre transverse, à garder et à consulter tout au long de l'année, il sert de référence pour la rédaction à adopter et contient les principaux rappels de «logique» et de «raisonnements».

Le contenu est accessible sans réels pré-requis, mais sa lecture sera plus simple après avoir lu les sections «Rudiments de logique» et «Ensemble» du chapitre «Introduction».

I. Axiomes, définitions, théorèmes

Fixons d'abord du vocabulaire : on appelle *proposition* toute phrase p au sujet de laquelle on peut poser la question «p est-elle vraie ?»

La plupart des phrases grammaticalement correctes sont des propositions, mais par exemple « Dis-le-moi ! », « Bonjour » ou « Comment vas-tu ? » n'en sont pas, la question « Est-il vrai que bonjour ? » n'a en effet aucun sens.

1. Axiome

Dans une théorie formelle quelconque, mathématique ou non, on appelle *axiome* une proposition posée comme vraie à l'intérieur d'une théorie.

Par exemple la géométrie d'Euclide repose sur plusieurs axiomes dont vous connaissez sûrement le 5ème postulat «par un point en dehors d'une droite il passe une unique parallèle à cette droite». La construction des l'ensemble des entiers naturels repose sur des axiomes (par exemple ceux de Péano). Enfin, votre curiosité mathématique vous fera peut-être croiser la route de «l'axiome du choix», sachez que selon l'axiomatique utilisée en théorie des ensembles on peut accepter ou rejeter cet axiome. Fort heureusement nous n'aurons pas à nous en préoccuper.

Nous aurons très peu l'occasion de rencontrer les axiomes sur lesquels les mathématiques sont traditionnellement fondées, en particulier nous ne construirons ni les entiers, ni les réels : ce sont des sujets passionnants mais trop difficiles.

2. Définition

On appelle *définition* toute manière d'accorder un nom jusqu'ici inusité à un objet vérifiant une certaine propriété.

Une définition crée ainsi une classe d'objets — les oiseaux, par exemple — réunis autour d'un certain nom — le mot «oiseau» — lequel résume une certaine propriété — «animal à plumes».

Par rigueur formelle, l'usage d'homonymes est à éviter à tout prix.

On introduit généralement une définition en commençant par «on appelle «truc» tout objet qui vérifie...» ou encore «Soit x un objet. On dit que x est un «truc» s'il vérifie...»

3. Théorème

On appelle *théorème* toute proposition d'une théorie que l'on a pu démontrer à partir de ses axiomes. Une théorie est un empilement ordonné d'axiomes, de démonstrations et de théorèmes. Plusieurs autres mots sont couramment utilisés pour désigner certaines formes de théorèmes :

— **Proposition** : on appelle *proposition* un théorème de moindre importance (on revient ici au sens premier introduit en début de texte).

— **Lemme** : on appelle *lemme* tout théorème préparatoire à la démonstration d'un plus gros théorème. La démonstration d'un gros théorème peut ainsi se trouver découpé en morceaux plus petits.

— **Corollaire** : on appelle *corollaire* tout théorème qui est une conséquence presque immédiate d'un plus gros théorème.

— **Caractérisations** : on appelle *caractérisation* tout théorème sur une notion qui donne une condition équivalente à la définition de cette notion. Une caractérisation est ce que l'on pourrait appeler une «redéfinition».

II. Introduire des objets

La règle la plus importante pour rédiger en mathématiques, c'est que *tout objet dont on parle doit être introduit.*

On rencontrera essentiellement deux types de symboles pour désigner les objets mathématiques : les *variables* et les *constantes*.

- **Introduire une variable.**

  Quand on se donne (par exemple) un réel x quelconque, on dit que x est une variable ; elle n'a pas de valeur définie, elle représente à elle seule tous les réels. En d'autres termes, pour parler des TOUS les objets d'un ensemble, on en prend un quelconque et on parle de CET objet pour parler de tous les autres.

  En pratique, on introduit une variable, un réel x par exemple, en commençant par «soit $x \in \mathbb{R}$» C'est l'usage du «soit» qui définit l'acte de naissance de la variable x, celle-ci signifie alors quelque chose jusqu'à la fin de la preuve ou de l'énoncé en cours.

  Si la vie de x est plus courte, une ou deux lignes par exemple, on peut écrire «pour tout $x \in \mathbb{R}$» plutôt que «soit $x \in \mathbb{R}$». Par exemple, pour calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto xe^x$, on ne se contente pas d'écrire $f'(x) = (x+1)e^x$ car alors x n'est pas introduit, mais on écrit

  «Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x$» ou «Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f'(x) = (x+1)e^x$»

  Enfin, certains symboles permettent d'introduire directement des variables, que l'on qualifiera de *locales*, sans passer par l'usage du «soit» ou du «pour tout», c'est le cas en particulier des symboles $\sum$, $\prod$ et $\int$. Par exemple :

  «Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$»

  La variable k n'a de sens que dans la somme qui lui donne vie, elle n'a pas besoin d'être introduite auparavant et n'a pas de sens en dehors de la somme. En revanche, la variable n a dû être introduite préalablement et conserve un sens en dehors de la somme.

- **Nommer des objets.**

  De nombreux symboles mathématiques désignent des objets mathématiques parfaitement définis, on les appelle des *constantes*. Par exemple 2, π, $\cos$, $\mathbb{N}$ ne sont pas des variables mais des constantes, des objets mathématiques qui ne représentent qu'eux-mêmes.

