Transition lycée-prépa

Contexte.

Ce document sert de transition entre le lycée et la classe préparatoire. Il a pour but de faciliter la rentrée, de vous permettre de combler d'éventuelles lacunes, et d'arriver déjà « échauffé », afin d'aborder dans de bonnes conditions le rythme soutenu d'une classe préparatoire.

Les rappels de cours, méthodes et exercices proposés ne couvrent pas les programmes de première et de terminale, mais sont destinés à renforcer et à compléter vos capacités calculatoires et logiques. Celles-ci sont le socle sur lequel vous devrez vous appuyer. Les attentes dans ces domaines sont en effet bien plus grandes en classe préparatoire qu'au lycée.

Les exercices sont corrigés, certains sont également accompagnés de rappels de cours, de méthodes, et de conseils :

- Il est important de bien maîtriser toutes les méthodes rappelées dans ce document.
- Il est recommandé de chercher tous les exercices, d'abord sans regarder la correction.
- Il faut ensuite bien comprendre la correction, et savoir refaire l'exercice rapidement sans la consulter.

Il sera nécessaire de se remettre au travail au moins deux semaines avant la rentrée. Il peut être pertinent d'élargir cette période de travail à 3 ou 4 semaines réparties dans l'été.

Contenu, mode d'emploi.

Le document est divisé en chapitres :

I. Calcul algébrique.
II. Étude de fonctions.
III. Nombres complexes.
IV. Matrices.
V. Raisonner, rédiger.
VI. Solution des exercices.

Le premier chapitre doit être travaillé avec sérieux : bien que vous soyez convaincus que vous savez déjà très bien tout ce qui figure dans cette partie, et que c'est «facile», les points abordés sont sources d'erreurs fréquentes encore longtemps après la rentrée.

Le second chapitre est le plus important : c'est le domaine des mathématiques où l'écart entre la formation du lycée et les attendus de la prépa est le plus grand. Nous consacrerons un chapitre aux études de fonctions mais cela sera trop court compte-tenu du manque de pratique que vous avez : entraînez-vous dès maintenant.

Les deux chapitres suivants sont optionnels, ils ne sont nécessaires que si vous n'avez pas suivi l'option maths expertes : les preuves ne sont pas données, mais les énoncés vus en maths expertes et utiles en prépa y figurent, le but étant de manipuler un peu ces nouveaux objets avant qu'il ne soient réintroduits dans le cours de sup (autrement dit vous n'avez rien manqué d'irrattrapable si vous n'avez pas suivi maths expertes!). Néanmoins, si vous avez suivi l'option maths expertes, il n'est pas inutile d'y jeter un œil et de chercher les exercices.

Enfin l'avant dernier chapitre, bien plus exigeant à lire et à assimiler, fixe les bonnes règles de rédaction et énumère les principaux types de raisonnements mathématiques : **c'est un chapitre que vous aurez intérêt à relire plusieurs fois dans l'année.**

Par ailleurs, dans la dernière partie relative aux corrigés des exercices, vous trouverez sûrement des erreurs (plus ou moins graves) : merci des les recenser et de mes les indiquer *à la rentrée* (par retour direct ou par mail).

I. Calcul algébrique

1. Règles de priorités des opérations

Dans une expression numérique comportant ou non des parenthèses, on effectue les calculs dans l'ordre suivant :
- en premier les calculs écrits entre parenthèses, en commençant par les parenthèses les plus intérieures,
- ensuite les puissances et les factorielles (même niveau de priorité), en faisant les calculs dans l'ordre de la gauche vers la droite,
- ensuite les multiplications et les divisions (même niveau de priorité), en faisant les calculs dans l'ordre de la gauche vers la droite,
- enfin les additions et les soustractions.

Exercice 1.

Répondre par Vrai ou Faux.
- $4x - x^2 = 4x(1 - x^2)$
- $(-1)^3 + 4 - 3 \times 2 = -3$
- $(-1)^4 + 2 \times 3/2 + 1 = 3$
- $1 - (-1)^n = 2$
- $2 \times 4^2 = 64$
- $3 \times 2^2 + (3 - (-1)^2) = 14$
- $2n! = (2n)!$

2. Racine carrée et valeur absolue

On rappelle la définition de la racine carrée d'un réel positif ou nul :

Soit a un réel positif ou nul. Il existe un unique réel positif ou nul x tel que $x^2 = a$; on le note $\sqrt{a}$.
En particulier, l'équation $x^2 = a$ d'inconnue $a \in \mathbb{R}$:
- admet exactement deux solutions réelles opposées si $a > 0$, ce sont $x = \sqrt{a} > 0$ et $x = -\sqrt{a} < 0$;
- admet exactement une solution si $a = 0$, c'est $x = 0$;
- n'a pas de solution réelle si $a < 0$.

On rappelle la définition de la valeur absolue d'un réel :

Soit x un réel. La valeur absolue de x, notée $|x|$ est définie par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$
En particulier, la valeur absolue d'un réel est positive ou nulle.

Le résultat de l'exercice suivant est à connaître absolument.

Exercice 2.

Soit x un réel. Alors $\sqrt{x^2} = |x|$.

3. Trigonométrie

a) Sinus et Cosinus

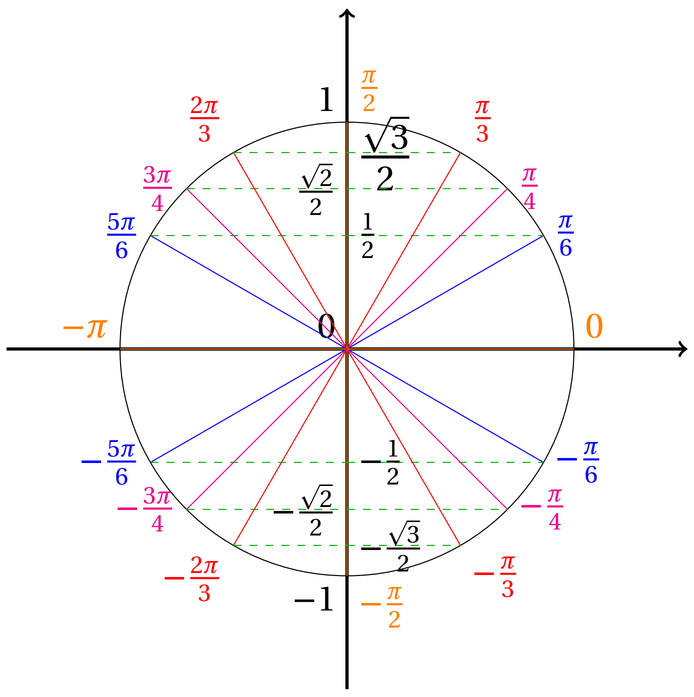
Les fonctions sinus et cosinus seront revues en première période. En attendant, on rappelle ci-dessous les principales formules trigonométriques à connaître :
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

- $\forall\, a, b \in \mathbb{R},\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(x+\pi) = -\cos(x),\ \sin(x+\pi) = -\sin(x)$
- $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(\pi/2 - x) = \sin(x),\ \sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Rappel des valeurs remarquables :

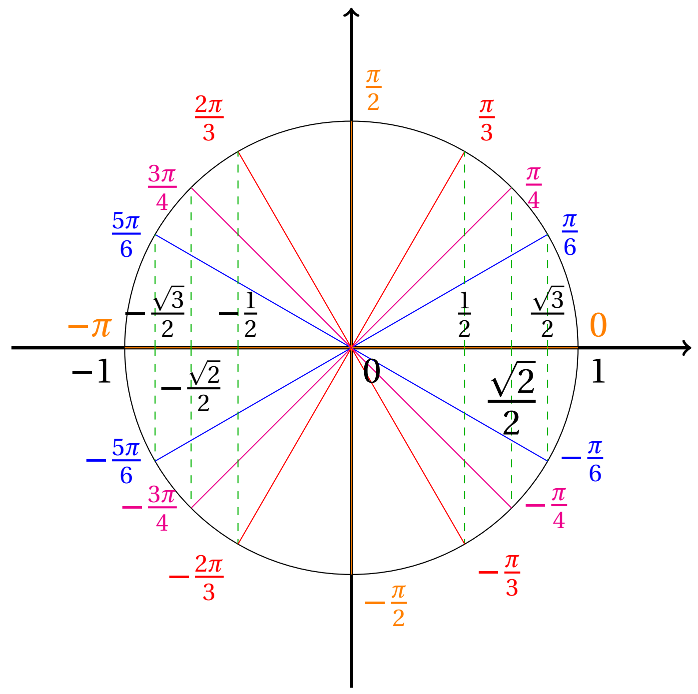
- $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/6) = 1/2$, $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$, $\sin(\pi/2) = 1$, $\sin(\pi) = 0$.

  Les autres valeurs remarquables se retrouvent à l'aide d'un cercle trigonométrique ou à l'aide des symétries de sin.



- $\cos(0) = 1$, $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$, $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\cos(\pi/2) = 0$, $\cos(\pi) = -1$.

  Les autres valeurs remarquables se retrouvent à l'aide d'un cercle trigonométrique ou à l'aide des symétries de cos.



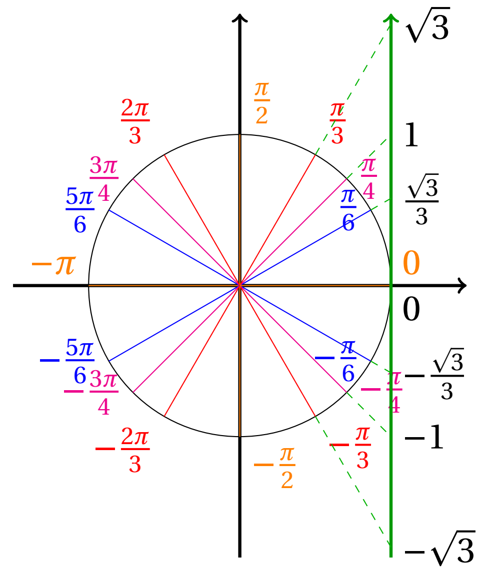
b) Tangente

Par définition, pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, donc tout réel x non égal à $\dfrac{\pi}{2}$ à un multiple de π près, on définit $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Comme pour les autres fonctions trigonométriques, on reverra ses principales propriétés à l'occasion du chapitre sur les fonctions.

On rappelle quelques valeurs remarquables : $\tan(0) = 0$, $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$, $\tan(\pi/4) = 1$, $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$.

Les autres valeurs remarquables se retrouvent à l'aide des symétries de tan.



? Exercice 3.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ ne soient pas nuls.
Démontrer que :

1. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$;
2. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$.

4. Exponentielle et logarithme

On rappelle les principales propriétés des fonctions exponentielles et logarithme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^x\right) = e^x \qquad e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{a+b} = e^a e^b, \ \ e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\ln(x)\big) = \frac{1}{x} \qquad \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(ab) = \ln(a)+\ln(b), \ \ \ln(a/b) = \ln(a)-\ln(b), \ \ \ln(1/a) = -\ln(a)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \ \ln(a^n) = n\ln(a), \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \ln(e^a) = a \qquad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ e^{\ln(a)} = a$$

La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Attention, bien retenir que $\ln(x)$ n'existe que si $x > 0$, mais $\ln(x)$ peut prendre des valeurs négatives ! Par exemple $\ln(1/2) < 0$.

? Exercice 4.

Simplifier les expressions suivantes.

1. $\ln(4)$;
2. $\ln(8e)$;
3. $\ln(\sqrt{2})$;
4. $\ln(1/2)+\ln(2/3)+\ln(3/4)+\ln(4/5)+\ln(5/6)$;
5. $\ln\left((3+2\sqrt{2})^{2025}\right)+\ln\left((3-2\sqrt{2})^{2025}\right)$.

? Exercice 5.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout réel strictement positif x, on définit «x puissance α», noté x^α, par :

$$x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)}$$

1. Vérifier que cette définition «prolonge» la définition des puissances entières, c'est-à-dire que si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $x^\alpha = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{\alpha \text{ facteurs}}$, et si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, alors $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$.
2. Démontrer la généralisation de la formule rappelée en début de paragraphe :
$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall b \in \mathbb{R}, \quad \ln(a^b) = b\ln(a)$$
3. Démontrer les formules :
$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall b, c \in \mathbb{R}, \quad a^b a^c = a^{bc}, \quad \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}, \quad (a^b)^c = a^{bc}$$
4. Déterminer les limites de x^α en 0^+ et en $+\infty$, en distinguant les cas $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.
5. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\alpha\right) = \alpha x^{\alpha-1}$.

5. Établir une inégalité

a) Rappels

- On rappelle les règles de signes suivantes :

Signe de a	Signe de b	Signe de $a\times b$	Signe de a/b	Signe de $a+b$
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$-$	inconnu
$-$	$+$	$-$	$-$	inconnu
$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

- Les 3 identités remarquables usuelles sont à connaître. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad ; \quad (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \quad ; \quad a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$$

- Les opérations suivantes conservent le sens des inégalités :
  — Ajouter un réel quelconque α : si $x \leqslant y$, alors $x+\alpha \leqslant y+\alpha$.
  — Multiplier par un réel positif α : si $x \leqslant y$ et $\alpha \geqslant 0$, alors $\alpha\times x \leqslant \alpha\times y$.
  — Ajouter des inégalités : si $x \leqslant y$ et $a \leqslant b$, alors $x+a \leqslant y+b$.
  — Multiplier des inégalités de nombres positifs : si $0 \leqslant x \leqslant y$ et $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $x\times a \leqslant y\times b$.
  — Appliquer de chaque côté une fonction croissante : si f est croissante sur un intervalle I et si $x, y \in I$ sont tels que $x \leqslant y$, alors $f(x) \leqslant f(y)$.
  Fonctions croissantes de référence : exp sur $\mathbb{R}$, ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- Les opérations suivantes renversent le sens des inégalités :

— Multiplier par un réel négatif α : si $x \leqslant y$ et $\alpha \leqslant 0$, alors $\alpha \times x \geqslant \alpha \times y$.
— Passer à l'inverse dans des inégalités de nombres de même signe : si $0 < x \leqslant y$, alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$; si $x \leqslant y < 0$, alors $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$.
Attention, si x et y sont de signes opposés alors on ne peut pas passer à l'inverse dans l'inégalité $x \leqslant y$.
Par ailleurs on ne peut pas diviser des inégalités (même de nombres positifs) : si nécessaire il faut procéder en deux temps avec passage à l'inverse puis multiplication (voir la question 3. de l'exercice 6).
— Appliquer de chaque côté une fonction décroissante : si f est décroissante sur un intervalle I et si $x, y \in I$ sont tels que $x \leqslant y$, alors $f(x) \geqslant f(y)$.
Fonction décroissante de référence : $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_-$.

- On retiendra qu'il faut toujours être prudent lorsque l'on passe au carré dans une inégalité :
  — Si $0 \leqslant x \leqslant y$, alors $x^2 \leqslant y^2$.
  — Si $x \leqslant y \leqslant 0$, alors $x^2 \geqslant y^2$.
  — Si $x \leqslant 0 \leqslant y$, alors il n'est pas possible de prendre le carré dans l'inégalité.

b) Méthode

Pour comparer deux nombres A et B :

- Dans de nombreux cas, on étudie le signe de la différence $A - B$. Pour cela :
  — Il arrive que le signe de $A - B$ s'obtienne par une étude directe en factorisant l'expression ou en la réduisant au même dénominateur (il est toujours plus simple d'étudier le signe d'un produit ou d'un quotient que d'une somme ou d'une différence). Les identités remarquables rappelées dans la partie précédente peuvent être utiles!
  — Si l'on doit comparer deux nombres $A(x)$ et $B(x)$ avec x un réel appartenant à un certain intervalle I, on peut aussi tenter d'étudier la fonction $f : x \mapsto A(x) - B(x)$, le signe de f sur I pouvant souvent se déduire de son tableau de variations. Ce point de vue est un peu plus développé dans le chapitre sur les fonctions.
- Toujours dans le cas où l'on doit prouver que $A(x) \leqslant B(x)$ avec x un réel appartenant à un certain intervalle I, on peut aussi partir de l'information connue sur x (par exemple $x \geqslant 0$ si $I = [0, +\infty[$, ou $1 \leqslant x \leqslant 2$ si $I = [1, 2]$) pour établir de proche en proche par opérations successives l'inégalité $A(x) \leqslant B(x)$.

c) Conseils

— Les valeurs approchées suivantes sont utiles : $e \approx 2{,}7$; $\ln(2) \approx 0{,}7$; $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.
Ces valeurs approchées seront rappelées dans les énoncés si la calculatrice n'est pas autorisé, inutile de les apprendre maintenant, mais vous les retiendrez sûrement très vite.

— Il faut aussi connaître les inégalités suivantes (justifiées par la monotonie des fonctions considérées) :

$$\begin{array}{ll} \forall x \geqslant 1,\ x^n \geqslant 1 & \forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant x^n \leqslant 1 \\ \forall x \geqslant 0,\ e^x \geqslant 1 & \forall x \leqslant 0,\ 0 < e^x \leqslant 1 \\ \forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 & \forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \end{array}$$

— Il existe d'autres méthodes plus sophistiquées permettant d'établir des inégalités, par exemple à partir de la convexité d'une fonction ou à l'aide de formules de Taylor, on les rencontrera dans la suite du cours.

d) Exercices

Exercice 6.

1. Comparer les nombres $\dfrac{2}{7}$ et $\dfrac{3}{8}$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^2 \geqslant 4x$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{2+\cos(x)}{2+\sin(x)} \leqslant 3$.
4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $2\ln(x) < x$.

Exercice 7.

1. Comparer les nombres $\dfrac{1}{\ln(2)}$ et $\dfrac{2}{\ln(3)}$, ainsi que les nombres $\dfrac{e-1}{2e-3}$ et 1.
2. Encadrer les réels $\sqrt{29}$ et $\dfrac{16-\sqrt{73}}{3}$ par deux entiers consécutifs.

Exercice 8.

1. Prouver que : $\forall x \in]3, +\infty[$, $\dfrac{7x-18}{2x-5} > 3$.
2. Prouver que : $\forall x \in [0, +\infty[$, $x \leqslant \ln(1+e^x) \leqslant x + \ln(2)$.
3. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 - e^{-x} \leqslant x$.

Exercice 9.

Soit f la fonction définie par : $\forall t \in [1, +\infty[$, $f(t) = \dfrac{t^2-1}{2t}$.
Prouver que : $\forall t \in [1, +\infty[$, $2f\left(\sqrt{t}\right) \leqslant f(t)$.

6. Simplifier une expression contenant des fractions

a) Rappels

Dans ce qui suit, a, b, c et d sont des réels quelconques, non nuls s'ils sont au dénominateur des fractions considérées.
— On rappelle dans un premier temps les formules élémentaires suivantes :

$$\frac{a}{1} = a \quad ; \quad \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad ; \quad \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \quad ; \quad \frac{a \times b}{a \times c} = \frac{b}{c}$$

La formule à droite permet de simplifier des fractions.

— Multiplier des fractions est facile. En effet, les numérateurs se multiplient entre eux et les dénominateurs se multiplient entre eux :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

En particulier :

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{d}\times\frac{c}{b}=\frac{c\times a}{d}\times\frac{1}{b} \quad ; \quad a\times\frac{b}{c}=\frac{a\times b}{c}=b\times a\times\frac{1}{c}=\frac{a}{c}\times b$$

— Pour diviser des fractions, on pourra utiliser les formules suivantes :

$$\frac{1}{\frac{1}{a}}=a \quad ; \quad \frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{b}{a} \quad ; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

— Additionner ou soustraire des fractions peut être un petit peu plus compliqué, car nécessite d'avoir des fractions au même dénominateur :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \quad ; \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

b) Méthode

— Pour simplifier une fraction, on doit faire apparaître des facteurs communs au numérateur et au dénominateur, facteurs communs que l'on peut ensuite supprimer. Il s'agit donc d'avoir des expressions les plus factorisées possibles au numérateur et au dénominateur. Pour cela les identités remarquables peuvent aider !

Exemple.
On a : $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)\times(x+1)}{(x+1)\times(x+1)}=\dfrac{x-1}{x+1}$.
On a : $\dfrac{9\times8\times7}{6\times5\times4}=\dfrac{3\times3\times4\times2\times7}{3\times2\times4\times5}=\dfrac{3\times7}{5}=\dfrac{21}{5}$.
Dans ce deuxième exemple, il ne fallait surtout pas calculer $\frac{9\times8\times7}{6\times5\times4}=\frac{504}{120}$ pour ensuite simplifier dans un deuxième temps. Il est beaucoup plus facile de simplifier la fraction dès le départ !

— Les sommes et différences de fractions demandent un minimum de réflexion. Si les dénominateurs des fractions concernées sont différents, il faut alors mettre ces fractions au même dénominateur, ce dénominateur commun étant un multiple des deux dénominateurs de départ.