  Pour le besoin d'un raisonnement ou d'un énoncé, on peut définir nos propres constantes. Par exemple après avoir introduit convenablement un réel α, si la quantité $\dfrac{\alpha-2}{\alpha^2+1}$ est utilisée plusieurs fois, on peut la nommer pour alléger la rédaction. Pour cela on pourra écrire

  «On pose $K = \dfrac{\alpha-2}{\alpha^2+1}$» ou encore «On note K le réel $\dfrac{\alpha-2}{\alpha^2+1}$»

  Notons au passage que K dépend de α, il est donc préférable de noter K_α ce réel plutôt que K si l'on est amené à utiliser cette quantité pour différentes valeurs de α. Mais c'est le contexte qui nous invite à choisir cette notation plutôt que l'autre, si la valeur de α n'a pas d'importance dans le raisonnement alors autant noter simplement K ce réel.

  On veillera autant que possible à respecter les usages pour nommer les objets : x, y, t pour des réels, i, j, k, ℓ, n pour des entiers, f, g pour des fonctions…

- **Abus tolérés.**

  La distinction, forte, rigoureuse, faite dans les deux items précédents n'est pas toujours respectée à la lettre. Par exemple introduire f ainsi :

  «Soit $f : x \mapsto xe^x$»

  n'est pas conforme à ce qui précède : la fonction f n'est pas une variable, elle est parfaitement définie et ne représente qu'elle même. Il serait plus correct d'écrire :

  «On pose $f : x \mapsto xe^x$»

  Mais la première rédaction est largement tolérée.

  Enfin, «on pose» et «on note», rigoureusement, ne s'emploient pas de la même façon d'un point de vue grammatical : le premier est suivi d'une égalité qui définit l'objet introduit, mais pas le second. Comme dans le cas de figure précédent, cette règle ne sera pas respectée à la lettre.

- **Ne pas prendre ses désirs pour des réalités.**

  Attention, en général il ne suffit pas d'introduire un objet pour qu'il existe. Typiquement, une phrase commençant par «soit x l'unique objet tel que…» doit être soigneusement vérifiée : x existe-t-il vraiment, si oui est-il bien unique ? ces choses doivent être justifiées.

  Par exemple que penser du raisonnement suivant ? Montrons que 1 est le plus grand entier naturel non nul, pour cela on considère N le plus grand entier naturel non nul et on suppose par l'absurde que $N > 1$. Alors $N^2 > N$ et N^2 est un entier naturel non nul, ce qui contredit la maximalité de N. Donc $N = 1$.

III. De l'usage des quantificateurs

On rencontre deux quantificateurs :

— le quantificateur universel «$\forall$» qui signifie «pour tout»,

— le quantificateur existentiel «$\exists$» qui signifie «il existe».

Attention, les quantificateurs ne doivent pas être utilisés comme des abréviations !

Dans une phrase on écrit les quantificateurs en toutes lettres. Si l'on souhaite écrire une expression quantifiée dans une phrase, on sépare l'expression quantifié de la partie de la phrase qui la précède à l'aide de «:». Par exemple, il est correct d'écrire :

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$. ou Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0$.

La même dernière phrase écrite sans les «:» serait incorrecte. Pourquoi ? c'est une règle d'écriture aussi importante que «toute phrase commence par une majuscule et termine par un point.»

- **Montrer une proposition universelle.**

  Quand on veut montrer : $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$ (où E est un ensemble préalablement introduit et $\mathscr{P}(x)$ une proposition dépendant de x), on commence par écrire :

  Soit $x \in E$. Montrons $\mathscr{P}(x)$.

  et on fait la preuve de la proposition annoncée. Éventuellement en fin de démonstration on précise «ceci étant valable pour tout $x \in E$, on a démontré : $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$.»

  Exemple.

  Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant \dfrac{1+x^2}{2}$.

  Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. on veut démontrer que $|x| \leqslant \frac{1+x^2}{2}$. L'inégalité à démontrer est équivalente à $0 \leqslant 1 + x^2 + 2|x|$, où l'on reconnaît une identité remarquable. Or on sait que $(1-|x|)^2 \geqslant 0$ en tant que carré de nombre réel, donc $1 - 2|x| + |x|^2 \geqslant 0$ puis $|x| \leqslant \frac{1+x^2}{2}$ puisque $|x|^2 = x^2$.

  Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a démontré : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant \frac{1+x^2}{2}$.

- **Montrer une proposition existentielle.**

Quand on veut montrer : $\exists x \in E, \mathscr{P}(x)$ (où E est un ensemble préalablement introduit et $\mathscr{P}(x)$ une proposition dépendant de x), la difficulté principale en général n'est pas de vérifier que x vérifie $\mathscr{P}$, mais de trouver x.

Il faut trouver des «idées» de ce que peut être x et vérifier. L'expérience (vous en avez peu aujourd'hui, j'en ai un peu plus) nous y aidera, mais il n'y a pas de méthode générale ou systématique pour trouver x.

Nous reviendrons sur ce point plus loin à propos du raisonnement par analyse-synthèse.

Exemple.
Démontrer : $\forall a, b \in \mathbb{N},\ \exists c \in \mathbb{N},\ \sqrt{c} > a+b$.
Preuve : Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On pose $c = (a+b+1)^2$. Alors $c \in \mathbb{N}$ et

$$\sqrt{c} = \sqrt{(a+b+1)^2} \underset{\text{à connaître}}{=} |a+b+1| \underset{a+b+1\geqslant 0}{=} a+b+1 > a+b$$

Ce qui montre la propriété annoncée.
Notons que trouver c a nécessité un calcul, fait au brouillon ou dans votre tête.

- **Montrer l'unicité d'un objet.**
Quand on veut montrer qu'un ensemble E contient **au plus** un élément vérifiant une propriété $\mathscr{P}$, on commence par écrire :

Soient $x, x' \in E$. On suppose que $\mathscr{P}(x)$ et $\mathscr{P}(x')$. Montrons que $x = x'$.

et on démontre l'égalité annoncée.