Exemple.
On a : $\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{3}=\dfrac{1\times3}{2\times3}+\dfrac{5\times2}{3\times2}=\dfrac{3}{6}+\dfrac{10}{6}=\dfrac{13}{6}$.
On a : $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1\times(x+1)}{x\times(x+1)}-\dfrac{1\times x}{(x+1)\times x}=\dfrac{x+1}{x(x+1)}-\dfrac{x}{x(x+1)}=\dfrac{(x+1)-x}{x(x+1)}$.
Ainsi : $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}$.

Souvent le dénominateur commun n'a pas besoin d'être le produit des dénominateurs de départ. Plus le dénominateur commun choisi est petit, plus simples seront les calculs qui suivent.

Exemple.
On a : $\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{5\times2}{4}-\dfrac{3}{4}=\dfrac{10-3}{4}=\dfrac{7}{4}$.
On a : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{1\times(x-1)}{x\times(x-1)}+\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{(x-1)+1}{x(x-1)}=\dfrac{x}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}$.
Il aurait été maladroit de choisir $2\times4=8$ ou $x\times x(x-1)=x^2(x-1)$ pour dénominateurs communs dans les calculs ci-dessus.

c) Conseils

— Pour les fractions empilées à 3 étages, il doit obligatoirement y avoir un trait de fraction plus long que l'autre, le trait le plus long étant placé au niveau du signe « = ». Pour se ramener aux formules de la première partie sans faire d'erreur, on écrit :

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{b\times c} \quad ; \quad \frac{a}{\frac{b}{c}}=\frac{\frac{a}{1}}{\frac{b}{c}}=\frac{a}{1}\times\frac{c}{b}=\frac{a\times c}{b}$$

— La formule suivante peut être utile en pratique : $\forall a\in\mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{a}{\sqrt{a}}=\sqrt{a}$.

d) Exercices

? Exercice 10.
Simplifier les fractions suivantes :

$$A=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}{2} \quad ; \quad B=\frac{\frac{1}{5}+\frac{4}{15}}{1+\frac{2}{5}} \quad ; \quad C=\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}}$$

? Exercice 11.
Simplifier les expressions suivantes :

$$f(x)=\frac{4x^2}{1-\frac{2-x}{2+x}} \quad ; \quad g(x)=\frac{x}{x-1}+\frac{x}{1-x} \quad ; \quad h(x)=\frac{6x+4}{4-x^2}-\frac{x}{x+2}$$

puis :

$$u(x)=\frac{e^{2x}+2e^x+1}{1+e^{-x}} \quad ; \quad v(x)=\ln\left(\frac{e^{2x}+e^x}{e^{-2x}+e^{-x}}\right)$$

7. Simplifier une expression contenant des puissances

a) Rappels

Dans ce qui suit, a et b sont des réels quelconques, non nuls s'ils sont au dénominateur des fractions.

— Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a par définition :

$$a^1 = a \quad ; \quad a^2 = a \times a \quad ; \quad a^3 = a \times a \times a \quad ; \quad a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$$

On a notamment $0^n = 0$ et $1^n = 1$.

— Par convention, si a est non nul alors on pose $a^0 = 1$.
On étend la convention à « $0^0 = 1$ ».

— Les puissances sont compatibles avec les produits, les inverses et les quotients.
Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad ; \quad \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

De plus pour tous $n, m \in \mathbb{N}$:

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad ; \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad ; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad ; \quad (a^n)^m = a^{n\times m}$$

En particulier : $a^{n+1} = a \times a^n$; $a^{2n} = (a^2)^n = (a^n)^2$; $\dfrac{a}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-1}}$.

— Malheureusement $(a+b)^n$ n'est en général pas égal à $a^n + b^n$. Il existe toutefois une formule permettant de développer $(a+b)^n$, appelée « formule du binôme de Newton » : elle est moins élémentaire que les formules ci-dessus et sera étudiée dès le début de l'année.

b) Méthode

Les puissances ne sont pas compatibles avec les sommes et les différences. Pour simplifier une expression mélangeant puissances et sommes (ou différences), il faut donc factoriser cette expression ou réduire au même dénominateur les fractions qui y apparaissent.

c) Conseils

— Les puissances négatives peuvent être utiles dans certains cas, notamment pour trouver une primitive pour certaines fonctions (voir le chapitre sur les intégrales). Cependant si l'on rencontre des puissances négatives dans un calcul, il est souvent efficace pour avancer de les transformer en des puissances positives grâce à la formule $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

— On a : $\forall n \in \mathbb{N}, (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

En particulier, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|(-1)^n\right| = 1 \quad ; \quad (-1)^{2n} = 1 \quad ; \quad (-1)^{2n+1} = -1 \quad ; \quad \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$$

d) Exercices

? Exercice 12.

Simplifier les expressions suivantes :

$$A_n = 2^n + 2^n \quad ; \quad B_n = 2^n - 2^{n-1} \quad ; \quad C_n = 2^{-n} + 2^{-n} \quad ; \quad D_n = \frac{2^n}{2^{-n}}$$

? Exercice 13.

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = 2^{-1} - 3^{-2} \quad ; \quad B = \frac{3}{2^3} + \frac{2^{-2}}{4} \quad ; \quad C = \frac{\frac{1}{2^n}}{4^n} \quad ; \quad D = \frac{1}{\frac{2^n}{4^n}} \quad ; \quad E = \frac{(-1)^n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

puis :

$$F = (2^n + 2^{n-1}) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad ; \quad G = \frac{x^{2n} - 2x^{4n} + x^{6n}}{x^{2n} - 1} \quad ; \quad H = \frac{x^{2n} - 1}{x^n - 1}$$

8. Résoudre une équation simple

a) Rappels

— On dispose d'une part des propriétés importantes suivantes :

Un produit de nombres est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$a \times b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$$

Deux fractions sont égales si et seulement si leurs « produits en croix » sont égaux.
Soit $a, c \in \mathbb{R}$ et $b, d \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = c \times b$$

— La notion de fonction bijective sert souvent.

On dit qu'une fonction f de I dans J est bijective si tout élément de J admet un unique antécédent dans I par f.
En particulier :

> Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
> Si f est bijective sur I et si $x, y \in I$, alors :
> $$f(x) = f(y) \iff x = y$$

Fonctions bijectives de référence : exp de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, ln de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}_-$ dans $\mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
Les deux sens de l'équivalence sont utiles, par exemple :
— Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $x = y \iff \ln(x) = \ln(y)$.
— Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a : $x^3 = y^3 \iff x = y$.

— La fonction $x \mapsto x^2$ n'étant pas bijective sur $\mathbb{R}$, le résultat suivant (déjà mentionné) est utile :

> Soit a un réel positif et soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
> $$x^2 = a \iff x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$
> Par ailleurs si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

b) Méthode

Pour résoudre une équation d'inconnue un réel x :

— On détermine l'ensemble de validité (ou de définition) $\mathscr{D}$ de l'équation, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que l'équation ait un sens.

> **Exemple.**
> — L'ensemble de validité de $(E) : x + 2 = 3 - x$ est $\mathscr{D} = \mathbb{R}$ puisque l'équation (E) a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
> — L'ensemble de validité de $(E') : \sqrt{x-1} = \sqrt{2x}$ est $\mathscr{D} = [1 + \infty[$ puisque l'équation (E') a un sens si et seulement si $x - 1 \geqslant 0$ et $2x \geqslant 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geqslant 1$.

— Pour $x \in \mathscr{D}$, on utilise les propriétés de la partie précédente pour modifier l'équation par des équivalences successives jusqu'à arriver à isoler x. Il est souvent utile à un moment donné de mettre les termes en x d'un côté de l'égalité et les termes constants de l'autre.

> **Exemple.**
> — Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
> $$x + 2 = 3 - x \iff x + x = 3 - 2 \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$$
> — Soit $x \in [1, +\infty[$. Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a :
> $$\sqrt{x-1} = \sqrt{2x} \iff x - 1 = 2x \iff -1 = 2x - x \iff x = -1$$

— Pour conclure, il faut enfin vérifier que les solutions trouvées à l'issue des équivalences appartiennent bien au domaine de validité de l'équation.

> **Exemple.**
> — L'ensemble de validité de $(E) : x + 2 = 3 - x$ étant $\mathscr{D} = \mathbb{R}$, on déduit du calcul précédent que (E) admet une unique solution : $\frac{1}{2}$.
> — L'ensemble de validité de $(E') : \sqrt{x-1} = \sqrt{2x}$ étant $\mathscr{D} = [1 + \infty[$, la solution -1 obtenue par le calcul précédent est à rejeter. On en déduit que (E') n'admet pas de solution.

c) Conseils

— Attention, pour pouvoir passer au carré dans une égalité - tout en conservant l'équivalence - il faut impérativement que les deux membres de l'égalité soient de même signe :
$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+,\ a = b \iff a^2 = b^2 \qquad ; \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}_-,\ a = b \iff a^2 = b^2$$
Si a et b sont de signes opposés ou si leurs signes ne sont pas connus, il n'est alors pas possible de passer au carré dans l'égalité.

— Attention à bien lire la question posée : parfois on doit prouver qu'une équation admet une unique solution sans qu'il ne soit demandé de *calculer* cette solution. Dans ce cas il n'est souvent pas possible de résoudre l'équation considérée avec les méthodes vues dans ce chapitre mais il faut utiliser le théorème de la bijection (voir le chapitre sur les fonctions dans l'année).

d) Exercices

> **? Exercice 14.**
> Résoudre les équations suivantes :
> — $(E_1) : \dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+1} = 0$.
> — $(E_2) : \ln(x) + \ln(x+1) = \ln(x+2)$.
> — $(E_3) : 2e^{-x} - e^{-2x} = 0$.

> **? Exercice 15.**
> Résoudre les équations suivantes :
> 1. $(x+2)^2 = 1$.
> 2. $(x+2)^3 = 1$.
> 3. $x^5 - 4x = 0$.
> 4. $x^5 + 4x = 0$.

Exercice 16.

Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1}{2}$.
2. $\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x)=3$.
3. $\sqrt{2x-1}=x$.
4. $\sqrt{\ln(x)}=\left(\ln(x)\right)^2$.