On rencontrera le pseudo quantificateur «$\exists!$», qui signifie «il existe un unique», mais attention il ne sert pas juste à annoncer l'unicité, mais aussi l'existence.

Exemple.
Démontrer : $\exists! x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = 1$.
Preuve de l'existence : On pose $x = 1$. Alors $x \in \mathbb{R}_+$ et $x^2 = 1$.
Preuve de l'unicité : Soient $x, x' \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $x^2 = 1$ et $x'^2 = 1$. Alors $x^2 - x'^2 = 0$ donc $(x+x')(x-x') = 0$ donc $x = x'$ ou $x = -x'$. Dans ce dernier cas x et x' sont de signes opposés, ce qui n'est possible que si $x = x' = 0$, mais alors $x^2 = 0 \neq 1$, c qui est exclu. Donc $x = x'$.
Bilan on a démontré : $\exists! x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = 1$.

Remarque : on peut aussi démontrer l'unicité d'un objet à l'aide d'un raisonnement par l'absurde (voir plus loin), mais c'est rarement mieux que la méthode directe que l'on vient de présenter.

IV. Implication, disjonction, équivalence

1. Implication («$p \Longrightarrow q$»)

- **Montrer une implication.**
Quand on veut montrer que $p \Longrightarrow q$, on commence par écrire :

«On suppose que p est vraie. Montrons que q est vraie.»

et on démontre le résultat annoncé.

Exemple.
Démontrer : Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^2 - x - 1/4 \leqslant 0 \Longrightarrow x = 1/2$.
Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $x^2 - x \leqslant 1/4$. Alors $x^2 - x - 1/4 \leqslant 0$, et reconnaissant une identité remarquable, $(x-1/2)^2 \leqslant 0$. Or $(x-1/2)^2 \geqslant 0$ en tant que carré de réel, donc $(x-1/2)^2 = 0$, si bien que $x = 1/2$.

- **Contredire une implication.**
Les propositions $\big(\text{non}(p \Longrightarrow q)\big)$ et $\big(p \text{ et } \text{non}(q)\big)$ sont équivalentes. Ainsi pour contredire une implication on commence par écrire :

«Montrons que p est vraie.»

suivi de la preuve de p, puis

«Montrons que q est fausse.»

suivi de la preuve de non(q).

Exemple.
Démontrer : la proposition «$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Longrightarrow \sin x \leqslant \sin y$» est fausse.
Preuve : il s'agit de démontrer la négation de la proposition citée qui est de la forme «$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \mathscr{P}(x, y) \Longrightarrow \mathscr{Q}(x, y)$». On va donc démontrer «$\exists x, y \in \mathbb{R},\ x < y$ et $\sin x > \sin y$».
On pose (après réflexion) $x = \pi/2$ et $y = \pi$, alors $x < y$ et $\sin \pi/2 = 1 > 0 = \sin y$, ce qui montre le résultat.

- **Contraposée.**
Les propositions $(p \Longrightarrow q)$ et $\big(\text{non}(q) \Longrightarrow \text{non}(p)\big)$ sont équivalentes. Cette dernière s'appelle la *contraposée* de la première. Ainsi pour montrer que $p \Longrightarrow q$ par contraposition, on commence par écrire :

«On suppose que q est fausse. Montrons que p est fausse.»

et on démontre le résultat annoncé.

Exemple.
Démontrer : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.
Preuve : On montre la contraposée : si n n'est pas premier, alors $2^n - 1$ ne l'est pas non plus.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que n n'est pas premier, il existe alors $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leqslant a < n$ et $n = ab$.
On écrit alors

$$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = \left(2^a\right)^b - 1 \underset{\text{identité remarquable}}{=} (2^a - 1)(1 + 2^a + 2^{2a} + \cdots + 2^{(b-1)a})$$

Or $2 \leqslant a \leqslant n-1$ donc $2^2 \leqslant 2^a \leqslant 2^{n-1} < 2^n$ puis $3 \leqslant 2^a - 1 < 2^n - 1$ donc $2^n - 1$ n'est pas premier.

- **Du mauvais usage du symbole $\Longrightarrow$.**
Attention, le symbole $\Longrightarrow$ ne signifie pas «donc» et ne doit pas être utilisé comme tel.
Quand on écrit «p est vraie, donc q est vraie», on effectue un *raisonnement* : on sait que p est vraie parce qu'on l'a démontré ou bien parce que c'est une hypothèse. Ce n'est pas la même chose que

d'écrire «$p \Longrightarrow q$» qui est une *proposition* : on ne sait pas si p ou q sont vraies, mais si p est vraie, alors q est vraie aussi.
Un raisonnement est un enchevêtrement de propositions. Pour en terminer avec l'exemple cité, voici une reformulation détaillée de «p est vraie donc q est vraie» :

On sait que p est vraie (hypothèse ou résultat précédent).
Or il est vrai que $p \Longrightarrow q$ (théorème ou démonstration déjà faite), **donc** q est vraie.

2. Disjonction («p ou q»)

Les propositions $(p \text{ ou } q)$ et $(\text{non}(p) \Longrightarrow q)$ sont équivalentes. Autrement dit, dire que p ou q est vraie, c'est dire que si p est fausse, alors q est vraie. Ainsi pour montrer p ou q on commence par écrire :

«On suppose que p est fausse, montrons que q est vraie.»

et on démontre le résultat annoncé.

Exemple.
Démontrer : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant \max(1, x^2)$.
Preuve : Il s'agit de montrer que $|x| \leqslant 1$ ou $|x| \leqslant x^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose $\text{non}(|x| \leqslant 1)$, c'est-à-dire $|x| > 1$. En multipliant par $|x| > 0$ il vient $|x|^2 > |x|$ donc $|x| \leqslant x^2$.
On a démontré : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant \max(1, x^2)$.

3. Équivalence («$p \Longleftrightarrow q$»)

Essentiellement, il y a deux façons de procéder.

- **Raisonnement par double implication.** (méthode prudente)
  On montre que $p \Longrightarrow q$ (sens direct) et on montre que $q \Longrightarrow p$ (sens indirect ou réciproque).

  Exemple.
  Démontrer : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$.
  Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
  — Si $x = y = 0$, alors $x^2 + y^2 = 0$, le sens réciproque est démontré.
  — On suppose que $x^2 + y^2 = 0$. Alors $x^2 = -y^2$, et sachant que $x^2 \geqslant 0$ et $-y^2 \leqslant 0$, il vient : $0 \leqslant x^2 = -y^2 \leqslant 0$ donc $x^2 = 0$ et $-y^2 = 0$, donc $x = y = 0$. Le sens direct est démontré.

  En pratique on commence par montrer le sens le plus facile !
- **Raisonnement par équivalence.**
  On utilise fréquemment cette méthode lors de la résolution d'équations ou inéquations, et éventuellement pour montrer une égalité d'ensemble (dans des cas «simples»).
  On démontre, par étapes successives

$$p \Longleftrightarrow p_1 \Longleftrightarrow p_2 \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow p_n \Longleftrightarrow q$$

  où $p_1, \ldots, p_n$ sont des propositions obtenues en modifiant «un peu» la proposition qui la précède, jusqu'à obtenir q.

Exemple.
Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2 + 4x + 1 \geqslant 0\right) \Longleftrightarrow \left(x \leqslant -2 - \sqrt{3} \text{ ou } x \geqslant -2 + \sqrt{3}\right)$.
Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + 4x + 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{\text{on force une identité remarquable}} -3 \geqslant 0 \Longleftrightarrow (x+2)^2 - \sqrt{3}^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow (x+2-\sqrt{3})(x+2+\sqrt{3}) \geqslant 0$$

$$\underset{\text{tableau de signes}}{\Longleftrightarrow} x \leqslant -2 - \sqrt{3} \text{ ou } x \geqslant x \geqslant -2 + \sqrt{3}$$

- 💣 **Du mauvais usage du symbole $\Longleftrightarrow$.**

▷ Attention, le symbole $\Longleftrightarrow$ ne signifie pas «c'est-à-dire» (ou *i.e.* la locution latine synonyme souvent utilisée dans les textes mathématiques) et ne doit pas être utilisé comme tel. À nouveau il s'agit de ne pas confondre raisonnement et proposition.

▷ Attention, notre cerveau pense plus facilement l'implication que l'équivalence. Il ne faut pas utiliser le symbole $\Longleftrightarrow$ si l'on n'est pas sûr de l'équivalence !
En particulier :
— On peut sommer des (in)égalités :

$$\left(\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ a_i \leqslant b_i\right) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$$

mais on ne peut pas «dé-sommer» :

$$\left(\forall\, i \in [\![1, n]\!],\ a_i \leqslant b_i\right) \not\Longleftarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$$

— On peut intégrer des (in)égalités :

$$\left(\forall\, t \in [a, b],\ f(t) = g(t)\right) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

mais on ne peut pas «dés-intégrer» :

$$\left(\forall\, t \in [a, b],\ f(t) = g(t)\right) \not\Longleftarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

V. Inclusion, égalité d'ensembles

Soient A et B deux ensembles.

- **Montrer une inclusion d'ensembles.**
  $A \subset B$ signifie, par définition : $\forall x \in A,\ x \in B$.
  Ainsi, quand on veut montrer que A est inclus dans B, on commence par écrire :

  « Soit $x \in A$. Montrons que $x \in B$. »

  et on démontre l'appartenance annoncée.

Exemple.
Démontrer : $\{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\} \subset 2\mathbb{N}$.
Preuve : On note $A = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $B = 2\mathbb{N}$ (B est l'ensemble des entiers qui s'écrivent 2ℓ, où $\ell \in \mathbb{N}$, c'est l'ensemble des entiers naturels pairs).
Soit $n \in A$: $\exists k \in \mathbb{N},\ n = k(k+1)$. k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs, l'un d'eux est pair, et par produit n est alors pair. Donc $n \in B$.
On a démontré que $A = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\} \subset B = 2\mathbb{N}$.

- **Montrer une égalité d'ensembles.**
  Essentiellement, il y a deux façons de procéder.
  - **Raisonnement par double inclusion.** (méthode prudente)
    On montre que $A \subset B$ et on montre que $B \subset A$.

Exemple.
Démontrer : $\mathbb{R}_- = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall\, y > 0,\ x \leqslant y\right\}$.
Preuve :
— Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Alors pour tout $y > 0$, $x \leqslant 0 < y$ donc $x \in \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall\, y > 0,\ x \leqslant y\right\}$.
— Soit $x \in \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \forall\, y > 0,\ x \leqslant y\right\}$. Montrons que $x \in \mathbb{R}_-$. Si $x > 0$, alors $x > x/2 < 0$, si bien qu'en posant $y = x/2 > 0$ il vient $x > y$ alors que par hypothèse, $x \leqslant y$. Il y a une contradiction, donc $x \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}_-$.

En pratique on commence par montrer l'inclusion plus facile.
Notons qu'on effectué un raisonnement par l'absurde, ce qui sera développé plus loin.