9. Résoudre une inéquation simple

a) Rappels

— On rappelle les règles de signes suivantes :

Signe de a	Signe de b	Signe de $a\times b$	Signe de a/b
$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$	$-$
$-$	$-$	$+$	$+$

— La notion de fonction strictement croissante sert souvent :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est strictement croissante sur I et si $x,y\in I$, alors :

$$x<y \iff f(x)<f(y)$$

Fonctions strictement croissantes de référence : exp sur $\mathbb{R}$, ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $x\mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, $x\mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$, $x\mapsto\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Les deux sens de l'équivalence sont utiles, par exemple :
— Soit $x,y\in\mathbb{R}_+^*$. On a : $x<y\iff\ln(x)<\ln(y)$.
— Soit $x,y\in\mathbb{R}$. On a : $x^3\geqslant y^3\iff x\geqslant y$.
On peut aussi appliquer aux deux membres d'une inégalité une fonction strictement décroissante, ce qui a pour conséquence de renverser le sens de l'inégalité. Ce cas intervient en particulier lors du passage à l'inverse dans une inégalité dont les membres sont de même signe.

— La fonction $x\mapsto x^2$ n'étant pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$, le résultat suivant est utile :

Soit a un réel positif et soit $x\in\mathbb{R}$. On a :

$$x^2\leqslant a\iff -\sqrt{a}\leqslant x\leqslant\sqrt{a}$$

et :

$$x^2\geqslant a\iff x\geqslant\sqrt{a}\text{ ou }x\leqslant-\sqrt{a}$$

Ces équivalences sont aussi valables avec des inégalités strictes.

b) Méthode

Pour résoudre une inéquation d'inconnue un réel x :

- On détermine l'ensemble de validité $\mathcal{D}$ de l'inéquation, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que l'inéquation ait un sens.

  Exemple.
  — L'ensemble de validité de $(I):\ln(x)\leqslant\ln(1-x)$ est $\mathcal{D}=]0,1[$ puisque l'inéquation (I) a un sens si et seulement si $x>0$ et $1-x>0$, c'est-à-dire si et seulement $x>0$ et $x<1$.
  — L'ensemble de validité de $(I'):x^4>x^3$ est $\mathcal{D}=\mathbb{R}$.

- Pour $x\in\mathcal{D}$, on utilise les propriétés de la partie précédente pour modifier l'inéquation par des équivalences successives jusqu'à arriver à l'une ou l'autre des situations suivantes :
  — On réussi à isoler x, souvent en mettant à un moment donné les termes en x d'un côté de l'inégalité et les termes constants de l'autre.
  — On aboutit à l'étude du signe d'un produit ou d'une fraction, en général en factorisant l'expression ou en réduisant au même dénominateur les fractions qui apparaissent. On en déduit les réels x solutions à l'aide d'un tableau de signes, écrit pour $x\in\mathcal{D}$.

  Exemple.
  — Soit $x\in]0,1[$. La fonction $t\mapsto\ln(t)$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :
  $$\ln(x)\leqslant\ln(1-x)\iff x\leqslant1-x\iff 2x\leqslant1\iff x\leqslant\frac{1}{2}$$
  — Soit $x\in\mathbb{R}$. Il ne faut surtout pas diviser par x^3 dans l'inégalité $x^4>x^3$, puisque le signe de x^3 n'est pas connu ! La bonne méthode consiste à tout mettre à gauche puis à factoriser :
  $$x^4>x^3\iff x^4-x^3>0\iff x^3(x-1)>0$$
  On s'aide alors d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x^3(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Ainsi : $x^4>x^3\iff x<0$ ou $x>1$.

- Pour conclure, il faut enfin vérifier que les solutions trouvées à l'issue de l'étape précédente appartiennent bien à l'ensemble de validité de l'inéquation.

  Exemple.
  — L'ensemble de validité de $(I):\ln(x)\leqslant\ln(1-x)$ est $\mathcal{D}=]0,1[$. On déduit alors du calcul précédent que (I) admet pour ensemble de solutions : $]0,\frac{1}{2}]$.
  — L'ensemble de validité de $(I'):x^4>x^3$ est $\mathcal{D}=\mathbb{R}$. On déduit alors du calcul précédent que (I') admet pour ensemble de solutions : $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$.

c) Conseils

Il faut souvent faire preuve de prudence lorsque l'on manipule des inégalités :

- Si l'on multiplie ou divise les deux côtés de l'inégalité par un réel α, le signe de ce réel doit être maîtrisé, notamment lorsqu'il dépend de l'inconnue x :
  - Si le réel α est strictement positif, alors l'inégalité ne change pas de sens.
  - Si le réel α est strictement négatif, alors l'inégalité change de sens.
- Pour passer à l'inverse dans une inégalité, il faut que les deux membres de l'inégalité soient de même signe, et dans ce cas le passage à l'inverse renverse le sens de l'inégalité.
- Pour passer au carré dans une inégalité, il faut que les deux membres de l'inégalité soient positifs, et dans ce cas le passage au carré conserve le sens de l'inégalité. On peut aussi éventuellement passer au carré dans une inégalité de nombres négatifs, mais dans ce cas le passage au carré renverse le sens de l'inégalité puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Dans le cas où les signes ne sont pas maîtrisés, la méthode la plus simple consiste à ramener tous les termes dans le même membre de l'inégalité, puis factoriser ou réduire au même dénominateur pour pouvoir conclure à l'aide d'un tableau de signes.

d) Exercices

? Exercice 17.
Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \frac{x+1}{x} \leqslant \frac{x}{x+1} \qquad ; \qquad (I_2) : 2e^{-x} - e^{-2x} > 0$$

? Exercice 18.

Résoudre les équations suivantes :

1. $(x+2)^2 \leqslant 1$.
2. $(x+2)^3 \leqslant 1$.
3. $\sqrt{2x-1} > x$.
4. $\sqrt{2x-1} < x$.

? Exercice 19.

Résoudre les équations suivantes :

1. $\dfrac{e^x-1}{e^x+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
2. $\ln(x) + \ln(2x) + \ln(4x) \leqslant 3$.
3. $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x}$.

10. Résoudre une équation se ramenant à une équation du second degré

a) Rappels

Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
On considère l'équation du second degré suivante :

$$(E) : ax^2 + bx + c = 0$$

Pour résoudre l'équation (E), *dans le cas général*, on calcule dans un premier temps son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$$

On discute ensuite selon le signe du discriminant Δ :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 \times a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 \times a}$$
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une unique solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2 \times a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution.

En pratique, si on peut éviter de calculer le discriminant, en utilisant par exemple une identité remarquable, on le fera sans hésiter !

b) Méthode

- La méthode de résolution d'équations vue précédemment s'applique aussi dans ce paragraphe, à ceci-près qu'ici on rencontrera une équation du second degré à un certain moment du raisonnement. Il reste important de déterminer l'ensemble de validité de l'équation avant de commencer sa résolution.
- Il arrive que l'on puisse se ramener à une équation du second degré à l'aide d'un changement d'inconnue. Cela ne pose pas de problème particulier si l'on n'oublie pas de revenir à l'inconnue initiale à la fin de la résolution.
- Parfois on peut rencontrer une équation faisant apparaître une racine carrée. Dans ce cas

isoler la racine carrée d'un côté de l'égalité puis passer au carré est en général une bonne idée. Mais attention, pour conserver l'équivalence en passant au carré dans une égalité il faut vérifier que les deux membres de l'égalité sont de même signe !

c) Conseils

Le calcul du discriminant n'est pas toujours nécessaire (*on l'évite autant que possible!*) :
- Soit $a \geqslant 0$ fixé. L'équation $x^2 = a$ admet pour solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.
- Il est parfois possible de factoriser l'expression grâce à une identité remarquable.

> **Exemple.**
> On a : $x^2+2x+1=0 \iff (x+1)^2=0 \iff x+1=0 \iff x=-1$.

d) Exercices

Exercice 20.
Résoudre l'équation suivante : $-2x^4+3x^2+2=0$.

Exercice 21.
Résoudre les équations suivantes :
1. $2\big(\ln(x)\big)^2-3\ln(x)+1=0$.
2. $\ln(x)+\ln(x+1)=0$.
3. $e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3=0$.
4. $1-2e^x=\dfrac{e^{-x}}{3}$.
5. $x=\sqrt{2-x}$.
6. $x-\sqrt{x}=\dfrac{3}{2}$.

11. Résoudre une inéquation se ramenant à une inéquation du second degré

a) Rappels

Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.
Soit P le polynôme du second degré défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)=ax^2+bx+c$.
Pour déterminer le signe de P, *en général*, on calcule dans un premier temps son discriminant :

$$\Delta = b^2-4\times a\times c$$

On discute ensuite selon le signe du discriminant Δ :
- Si $\Delta>0$, alors P admet deux racines distinctes x_1 et x_2 avec $x_1<x_2$. Dans ce cas P est du signe de a est l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta=0$, alors P admet une unique racine x_0. Dans ce cas P est du signe de a :

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta<0$, alors P n'admet pas de racine. Dans ce cas P est du signe de a :

x	$-\infty$		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	

En pratique, si on peut éviter de calculer le discriminant, en utilisant par exemple une identité remarquable, on le fera sans hésiter !

b) Méthode

- Résoudre une inéquation du second degré revient à étudier le signe d'un polynôme du second degré, ce qui impose de connaître ses racines éventuelles. La résolution d'une inéquation du second degré nécessite donc en général la résolution de l'équation du second degré associé.
- La méthode de résolution d'inéquations vue précédemment s'applique aussi dans ce paragraphe, à ceci-près qu'ici on rencontrera une inéquation du second degré à un certain moment du raisonnement. Il reste important de déterminer l'ensemble de validité de l'inéquation avant de commencer sa résolution.
- Il arrive que l'on puisse se ramener à une inéquation du second degré à l'aide d'un changement d'inconnue. Cela ne pose pas de problème particulier si l'on n'oublie pas de revenir à l'inconnue initiale à la fin de la résolution.
- Parfois on peut rencontrer une inéquation faisant apparaître une racine carrée. Dans ce cas isoler la racine carrée d'un côté de l'inégalité puis passer au carré est en général une bonne idée. Mais attention, pour conserver l'équivalence lors du passage au carré dans une inégalité il faut vérifier que les deux membres de l'inégalité sont de même signe !

c) Conseils

Les cas classiques suivants sont à connaître :
- Soit $a \geqslant 0$ fixé. On a l'équivalence : $x^2 \leqslant a \iff -\sqrt{a} \leqslant x \leqslant \sqrt{a}$.
- Soit $a \geqslant 0$ fixé. On a l'équivalence : $x^2 \geqslant a \iff x \geqslant \sqrt{a}$ ou $x \leqslant -\sqrt{a}$.

Ces équivalences sont aussi valables avec des inégalités strictes.

d) Exercices

Exercice 22.
Résoudre l'inéquation suivante : $-2x^4+3x^2+2 \geqslant 0$.