  - **Raisonnement par équivalence.**
    On démontre, par étapes successives

$$x \in A \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow x \in B$$

Exemple.
Démontrer : Soient A, I des ensembles, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de A. Alors :

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

Preuve : Soit $x \in A$. Alors

$$x \in \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \Longleftrightarrow \text{non}\left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right) \Longleftrightarrow \text{non}\,(\forall\, i \in I,\ x \in A_i)$$
$$\Longleftrightarrow \exists\, i \in I,\ \text{non}\,(x \in A_i) \Longleftrightarrow \exists\, i \in I,\ x \notin A_i \Longleftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

VI. Raisonnement par récurrence

- **Récurrence simple.**

Le raisonnement par récurrence (simple) repose sur le principe suivant :

$$\text{si } \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie},}_{\text{initialisation}} \qquad \text{et si : } \underbrace{\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1},}_{\text{hérédité}} \qquad \text{alors : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$$

Pour montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$, on rédige ainsi :
— On explicite $\mathscr{P}_n$: c'est une proposition qui dépend de n, n étant un entier introduit *avant* d'écrire $\mathscr{P}_n$.
— On démontre que $\mathscr{P}_0$ est vraie (initialisation).
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$. Et on démontre $\mathscr{P}_{n+1}$ (hérédité).

Toute autre rédaction est exclue!

▷ Introduire $\mathscr{P}_n$ en écrivant $\mathscr{P}_n : \forall\, n \in \mathbb{N}, \ldots$ est une erreur gravissime.
▷ Commencer l'hérédité par «supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$» est une erreur tout aussi grave.
▷ Moins grave, mais gênant, écrire «supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$, montrons $\mathscr{P}_{n+1}$» est incorrect : cela ne permet pas d'utiliser le principe «$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}$». On doit introduire n avec un «soit» et non avec un «il existe» (ou toute expression synonyme comme «pour un certain n»).

Exemple.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par récurrence en posant :

$$u_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \ln(1+u_n)$$

Démontrer : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n > 0$.
Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathscr{H}(n)$: u_n existe et $u_n > 0$.
— L'initialisation se fait pour $n = 1$ car la propriété concerne les $n \in \mathbb{N}^*$. On constate que u_1 existe car il est donné explicitement par l'énoncé et $u_1 = 2 > 0$, donc $\mathscr{H}(1)$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ (on précise n supérieur ou égal au rang de l'initialisation). On suppose que $\mathscr{H}(n)$ est vraie. On veut montrer $\mathscr{H}(n+1)$: u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$.
Par hypothèse de récurrence : u_n existe et $u_n > 0$.
On effectue une série d'opérations pour obtenir l'expression de u_{n+1} :

$$u_n > 0 \text{ donc } u_n + 1 > 1 > 0$$

Ainsi $\ln(u_n+1)$ est bien défini, donc $u_{n+1} = \ln(u_n+1)$ existe.
Par ailleurs, par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$u_n + 1 > 1 \quad \text{donc} \quad \ln(1+u_n) > \ln(1) \quad \text{donc} \quad u_{n+1} > 0$$

donc $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

- **Récurrence double, multiple.**
  Parfois il n'est pas possible de déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ de $\mathscr{P}_n$, mais seulement $\mathscr{P}_{n+2}$ de $\mathscr{P}_{n+1}$ et $\mathscr{P}_n$. Le raisonnement par récurrence (double) devient :

$$\text{si } \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ et } \mathscr{P}_1 \text{ sont vraies},}_{\text{initialisation}} \qquad \text{et si : } \underbrace{\forall\, n \in \mathbb{N},\ (\mathscr{P}_{n+1} \text{ et } \mathscr{P}_n) \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+2},}_{\text{hérédité}} \qquad \text{alors : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$$

Pour montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$, on rédige ainsi :

— On explicite $\mathscr{P}_n$: c'est une proposition qui dépend de n, n étant un entier introduit *avant* d'écrire $\mathscr{P}_n$.
— On démontre que $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies (initialisation).
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies. Montrons $\mathscr{P}_{n+2}$. Et on démontre $\mathscr{P}_{n+2}$ (hérédité).

Exemple.
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Démontrer : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n$.
Preuve : On procède par récurrence double. En effet, le calcul de u_{n+2} nécessite la connaissance des termes u_{n+1} ET u_n.
On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}(n) : u_n \leqslant 2^n$.
— On initialise pour $n = 0$ et $n = 1$. L'énoncé donne $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, et $2^0 = 1 \geqslant u_0$ et $2^1 = 2 \geqslant 1 = u_1$, donc $\mathscr{H}(0)$ et $\mathscr{H}(1)$ sont vraies.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{H}(n)$ et $\mathscr{H}(n+1)$ sont vraies (ainsi dans le cas de bord $n = 0$ cela inclut bien les deux rangs de l'initialisation). On veut montrer $\mathscr{H}(n+2) : u_{n+2} \leqslant 2^{n+2}$.
Par définition de u_n, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
On applique alors l'hypothèse de récurrence :

$$u_{n+2} = \underbrace{u_{n+1}}_{\leqslant 2^{n+1}} + \underbrace{u_n}_{\leqslant 2^n} \leqslant \underbrace{2^{n+1} + 2^n}_{=2^n(2+1)=3\times 2^n}$$

Or $3 \leqslant 4 = 2^2$ si bien qu'en multipliant l'inégalité par 2^n il vient $3 \times 2^n \leqslant 2^2 \times 2^n$ donc $3 \times 2^n \leqslant 2^{n+2}$.
Finalement $u_{n+2} \leqslant 2^{n+1}$, donc $\mathscr{H}(n+2)$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

Bien entendu, on peut étendre le principe à des récurrences triples ou plus!