Exercice 23.

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 1 > 0$.
2. $\ln(x) + \ln(x+1) \leqslant 0$.
3. $e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 > 0$.
4. $1 - 2e^x \geqslant \dfrac{e^{-x}}{3}$.
5. $x > \sqrt{2-x}$.
6. $x - \sqrt{x} = \dfrac{3}{2}$.

II. Étude de fonctions

1. Calculs de dérivées

Définition (dérivée en un point, dérivée sur un intervalle).

Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$.

— On dit que f est *dérivable* en a si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie.
Dans ce cas, cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a et on la note $f'(a)$.

— On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I.
On note $\mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$, la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est bien définie sur I et est appelée la *dérivée* de f.

Remarque.

— Attention, le nombre dérivé de f en a se note $f'(a)$ et non pas $f(a)'$. **Cette dernière notation n'a pas de sens!** (même si l'on peut comprendre l'intention de celui ou celle qui l'écrit).
De même, la fonction dérivée de f est $x \mapsto f'(x)$, et non $x \mapsto f(x)'$.
Cependant, s'il s'agit de dériver une expression dépendant de x mais qui n'a pas forcément été nommée, on pourra utiliser la notation $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Par exemple, si $f : x \mapsto x^2$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^2\big) = 2x$$

On veillera cependant à ne pas abuser de cette notation.

— Lorsqu'une fonction f dépend de deux variables, on distingue la dérivée par rapport à la première variable de celle par rapport à la deuxième variable. On parle de *dérivées partielles*, et on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ la dérivée partielle par rapport à la première variable (ici notée x ce qui motive le ∂x) au point (x,y), et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ la dérivée partielle par rapport à la seconde variable (ici notée y) au point (x,y).
Par exemple si f est la fonction qui à $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ associe $x^2+ye^x+y^3$, alors f est dérivable par rapport à sa première variable et par rapport à sa deuxième variable sur $\mathbb{R}^2$. On calcule pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,y) = 2x + ye^x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x,y) = e^x + 3y^2$$

Autre exemple, la loi des gaz parfaits en physique s'énonce $PV = nRT$. Intéressons nous à la pression, P, on peut la voir comme une fonction du volume, V et de la température, T (R est une constante et n est fixé dans notre propos) :

$$P(V,T) = \frac{nRT}{V}$$

P est dérivable par rapport à sa première variable (T) sur $\mathbb{R}_+$ et par rapport à sa deuxième variable (V) sur $\mathbb{R}_+^*$, et on calcule

$$\forall T \geqslant 0,\ \forall V > 0,\ \frac{\partial P}{\partial V}(V,T) = -\frac{nRT}{V^2} < 0 \quad \frac{\partial P}{\partial T}(V,T) = \frac{nR}{V} > 0$$

ce que l'on interprète : lorsque le volume augmente, la pression baisse; lorsque la température augmente, la pression augmente.

— En toute rigueur on ne parle que de dérivabilité en un point ou sur un intervalle. Néanmoins lorsque f est définie sur un ensemble D qui n'est pas un intervalle, si f est dérivable en tout point de D, on dit par abus de langage que f est dérivable sur D.

On admet à la suite quelques résultats, qui pour la plupart ont été vus au lycée. La preuve de ces résultats fera l'objet d'un chapitre ultérieur, pour l'instant seule leur manipulation est un objectif.

Proposition (tangente).

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in D$.
Si f est dérivable en a, alors la droite d'équation $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ est la tangente au graphe de f en a.

Exemple.
La fonction $f : x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x$$

La tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = f'(0)(x-0)+f(0) \quad \textit{i.e.} \quad y = x+1$$

Proposition (linéarité de la dérivation).

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soient f, g deux fonctions de D vers $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in D$. On suppose que f et g sont dérivables en x_0. Alors :

- $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$.
- λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

En d'autres termes la dérivation est linéaire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ (\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Proposition (multiplication, inverse, quotient).

Soit D un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Soient f, g deux fonctions de D vers $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in D$.
On suppose que f et g sont dérivables en x_0.
Alors :

- $h = f \times g$ est dérivable en x_0 et
$$h'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$
- Si l'on suppose de plus que $g(x_0) \neq 0$ alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$
- Si l'on suppose encore $g(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0}{g(x_0)^2}$$

Attention.
On évitera de dériver une fonction de la forme $\frac{1}{g}$ comme une fonction de la forme $\frac{f}{g}$ (avec f constante égale à 1), ceci afin d'éviter les erreurs de calculs.

Exemple.

1. Soit $f : x \mapsto \frac{3}{x\ln(x)}$.

On peut considérer $u : x \mapsto x\ln(x)$, si bien que $f = 3 \times \dfrac{1}{u}$ se dérive comme l'inverse d'une fonction et non comme le quotient de deux fonctions.
Par ailleurs, u est le produit de $x \mapsto x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, si bien que u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x)+1$$

Enfin, par quotient f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad f'(x) = 3\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = 3\frac{-\ln(x)-1}{\left(x\ln(x)\right)^2}$$

2. Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-1}$. On peut considérer $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto x-1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Par quotient $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (x-1) - 1 \times \ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-\ln(x)}{x(x-1)^2}$$

Proposition (composition).

Soient D et D' deux sous ensemble de $\mathbb{R}$. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D' \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D) \subset D'$ (pour que la composition soit possible). Soit $x_0 \in D$.
On suppose que f est dérivable en x_0 et que g est dérivable en $f(x_0)$.
Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Exemple.

1. Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$. f est la composée de $u : x \mapsto -x^2$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de $v : x \mapsto e^x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{u} & \mathbb{R} & & \\ x & \mapsto & -x^2 & & \\ & & \mathbb{R} & \xrightarrow{v} & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & e^x \\ \hline \mathbb{R} & & \xrightarrow{f = v \circ u} & & \mathbb{R} \\ x & & \mapsto & & e^{-x^2} \end{array}$$

La composition est possible, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

2. Soit $f : (x,t) \mapsto x^2\sin(2xt)$. C'est une fonction de deux variables x et t, définie sur $\mathbb{R}^2$.
— Si x est fixé, et que l'on considère la fonction $g : t \mapsto x^2\sin(2xt)$, cette dernière est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\sin(2xt)\right) = 2x^3\cos(2xt)$$

— Si t est fixé, et que l'on considère la fonction $h : x \mapsto x^2 \sin(2xt)$, cette dernière est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x^2\sin(2xt)\big) = 2x\sin(2xt) + 2tx^2\cos(2xt) = 2x\big(\sin(2xt) + tx\cos(2xt)\big)$$

2. Calculs de limites

On se repose pour l'instant, sans les énumérer, sur les résultats vus au lycée.

Soit f une fonction, si a, ℓ sont des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$, si f a pour limite ℓ en a, on peut noter $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ à la place de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

On prendra bien soin de ne **jamais** noter lim (ni la notation avec la flèche) tant que l'**existence** de la limite n'a pas été **démontrée**.
En pratique, on fait des calculs avec l'expression de $f(x)$, et ce n'est qu'à la fin, pour conclure, que l'on utilise lim (ou la flèche).

Souvent, les calculs de limites se heurtent à des formes indéterminées. Une grande partie de ces indéterminations peuvent être levées grâce à l'utilisation des croissances comparées : soient α, β des entiers naturels non nuls, soit γ un réel strictement positif, alors :

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad x^\alpha \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

Toutes les indéterminations ne peuvent être levées à partir de ces méthodes. Nous verrons plus loin comment utiliser les taux d'accroissement pour calculer des limites, mais surtout au deuxième semestre, les développements limités.

Voilà les principales méthodes à retenir.

Utilisation des opérations usuelles (combinaison linéaire, produit, quotient, composition).

Exemple.

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln x + x\sqrt{x} + e^x$. Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et en 0^+ ?
   Les opérations usuelles s'appliquent directement sans formes indéterminées (F.I. en abrégé), on obtient directement (existence des limites garantie par les opérations usuelles) :
   $$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$$
   Il n'est pas nécessaire, en l'absence de F.I., de détailler les calculs.
2. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{\sin x} - \cos x$. Quelles sont les limites de g en 0 et en $\frac{\pi}{2}$?
   On a :
   $$\sin x \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad e^t \xrightarrow[t\to 0]{} 1$$
   donc par composition $e^{\sin x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Par ailleurs $\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc finalement : $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ par différence.
   De même :
   $$\sin x \xrightarrow[x\to\pi/2]{} 1 \quad \text{et} \quad e^t \xrightarrow[t\to 1]{} e$$
   donc par composition $e^{\sin x} \xrightarrow[x\to\pi/2]{} e$. Par ailleurs $\cos x \xrightarrow[x\to\pi/2]{} 0$ donc finalement : $g(x) \xrightarrow[x\to\pi/2]{} e$
   Ici tout les calculs sont détaillés, mais comme pour l'exemple précédent, en l'absence de F.I. les détails ne sont pas obligatoires, vous pouvez donner le résultat directement.

Factorisation par le terme «le plus fort».
face à des indéterminations du type «$\pm\infty + \pm\infty$» ou «$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$», on factorise par le terme «le plus fort» au sens des croissances comparées.
Grossièrement, en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur les puissances positives qui elles mêmes l'emportent sur le logarithme.

Exemple.

1. Soit f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 + 1$. Quelle est la limite de f en $-\infty$?
   Il s'agit a priori d'une forme indéterminée (du type «$-\infty - \infty + \infty + 1$»). On factorise par le terme le plus fort qui est x^5 :
   $$f_1(x) = x^5\left(1 - 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}\right)$$
   Or le terme de la parenthèse tend vers 1 et $x^5 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, donc par produit $f_1(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.
   On retrouve ici le résultat utilisé au lycée «la limite d'une fonction polynômiale en $\pm\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré». On n'utilisera plus ce résultat de lycée mais cette factorisation pour lever les indéterminations, c'est une méthode bien plus générale.
   Pour la rédaction, il est nécessaire de faire apparaître la dernière factorisation, car c'est elle qui lève l'indétermination.
2. Soit f_2 définie sur $]1+\sqrt{2}, +\infty[$ (sur un tel intervalle le dénominateur ne s'annule pas, vous êtes invités à le vérifier) par $f_2(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2 - x}$. Quelle est la limite de f_2 en 0?
   Le dénominateur tend vers 0 en 0, mais il faut connaître son signe pour conclure. On factorise le dénominateur par le terme le plus fort, mais attention, en 0 c'est la plus petite puissance qui l'emporte. On calcule :
   $$f_2(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 - x} = \frac{1}{x\left(x^2 - 2x - 1\right)}$$
   Or $x^2 - 2x - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} -1$ donc $x(x^2 - 2x - 1) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^-$ et $x(x^2 - 2x - 1) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0^+$. Par quotient on obtient alors :
   $$f_2(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad f_2(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$$
3. Soit f_3 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_3(x) = e^x - x^n + \ln x$ (avec $n \in \mathbb{N}$). Quelle est la limite de f_3 en $+\infty$?
   Le terme le plus fort est l'exponentielle, on calcule donc :
   $$f_3(x) = e^x - x^n + \ln x = e^x\left(1 - \frac{x^n}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x}\right)$$
   Par croissances comparées (CC en abrégé) on a
   $$\frac{x^n}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln x}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$
   Finalement $f_3(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$
   Pour la rédaction, il est indispensable de citer les croissances comparées lorsque vous les utilisez (à la manière de ce qui précède).