- **Récurrence forte.**

Parfois, il est nécessaire de supposer $\mathscr{P}_0, \ldots, \mathscr{P}_n$ pour déduire $\mathscr{P}_{n+1}$, on parle de *récurrence forte*. Le principe :

$$\text{si } \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie},}_{\text{initialisation}} \qquad \text{et si : } \underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathscr{P}_k\right) \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1},}_{\text{hérédité}} \qquad \text{alors : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$$

Pour montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$, on rédige ainsi :
— On explicite $\mathscr{P}_n$: c'est une proposition qui dépend de n, n étant un entier introduit *avant* d'écrire $\mathscr{P}_n$.
— On démontre que $\mathscr{P}_0$ est vraie (initialisation).
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathscr{P}_k$ est vraie. Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$. Et on démontre $\mathscr{P}_{n+1}$ (hérédité).

💣 Une récurrence forte n'est pas plus forte, ni moins forte, qu'une récurrence multiple, dans le sens où une récurrence forte peut ne nécessiter qu'une seule initialisation (elle parait alors «plus faible»), ou plusieurs.

Il n'y a pas de recette, c'est à vous de vous adapter au contexte pour savoir si une récurrence simple suffit, ou bien s'il faut faire une récurrence multiple, ou une récurrence forte.

Exemple.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$$

Démontrer : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
Preuve : On procède par récurrence forte. En effet, le calcul de u_{n+1} nécessite la connaissance de tous les termes $u_0, \ldots, u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathscr{P}(n) : u_n = 1$.
— $u_0 = 1$ (énoncé) donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
On veut montrer $\mathscr{P}(n+1)$. On utilise alors la définition de u_{n+1} et le fait que par hypothèse de récurrence, u_0, u_1,...,u_n sont tous égaux à 1, ce qui donne :

$$u_{n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n+1 \text{ termes}}}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1$$

donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
— On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.

- **Variantes, remarques importantes.**

▷ Il est possible de ne faire que des récurrences fortes, puisque cela «ne coûte rien» de supposer $\mathscr{P}(k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ au lieu de ne supposer que $\mathscr{P}(n)$. *Mais ce n'est pas un bon usage!* en mathématiques on ne progresse que si l'on apprend à utiliser que les bonnes méthodes au bon moment : ne faites des récurrences fortes que si c'est vraiment nécessaire.

▷ Il est possible, c'est plus surprenant, de ne faire que des récurrences simples, par exemple en posant $\mathscr{H}_n : \mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ dans le cas d'une récurrence double, ou en posant $\mathscr{H}_n : \forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathscr{P}_k$ dans le cas d'une récurrence forte . Si cela permet de démontrer les principes de récurrence multiple et de récurrence forte, cela n'a pas réellement d'intérêt en pratique.

▷ Parfois, on veut démontrer $\mathscr{P}_k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, où n est un entier naturel. On peut raisonner par *récurrence finie* en s'appuyant sur le principe :

$$\text{si } \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie},}_{\text{initialisation}} \qquad \text{et si : } \underbrace{\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \mathscr{P}_k \Longrightarrow \mathscr{P}_{k+1},}_{\text{hérédité}} \qquad \text{alors : } \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathscr{P}_k$$

Pour montrer : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\mathscr{P}_k$, on rédige ainsi :
— On explicite $\mathscr{P}_k$: c'est une proposition qui dépend de k, k étant un entier introduit *avant* d'écrire $\mathscr{P}_k$.
— On démontre que $\mathscr{P}_0$ est vraie (initialisation).
— Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ (il faut laisser un rang libre pour le dernier pas). On suppose que $\mathscr{P}_k$ est vraie. Montrons $\mathscr{P}_{k+1}$. Et on démontre $\mathscr{P}_{k+1}$ (hérédité).

▷ Il arrive enfin que l'on souhaite construire des familles d'objets par récurrence (une suite par exemple).
L'idée étant la suivante : si l'on sait construire le premier objet, et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait construire le $n+1$-ième objet à partir du précédent (ou de plusieurs précédents si la «récurrence» est multiple ou forte), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut construire le n-ième objet.
On verra cela dans le chapitre sur les suites avec, en particulier, le théorème de Bolzano-Weierstrass et dans le chapitre sur les espaces vectoriels.

VII. Raisonnement par disjonction de cas

Quand on veut montrer que $p \Longrightarrow q$ et que p est de la forme $p = (p_1 \text{ ou } p_2)$, on montre d'une part que $p_1 \Longrightarrow q$ et d'autre part que $p_2 \Longrightarrow q$. C'est un raisonnement par *disjonction de cas* (et cela ne correspond pas à «montrer une disjonction», puisqu'ici on «utilise» la disjonction).

Exemple.
Démontrer : pour tout entier relatif n, $\frac{n(n+1)}{2}$ est entier.
Preuve : Soit $n \in \mathbb{Z}$.
— Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{Z}$$

— Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$. Alors

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{Z}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$.

On peut aussi utiliser le raisonnement par disjonction de cas pour établir une équivalence. En effet, $(p \Longleftrightarrow q)$ et $\big((p \Longrightarrow q)$ et $(\text{non}(p) \Longrightarrow \text{non}(q))\big)$ sont équivalentes.

Exemple.
Démontrer : pour tout entier relatif n, n est impair si et seulement si n^2 est impair.
Preuve : Soit $n \in \mathbb{Z}$.
— Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$, et ainsi

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

où $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, donc n^2 est impair.
— Si n n'est pas impair, alors n est pair et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$, donc

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2 \times k^2$$

où $2k^2 \in \mathbb{Z}$, donc n^2 est pair donc pas impair.
Ainsi : pour tout entier relatif n, n est impair si et seulement si n^2 est impair.

VIII. Raisonnement par l'absurde

Une *contradiction* est une proposition de la forme «q et (non q)».

Ainsi, si d'une proposition on arrive à tirer une contradiction, c'est qu'elle est fausse, donc son contraire est vrai.
Quand on veut montrer que p est vraie à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, on commence par écrire :

«On suppose (par l'absurde) que p est FAUSSE.»

et on obtient une contradiction, ce qui permet de conclure que p est vraie.