4. Soit f_4 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_4(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$. Quelle est la limite de f_4 en 0^+ ?
Il s'agit d'une forme indéterminée du type «$-\infty + \infty$».
Le terme le plus fort sera $1/x$ (en fait on compare $\ln(x) = -\ln(1/x)$ et $1/x$ en 0^+, ce qui revient à comparer $\ln t$ et t en $+\infty$). On calcule alors :
$$f_4(x) = \ln x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(x\ln x + 1)$$
Comme $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ (croissances comparées) on a finalement (par produit) : $f_4(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

5. Soit f_5 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_5(x) = e^{x^2} - e^{2x} - xe^{4x}$. Quelle est la limite de f_5 en $+\infty$?
C'est une F.I. encore une fois. Le terme le plus fort est l'exponentielle de la plus forte fonction possible. En l'occurrence ce sera e^{x^2}.
On calcule :
$$f_5(x) = e^{x^2} - e^{2x} - xe^{4x} = e^{x^2}\left(1 - e^{2x-x^2} - xe^{4x-x^2}\right) = e^{x^2}\left(1 - e^{x(2-x)} - xe^{x(4-x)}\right)$$
Or :
$$e^{x(2-x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad e^{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
et
$$xe^{x(4-x)} = \frac{x}{x(4-x)}(x(4-x))\,e^{x(4-x)} \quad \text{(on force une CC à apparaître)}$$
avec
$$\frac{x}{x(4-x)} = \frac{1}{4-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad te^t \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0 \text{ (CC)}$$
et comme $x(4-x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ par composition $(x(4-x))\,e^{x(4-x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
Ainsi, la parenthèse tend vers 1.
Finalement il vient : $f_5(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

6. Soit f_6 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_6(x) = \dfrac{e^x - \ln x + x^2}{x^5 + x\ln x}$. Quelle est la limite de f_6 en $+\infty$?
Il s'agit (encore) d'une F.I. (évidemment). On factorise numérateur et dénominateur par le terme le plus fort :
$$f_6(x) = \frac{e^x - \ln x + x^2}{x^5 + x\ln x} = \frac{e^x\left(1 - \dfrac{\ln x}{e^x} + \dfrac{x^2}{e^x}\right)}{x^5\left(1 + \dfrac{\ln x}{x^4}\right)} = \underbrace{\frac{e^x}{x^5}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \text{ (CC)}} \; \frac{\overbrace{1 - \dfrac{\ln x}{e^x} + \dfrac{x^2}{e^x}}^{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \text{ (CC)}}}{\underbrace{1 + \dfrac{\ln x}{x^4}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 \text{ (CC)}}}$$
donc finalement $f_6(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Remarque : avec cette méthode, si on se «trompe» dans le choix du terme le plus fort, alors la parenthèse ne tendra pas vers une constante.
Parfois cela suffit quand même pour conclure, sinon il faut revenir en arrière et choisir un autre «terme le plus fort».

Cette méthode sera formalisée différemment en milieu de sup par l'utilisation d'équivalents.

Utilisation de l'expression conjuguée : on utilise cette méthode dans le cadre de F.I. de la forme «$+\infty - \infty$» ou «$\dfrac{1}{a-a}$» faisant apparaître des radicaux (des racines carrées).

Exemple.

1. Soit h_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}$. Quelle est la limite de h_1 en $+\infty$?
On a une forme indéterminée du type «$\dfrac{1}{+\infty - \infty}$», on multiplie le dénominateur par l'expression conjuguée (l'expression conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} + \sqrt{b}$).
On calcule :
$$h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} \underset{\text{identité remarquable!}}{=} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x - (x+1)} = -\sqrt{x} - \sqrt{x+1}$$
Par somme $h_1(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

2. Soit h_2 la fonction définie sur $]-1,1[$ par $h_2(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}$. Quelle est la limite de h_2 en 0?
On a une forme indéterminée au dénominateur du type «$a-a$», on multiplie le dénominateur par l'expression conjuguée.
On calcule :
$$h_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}} = \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})}$$
$$= \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})}{1 + x - 1 + x^2} = \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})}{x(1+x)} = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}}{1+x}$$
Ainsi $h_2(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 2$

3. Soit h_3 la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $h_3(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{1+1/x} - \sqrt{1-1/x}}$. Quelle est la limite de h_3 en $+\infty$?
Il y a des indéterminations au numérateur et au dénominateur. On va donc multiplier numérateur et dénominateur par les expressions conjuguées.
On calcule :
$$h_3(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{1+1/x} - \sqrt{1-1/x}}$$
$$= \frac{(\sqrt{1+1/x} + \sqrt{1-1/x})(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{1+1/x} + \sqrt{1-1/x})(\sqrt{1+1/x} - \sqrt{1-1/x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}$$
$$= \frac{(\sqrt{1+1/x} + \sqrt{1-1/x})(x - x - 1)}{(1 + 1/x - 1 + 1/x)(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = (-\sqrt{1+1/x} - \sqrt{1-1/x})\frac{x}{2(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}$$
Or $-\sqrt{1+1/x} - \sqrt{1-1/x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -2$ mais le quotient reste une forme indéterminée.
On utilise la méthode de factorisation par le terme le plus fort (dans les racines) :
$$\frac{x}{2(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \frac{x}{2(\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{1+1/x})} = \underbrace{\frac{x}{\sqrt{x}}}_{=\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty} \; \underbrace{\frac{1}{2 + 2\sqrt{1+1/x}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 4}$$

Ainsi $h_3(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$

Utilisation de taux d'accroissement
On rappelle :

Théorème (taux d'accroissement usuels).

(i) $\dfrac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$

(ii) $\dfrac{\ln(x+1)}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$

(iii) $\dfrac{\ln x}{x-1} \xrightarrow[x\to1]{} 1$

(iv) $\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x} \xrightarrow[x\to0]{} \alpha$

(v) $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 1$

Toutes ces limites sont des nombres dérivés des fonctions de référence (détails laissé au lecteur) :
(i) $x \mapsto e^x$ en 0,
(ii) $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0,
(iii) $x \mapsto \ln x$ en 1,
(iv) $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0,
(v) $x \mapsto \sin x$ en 0.
On dispose, en utilisant les taux d'accroissements, d'une méthode pour calculer des limites.

Exemple.

1. Soit g_1 la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g_1(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{x}$. Quelle est la limite de g_1 en 0^+ ?
   Il s'agit d'une forme indéterminée. On «voit» un taux d'accroissement (TA en abrégé), précisément :
   $$\frac{e^t-1}{t} \xrightarrow[t\to0]{} 1$$
   On transforme donc l'expression :
   $$g_1(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$
   Ainsi, comme $t = \sqrt{x} \xrightarrow[x\to0]{} 0$ par composition $\dfrac{e^{\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to0]{} 1$ puis par produit on a : $g_1(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$
   Pour la rédaction, comme pour les CC, on doit citer les taux d'accroissement quand on les utilise.
2. Soit g_2 la fonction définie sur $[-\pi/4, \pi/4]$ par $g_2(x) = \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}$. Quelle est la limite de g_2 en 0 ?
   On a :
   $$\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow[t\to0]{} 1 \text{ (TA)} \quad \text{et} \quad t = \sin x \xrightarrow[x\to0]{} 0$$
   par composition il vient : $g_2(x) \xrightarrow[x\to0]{} 1$
3. Soit g_3 la fonction définie sur $[-\pi/4, \pi/4]$ par $g_3(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos x}$. Quelle est la limite de g_3 en 0 ?
   On a :
   $$\frac{\ln(t)}{t-1} \xrightarrow[t\to1]{} 1 \text{ (TA)} \quad \text{et} \quad t = \cos x \xrightarrow[x\to0]{} 1$$
   En écrivant $g_3(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos x} = -\dfrac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1}$ par composition il vient : $g_3(x) \xrightarrow[x\to0]{} -1$
4. Soit g_4 la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_4(x) = \dfrac{\sqrt{1+x\ln x}}{x\ln x}$. Quelle est la limite de g_4 en 0^+ ?
   Notons pour commencer que $h : x \mapsto 1 + x\ln x$ est dérivable par produit sur $\mathbb{R}_+^*$ et que sa dérivée est $x \mapsto \ln x + 1$. On résout :
   $$\ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1}$$
   d'où les variations

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
h	‖	$\searrow$	$1+e^{-1}\ln(e^{-1})$	$\nearrow$	

   Or $1+e^{-1}\ln(e^{-1}) = 1 - \dfrac{1}{e}$ avec $e = e^1 > e^0 = 1$ (croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$), donc $1 + e^{-1}\ln(e^{-1}) > 0$, ce qui montre, d'après les variations, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) > 0$ et cela justifie la bonne définition de g_4 sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On a ensuite :
   $$\frac{\sqrt{1+t}-1}{t} \xrightarrow[t\to0]{} \frac{1}{2} \text{ (TA)} \quad \text{et} \quad t = x\ln x \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$$
   Par composition il vient : $g_4(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} \dfrac{1}{2}$
5. Soit g_5 la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $g_5(x) = \dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$. Quelle est la limite de g_5 en 0 ?
   On a :
   $$\frac{e^x-1}{\ln(1+x)} = \underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{\xrightarrow[x\to0]{} 1 \text{ (TA)}} \times \underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_{\xrightarrow[x\to0]{} 1 \text{ (TA «à l'envers»)}}$$
   par produit il vient : $g_5(x) \xrightarrow[x\to0]{} 1$

Cette méthode sera avantageusement remplacée au milieu de sup par l'utilisation de développement limités.

Produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0
Le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 tend vers 0.

En effet, dire qu'une fonction f est bornée sur un ensemble D est équivalent à l'existence d'une constante K (positive) telle que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leqslant K$. Ainsi si f est bornée et g tend vers 0 en x_0, alors on a

$$\forall x \in D, \ |f(x)g(x)| \leqslant |f(x)||g(x)| \leqslant K|g(x)|$$

et comme $K|g(x)| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, par *encadrement*, $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

Exemple.
$x \sin(\dfrac{1}{x}) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ puisque $x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ est bornée.

3. Tracés

On rappelle, et on admet, le résultat essentiel suivant :

Théorème (dérivée et variations).

Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est dérivable sur I. Alors :
- f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.
- f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (respectivement $f' \leqslant 0$) sur I.
- f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) sur I et l'ensemble des points où f' s'annule ne contient aucun intervalle non trivial.
  En particulier, si $f' > 0$ (respectivement $f' < 0$) sur I, alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I.

Remarque.
- Il est essentiel de se placer sur un intervalle I.
- Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).
  En effet les seuls intervalles contenus dans un ensemble fini de points sont des intervalle réduits à un point, donc triviaux. Ainsi $f' \geqslant 0$ (resp. $f' \leqslant 0$) sur I et n'est nulle sur aucun intervalle non trivial.
  C'est la situation que l'on rencontrera en pratique.

Exemple.
Soit $f : x \mapsto x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f'(x) = 3x^2$$

Ainsi $f' > 0$ sauf en 0, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On rappelle aussi la définition d'une asymptote au graphe d'une fonction.

Définition (Asymptotes à une représentation graphique).

Soit f une fonction.
- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $x_0 \in \mathbb{R}$ ouvert en x_0 et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est appelée *asymptote verticale* au graphe de f.
- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $\pm\infty$ et si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = y_0$ est appelée *asymptote horizontale* au graphe de f.

On peut aussi étudier la convexité d'un graphe.

Définition (interprétation géométrique des variations de la dérivée).

Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.
Si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I, les variations de f' (données par le signe de f'') s'interprètent géométriquement.
- Si $f'' \geqslant 0$ sur I, alors la dérivée est croissante et on dit que f est *convexe* sur I.
- Si $f'' \leqslant 0$ sur I, alors la dérivée est décroissante et on dit que f est *concave* sur I.
- Si f concave (respectivement convexe) sur $I_1 = I \cap]a-\delta, a[$ et convexe (respectivement concave) sur $I_2 = I \cap]a, a+\delta[$, où $\delta > 0$, alors on dit que a est un *point d'inflexion* du graphe de f.

Remarque.
- Cette définition sera réintroduite dans un contexte plus général dans un chapitre ultérieur.
- Pour tracer la courbe représentative d'une fonction f, il est utile de compléter l'étude de f par celle du signe de f''.

Nous sommes maintenant «équipés» pour étudier les variations d'une fonction.

Étude et représentation graphique d'une fonction f.
1. On commence, s'il n'est pas donné, par déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. On cherche les symétries (parité, périodicité, ...) et on réduit en conséquence l'intervalle d'étude.
3. On cherche l'ensemble de dérivabilité de f (l'ensemble sur lequel f' existe).
4. On étudie le signe de $f'(x)$ puis on dresse le tableau de variations de f : sur la première ligne, les valeurs particulières de x obtenues aux étapes précédentes ; sur la seconde, le signe de $f'(x)$ et sur la troisième, les variations de f.
5. On complète le tableau de variations par les images et les limites éventuelles de f.
6. On étudie la convexité du graphe en étudiant le signe de $f''(x)$, on complète le tableau de variations de f en ajoutant une nouvelle ligne.
7. On construit la représentation graphique et on y place :
   - les points où la dérivée s'annule pour lesquels la tangente à la courbe est horizontale ;

- les asymptotes ;
- éventuellement quelques tangentes, notamment lorsque l'on connaît en un point la valeur de la fonction et la valeur ou la limite de la dérivée ;
- on respecte la convexité lorsqu'elle a été étudiée.

Exemple.

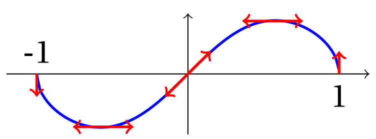
Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$ (étude de la convexité non demandée).

Solution.
Le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, mais pour que la racine carrée existe, il faut prendre $x \in [-1,1]$. On a donc $D = [-1;1]$. On remarque que f est impaire et donc on étudie la fonction sur le domaine d'étude $I = [0,1]$. f est dérivable sur $[0,1[$ et $\forall x \in [0,1[, f'(x) = \dfrac{1-3x^2}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)^2}$.

On a le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
$f'(x)$	1	$+$	0	$-$	$-\infty$
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\searrow$	0

et la courbe suivante :



On observe que f admet un maximum global $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ atteint en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et un minimum global 0 atteint en 0 et en 1.

Exemple.

Étudier et représenter graphiquement la fonction $g : x \mapsto x\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2}$ (étude de la convexité non demandée).

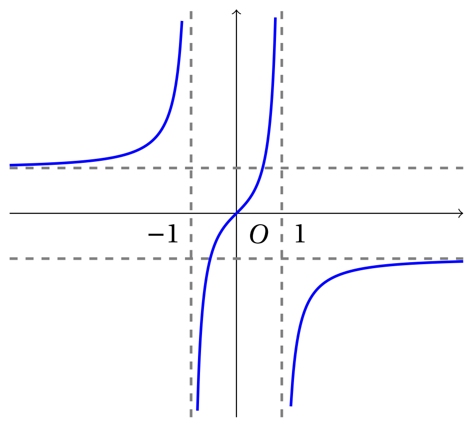
Solution.
Le dénominateur s'annule en ± 1 et la quantité sous la racine est toujours strictement positive. On a donc $D = \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. g est impaire. On étudie la fonction sur $D' = [0;1[\cup]1;+\infty[$. g est dérivable sur son ensemble de définition et $\forall x \neq \pm 1, g'(x) = \dfrac{3x^2+1}{\sqrt{1+x^2}(1-x^2)^2}$.

On a le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	1	$+$	‖	$+$	
g	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

Les droites d'équations $x = \pm 1$ sont asymptotes verticales et les droites d'équation $y = -1$ et $y = 1$ sont asymptotes horizontales en respectivement $+\infty$ et $-\infty$.

On obtient la courbe suivante :



On observe que g n'a pas d'extremum global, ni d'extremum local.

Exemple.

Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$.
Tracer le graphe de f.

Solution.
f est définie sur $D = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $x \mapsto e^x$ (référence) et $x \mapsto 1+x$ (affine) sont dérivables sur D et comme $x \mapsto 1+x$ ne s'annule pas sur D, par quotient, f est dérivable sur D. On calcule :

$$\forall x \in D, \qquad f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{x\ \overbrace{e^x}^{>0}}{\underbrace{(1+x)^2}_{\geqslant 0}}$$

ce qui montre que la dérivée est du signe de x.
On calcule les limites :

$$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0^-, \quad f(x) \xrightarrow[x\to-1^-]{} -\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x\to-1^+]{} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

et $f(0) = 1$.
Enfin, f' est dérivable sur D (quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur D). On calcule :

$$\forall x \in D, \quad f''(x) = \frac{(1+x)e^x(1+x)^2 - 2(1+x)xe^x}{(1+x)^4} = \frac{(1+x^2)e^x}{(1+x)^3}$$

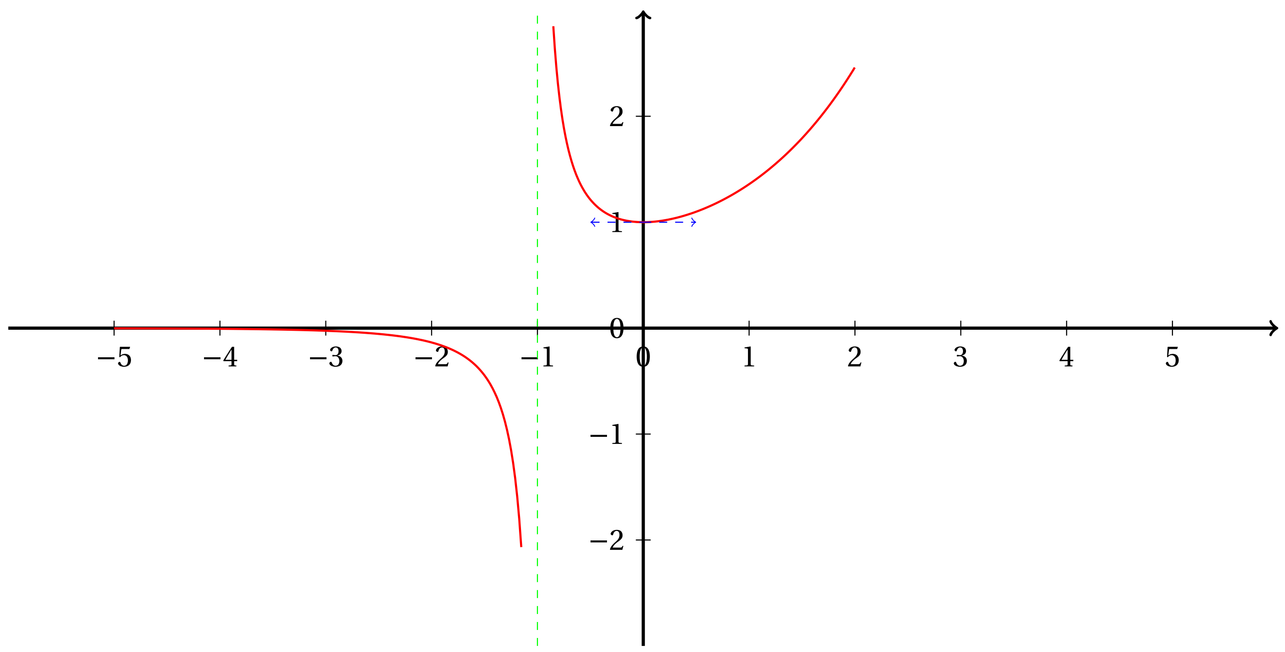
et donc

$$f''(x) > 0 \iff 1+x > 0 \iff x > -1$$

On peut alors dresser le tableau complet des variations :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖		$+$		
f		concave	‖		convexe		

Le graphe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.



4. Inégalités

On peut utiliser les fonctions pour démontrer des inégalités.

Exemple.
Démontrer :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1$.
2. $\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin(x) \leqslant x$.

Solution.