Exemple.
Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+2} \notin \mathbb{Z}$.
Preuve : On suppose par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+2} \in \mathbb{Z}$. Notons a cet entier. Par positivité de la racine carrée, $a \geqslant 0$. Puis par élévation au carré il vient :

$$n^2 + 2 = a^2 \quad \text{donc} \quad a^2 - n^2 = 2 \quad \text{donc} \quad (a-n)(a+n) = 2$$

Comme $a + n \geqslant 0$ et que le produit $(a-n)(a+n) = 2$, nécessairement $a + n > 0$ et $a - n > 0$. De plus, $a + n$ et $a - n$ sont des entiers dont le produit vaut 2 : l'un vaut donc 1 et l'autre 2, et donc comme $a - n \leqslant a + n$ on a :

$$\begin{cases} a - n = 1 \\ a + n = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a - n = 1 \\ 2a = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} n = \frac{1}{2} \\ a = \frac{3}{2} \end{cases}$$

En particulier $n \notin \mathbb{N}$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur n.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+2} \notin \mathbb{Z}$.

IX. Raisonnement par analyse-synthèse

Quand on veut déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E qui satisfont une propriété $\mathscr{P}$, on raisonne souvent par analyse-synthèse de la manière suivante :

- **Analyse.** Soit $x \in E$. On suppose $\mathscr{P}(x)$.

  ⋮

  On cherche les propriétés que possède x afin de réduire les possibilités pour x,
  on s'arrête quand on estime avoir suffisamment d'information sur x.

  ⋮

- **Synthèse.** Posons $x = \ldots$. (*d'après les informations obtenues lors de l'analyse*)
  Vérifions que $x \in E$ et que $\mathscr{P}(x)$.

  ⋮

Sans le savoir, vous utilisez en réalité depuis toujours le raisonnement par analyse-synthèse. Simplement, vous aurez désormais besoin de comprendre, au moment où vous en faites une, que vous êtes en train d'effectuer une analyse-synthèse.
— Dans l'analyse, on part d'un élément quelconque de E et on montre que s'il satisfait la propriété $\mathscr{P}$, il a forcément telle ou telle tête et non telle autre.
En résumé, DANS L'ANALYSE ON RESTREINT LE CHAMP DES SOLUTIONS POSSIBLES.
— Dans la synthèse, on vérifie que les possibilités obtenues dans l'analyse sont plus que des possibilités, qu'elles sont bel et bien solutions du problème étudié, *i.e.* des éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$.

À l'issue de ce double mouvement, on a déterminé tous les éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$.

Par exemple, vous faites sans le savoir une analyse-synthèse chaque fois que vous résolvez une équation. On vous l'a dit et répété, la résolution d'une équation est toujours un double mouvement avec réciproque. Tâchons de nous en convaincre sur un exemple de résolution par équivalence. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Analyse
Les seules solutions possibes sont $-\sqrt{3}$, -1, 1 et $\sqrt{3}$ $\Downarrow$

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^2 + 3 = 0 &\iff (x^2)^2 - 4(x^2) + 3 = 0 \\ &\underset{\Delta=4}{\iff} x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = 3 \\ &\iff x \in \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\} \end{aligned}$$

$\Uparrow$ **Synthèse**
$-\sqrt{3}$, -1, 1 et $\sqrt{3}$ sont bien solutions

Exemple.
On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$.
  En particulier, pour $y = f(x) \in \mathbb{R}$, on obtient :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(0) = 2 - x - f(x) \quad \text{donc} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x + 2 - f(0)$$
  Autrement dit, f est affine de coefficient directeur -1, elle est de la forme $f : x \mapsto -x + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Nous avons déjà bien réduit les possibilités pour f, on peut estimer que c'est suffisant pour passer à la synthèse. Attention, à ce stade les fonctions possibles sont de la forme trouvées, mais toutes les fonctions de cette forme ne conviennent pas nécessairement! c'est la synthèse qui permet de faire le tri.
- **Synthèse.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $f : x \mapsto -x + \lambda$. Alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
  $$f\big(y - f(x)\big) = -y + f(x) + \lambda = -y - x + 2\lambda$$
  La seule valeur de λ pour laquelle la relation fonctionnelle est satisfaite est donc $\lambda = 1$.

Bilan : la fonction $x \mapsto 1 - x$ est la seule solution du problème étudié.

Remarque. L'analyse aurait pu être prolongée, en effet, après avoir obtenu que $f : x \mapsto -x + 2 - f(0)$, on peut évaluer la relation en $x = 0$ pour obtenir $f(0) = 2 - f(0)$ donc $f(0) = 1$, puis $f : x \mapsto 1 - x$. Ainsi dès l'analyse il n'y a plus qu'une seule fonction possible, ce ne dispense néanmoins pas de vérifier en synthèse que cette fonction satisfait bien la relation de l'équation fonctionnelle.
On voit bien ici la principale difficulté de l'analyse-synthèse, il n'est pas toujours évident de savoir quand arrêter l'analyse.

Le raisonnement par analyse-synthèse est souvent employé pour montrer les propositions de la forme : $\exists! x \in E, \mathscr{P}(x)$. Montrer une telle proposition, c'est en effet chercher l'ensemble des éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$ et montrer qu'il en existe exactement un.
Dans ce cadre, l'analyse réduit le champ des possibles jusqu'à obtention d'une FORME UNIQUE de l'objet étudié, puis la synthèse vérifie que cette forme unique est bel et bien solution.

Revenons pour finir sur la manière dont on prouve une existence en mathématiques. «On pose $x = \dots$», souvenez-vous. L'ennui, c'est qu'il faut avoir à l'avance une idée d'objet x pour vérifier qu'il a la propriété souhaitée. On tourne un peu en rond, mais l'analyse-synthèse est justement une machine à avoir des idées. Dans l'analyse, on prouve l'unicité, mais on le fait sous forme d'enquête, et à la fin on connaît la forme de l'objet recherché x. En montrant l'unicité, on prépare donc la preuve d'existence qui est la synthèse. En résumé, dans l'analyse-synthèse, l'unicité est déjà une manière d'aborder l'existence.

Schématiquement : «Analyse = Unicité / Synthèse=Existence»

Exemple.
On veut monter que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f s'écrit comme somme d'une fonction paire que l'on note f_1 et d'un fonction impaire que l'on note f_2.
  Alors :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad (1)$$
  Pour exploiter la parité de f_1 et l'imparité de f_2, il est naturel d'évaluer f en $-x$:
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \underbrace{f_1(-x)}_{=f_1(x)} + \underbrace{f_2(-x)}_{=-f_2(x)} = f_1(x) - f_2(x) \qquad (2)$$
  Ainsi $(1) + (2)$ donne : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2f_1(x) = f(x) + f(-x)$,
  et $(1) - (2)$ donne : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2f_2(x) = f(x) - f(-x)$.
  Finalement on a déterminé de manière unique les fonctions f_1 et f_2, elles sont définies par :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big),\ f_2(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$$
- **Synthèse.** Soit $f \in E$. Alors :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$$
  donc f est la somme de $f_1 : x \mapsto \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$ et $f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$.
  Il reste maintenant à vérifier la parité des fonctions f_1 et f_2. On calcule pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$f_1(-x) = \frac{1}{2}\big(f(-x) + f(+x)\big) = f_1(x)$$
  et
  $$f_2(-x) = \frac{1}{2}\big(f(-x) - f(+x)\big) = -\frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) = -f_2(x)$$
  donc f_1 est paire et f_2 est impaire.

Bilan : on a démontré que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

X. Rédiger avec des fonctions ou des suites

Cas des fonctions.

- **Définir une fonction.**
  Pour définir une fonction (par exemple la fonction racine carrée), on écrit proprement :

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

  $\mathbb{R}_+$ est *l'ensemble de définition*, $\mathbb{R}$ est *l'ensemble d'arrivée*, la flèche entre les ensembles de départ et d'arrivée est toujours une simple flèche, celle entre x et la formule définissant son image $f(x)$ comprend une petite barre verticale au début (attention il est très important de bien écrire la bonne flèche!).
  Noter que l'ensemble d'arrivé $\mathbb{R}$ n'est pas *l'ensemble image* (qui est l'ensemble des valeurs atteintes par $f(x)$ quand x décrit l'ensemble de départ) qui est ici $\mathbb{R}_+$.

  Traditionnellement dans l'étude des fonctions l'ensemble d'arrivée d'une fonction à valeurs réelles est $\mathbb{R}$, même si l'ensemble image est plus petit (comme dans l'exemple précédent), on conserve une notation générale où l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.

  La même fonction peut être introduite de façon équivalente par :
  ▷ On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
  ▷ On note $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$.
  ▷ On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$.
  ▷ On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$.

  On s'interdira scrupuleusement d'écrire, entre autres :
  ▷ On note f la fonction $\sqrt{x}$ sur x (car $\sqrt{x}$ «tout seul» est - au mieux - un réel et pas une fonction).
  ▷ On note f la fonction $x \to \sqrt{x}$ (l'intention est meilleure, mais il y a un problème de flèche).
  ▷ On pose $f(x) = \sqrt{x}$ (il manque un quantificateur, x n'est pas introduit!).

  De façon générale aussi, on veillera à utiliser les lettres x, y, t pour désigner les variables d'une fonction, et d'éviter le plus possible d'utiliser les lettres i, j, k, ℓ, n plutôt réservées aux entiers (les fonctions définies sur des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ relèvent de l'étude des suites et ne seront pas envisagées avec le formalisme que l'on vient d'introduire).

- **Parler d'une fonction.**
  Pour parler d'une fonction, on pourra donc écrire «la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$», et non «la fonction $\sqrt{x}$». Retenir : la fonction f, mais le réel $f(x)$. Par exemple il est correct d'écrire «la fonction $x \mapsto \sin x$» ou même «la fonction sin» (puisqu'elle a un nom officiel), mais incorrect d'écrire «la fonction $\sin(x)$».

  D'autre part, si I est un intervalle et f une fonction, on pourra dire que «f est définie/monotone/continue/dérivable (par exemple) **SUR** I», mais il est incorrect de dire que «f est définie/monotone/continue/dérivable pour tout $x \in I$», ni même que «$f(x)$ est définie/monotone/continue/dérivable pour tout $x \in I$» (l'ajout du x ne change rien au problème).

Cas des suites.

- **Définir une suite.**
  Pour définir une suite, on écrit proprement (par exemple) :

$$\text{Soit } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ la suite définie par : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2$$

  En général, on omet de préciser en indice «$n \in \mathbb{N}$» et on peut écrire «la suite (u_n)». En revanche il est incorrect d'écrire «la suite u_n».
  De façon équivalente on peut introduire la suite de la façon suivante : soit (u_n) la suite de terme général $u_n = n^2$. Mentionner le terme général dispense de l'usage de quantificateur.

- **Parler d'une suite.**
  On retient, comme pour les fonctions : la suite (u_n), mais le réel u_n.
  Concernant les propriétés telles que la monotonie, on dira qu'une suite (u_n) est monotone SANS préciser «sur $\mathbb{N}$».
  Éventuellement la suite pourra être monotone «à partir d'un certain rang», mais il ne sera jamais intéressant d'étudier la monotonie d'une suite sur un ensemble fini d'indices.