1. La fonction $f : x \mapsto e^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on calcule :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x - 1$$
On résout :
$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow e^x - 1 > 0 \Longleftrightarrow e^x > 1 \Longleftrightarrow x > 0$$
On en déduit les variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après les variations : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$, c'est-à-dire :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x+1$$

2. La fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ (composition de $x \mapsto 1+x$ dérivable sur $]-1,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ avec $x \mapsto \ln x$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) et on calcule :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{x}{1+x}$$
On en déduit les variations :

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

D'après les variations : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire :
$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$$

3. La fonction $h : x \mapsto \sin x - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on calcule :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \cos(x) - 1 \leqslant 0$$
On en déduit les variations :

x	0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
h	0	$\searrow$	

D'après les variations : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ h(x) \leqslant 0$, c'est-à-dire :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \sin(x) \leqslant x$$

Remarque.
Ces inégalités sont exigibles : il faut pouvoir les énoncer, les utiliser, et les démontrer si on le demande.

5. Exercices

Exercice 24.

Étudier la dérivabilité et préciser l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{2x^2-2}{5x-1}$
2. $f(x) = \dfrac{e^x-1}{3e^x+5}$
3. $f(x) = \ln(3x^2+2)$
4. $f(x) = \left(\ln(2x+1)\right)^5$
5. $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}}$
6. $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)$
7. $f(x) = \sin\left(x^2+\ln(x)\right)$
8. $f(x) = \tan(3x+1)$
9. $f(x) = \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{x^2+x+1}$

Exercice 25.

Étudier l'ensemble de définition, de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \sqrt{x}\ln x$
2. $f : x \mapsto (1+2x)^\alpha \ln(3x)$ $\quad(\alpha \in \mathbb{R})$
3. $f : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$
4. $f : x \mapsto xe^{x^2}$
5. $f : x \mapsto (x^2+1)^\alpha$ $\quad(\alpha \in \mathbb{R})$
6. $f : x \mapsto x^x$
7. $f : x \mapsto (1+x)^{x^2}$
8. $f : x \mapsto \dfrac{5x^2+1}{(x+1)^2}$
9. $f : x \mapsto \dfrac{5x^2+1}{(x^2+1)^3}$
10. $f : x \mapsto (3x+1)^{\ln x}$
11. $f : x \mapsto \ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)$
12. $f : x \mapsto \ln\left(e^x+e^{-x}\right)$
13. $f : x \mapsto \ln\left(\cos^2(x)+1\right)$
14. $f : x \mapsto \ln\tan x$

Exercice 26.

Calculer les limites suivantes :

1. e^x+4x+1 en $+\infty$
2. $x+\sqrt{x}$ en $+\infty$ et en 1
3. $\dfrac{x^4+x+1}{x^3-x}$ en $-\infty$
4. $\dfrac{5x^7+2x^3-\sqrt{2}}{x^3+1}$ en $+\infty$
5. $\dfrac{6x^6-1}{x^3-1}$ en $-\infty$
6. $\dfrac{2x^5-4x+1}{x^5-4}$ en $+\infty$
7. $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$ en 1
8. $\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$ en 0
9. $\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sqrt{x^2+1}}$ en $+\infty$
10. $\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{x+1}-x-1\right)$ en $+\infty$
11. $x\ln x - x$ en 0
12. $e^x - x$ en $+\infty$
13. $(x^5+\ln x)e^{-x}$ en $+\infty$
14. $\dfrac{e^x}{3x+2}$ en $+\infty$
15. $e^{2x}-3e^{x+6}+\dfrac{12}{e^{x/2}}$ en $-\infty$ et $+\infty$
16. $\dfrac{e^{3x}-e^{x^2}}{\left((\ln x)^3+x\right)^2}$ en $+\infty$
17. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}$ en $+\infty$
18. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$ en 1
19. $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ en 9
20. $\sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right)$ en 0^+
21. $e^{\sqrt{x}}-2\ln x - x^2$ en $+\infty$
22. $\dfrac{1-x^2}{x}e^{1/x}$ en 0
23. $(x-2)\ln\left(x^2-x-2\right)$ en 2^+
24. $x^2e^{-e^x}$ en $+\infty$
25. $e^{-1/x}\ln x$ en 0^+
26. $e^x\ln\left(x^2+x\right)$ en $-\infty$
27. $\dfrac{\sin(e^x-1)}{x}$ en 0

Exercice 27.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x+\ln x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3+x}{2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+2x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{\frac{1}{x}}$
5. $\lim\limits_{x\to0} -xe^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x/3}-e^{2x}}{x^5+\ln x+\cos x}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x+\cos x}{x+\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin x+\cos x}{x+\frac{1}{x}}$
9. $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$
10. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2}}$
11. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{1-x}}{1-x}$
12. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$
13. $\lim\limits_{x\to0} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor$
15. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$

Exercice 28.

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x\ln x - 2\ln 2}{x-2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos(2x)}{\sin^2 x}$
5. $\lim\limits_{x\to +\frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}$
6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a - a^x}{x^4-a^4}$ (avec $a >$ 1)

Exercice 29.

Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{1+x} \geqslant 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

Exercice 30.

Étudier la convexité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition et rechercher les éventuels points d'inflexion de leurs courbes représentatives. Tracer le graphe de f.

1. $f(x) = (\ln x)^2$
2. $f(x) = e^x - \dfrac{x^2}{2} - x + 1$

Exercice 31.

Soit f la fonction définie par la formule : $f(x) = \ln(1+x^2)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de f.
3. Étudier les variations (limites comprises) de f.
4. Étudier la convexité de f, préciser les éventuels points d'inflexion.
5. Préciser les équations des tangentes au graphe de f aux points d'abscisses $x=-1$ et $x=1$.
6. Étudier le signe et la limite en $+\infty$ de $f(x) - 2\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. Tracer dans un même repère :
   — le graphe de f,
   — les tangentes au graphe aux points d'abscisses $x=-1$ et $x=1$,
   — le graphe de la fonction $x \mapsto 2\ln(x)$.

Exercice 32.

Soit f la fonction définie par la formule : $f(t) = 4t^2 - 2t\ln(t) - 1$
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe de f dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On donne aussi $\ln 2 \approx 0,7$ à $0,02$ près.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$, puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t>0$.
3. En déduire le tableau des variations (avec les limites en 0^+ et $+\infty$) de f' sur $]0,+\infty[$.
4. Déduire de la question précédente le signe de $f'(t)$ pour tout $t>0$.
   Dresser le tableau conjoint des variations et de convexité de f (avec les limites en 0^+ et $+\infty$).
   Préciser les éventuels points d'inflexion, en étudiant le signe de leur(s) ordonnée(s).
5. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $1/4$, et préciser la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.
6. On pose $f(0) = -1$.
   (a) Montrer que f est continue à droite en 0 (c'est-à-dire que $f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} -1$).
   (b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Interprétation géométrique ?
7. Tracer la courbe représentative de f sur $]0,1]$.
   On fera apparaître les propriétés étudiées dans les questions précédentes (convexité, tangentes, positions relatives des courbes...).
8. (a) Montrer que l'équation $f(t)=0$ admet une unique solution α sur $]0,+\infty[$.
   (b) Montrer que $0<\alpha<1$.
   (c) Montrer que $\ln(\alpha) = 2\alpha - \dfrac{1}{2\alpha}$.

? Exercice 33 (plus difficile...).

On considère, pour a réel non nul, la fonction h_a définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$h_a(x) = x^{1-x^a} = e^{(1-x^a)\ln x}$$

et on note $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de h_a dans un repère orthonormé.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto x^a$? Quelle est sa dérivée ?
2. La fonction h_a a-t-elle une limite en 0 ? Si oui laquelle ? (on distinguera deux cas.)
3. Lorsque cela est possible, on prolonge la fonction h_a par continuité en 0 (c'est-à-dire que si h_a a une limite finie ℓ en 0, on pose $h_a(0) = \ell$).
   Préciser, quand elle existe, la tangente au point d'abscisse $x = 0$.
4. (a) Étudier le comportement de $h_a(x)$ quand x tend vers $+\infty$. (on distinguera deux cas.)
   (b) Pour $a < 0$, on pose : $g_a(x) = \dfrac{h_a(x) - x}{x^{a+1}\ln x}$
   Montrer que $g_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$
   (c) En déduire pour quelles valeurs de a la droite d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathscr{C}_a$.
   (on "rappelle" que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote au graphe de f si et seulement si $f(x) - ax - b \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.)
5. (a) Pour a et b réels non nuls, calculer le rapport $\dfrac{h_a(x)}{h_b(x)}$.
   (b) Préciser les points communs à $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$ pour $a \neq b$.
   (c) Montrer que : $\dfrac{h_a(x)}{h_b(x)} > 1 \iff (b > a \text{ et } x \neq 1)$
   En déduire les positions relatives de $\mathscr{C}_a$ et $\mathscr{C}_b$ pour $a < b$..
6. (a) Donner l'ensemble de dérivabilité de h_a et déterminer sa dérivée.
   (b) Montrer que $h'_a(x)$ est du signe de $\phi_a(x) = x^{-a} - a\ln x - 1$.
   (c) En déduire les variations de h_a
7. Si x est un réel strictement positif fixé, on définit la fonction :

$$H_x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & h_a(x) \end{array}$$

   Étudier les variations de la fonction H_x, y compris ses limites.
8. Soit $M(x, y)$ un point du plan tel que $x > 0$ et $y > 0$. Discuter suivant M de l'existence d'une valeur de a telle que $\mathscr{C}_a$ passe par M. Si une telle valeur existe, donner a en fonction de x et de y.
   Représenter sur un graphe la région des points M du plan tels qu'un tel a existe.
9. Représenter sur un même graphe $\mathscr{C}_a$, $\mathscr{C}_b$ et $\mathscr{C}_c$ où $a = 1$, $b = -1/2$ et $c = -2$.

III. Nombres complexes

1. Définition

On admet l'existence d'un «nombre» noté i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. On définit alors :

Définition (nombres complexes).

L'ensemble $\mathbb{C}$ des *nombres complexes* est défini par :

$$\mathbb{C} = \left\{x + \mathrm{i}y \,\middle|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \quad \text{sachant que } \mathrm{i}^2 = -1$$

Si $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, où $x, y \in \mathbb{R}$, la *partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$, est égale à x et la *partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{Im}(z)$, est égale à y.
$z = x + \mathrm{i}y$ est l'*écriture algébrique* du nombre complexe z.
Si $y = 0$, alors z est réel (ensemble $\mathbb{R}$). Si $x = 0$, alors z est un *imaginaire pur* (ensemble que l'on peut noter $\mathrm{i}\mathbb{R}$).

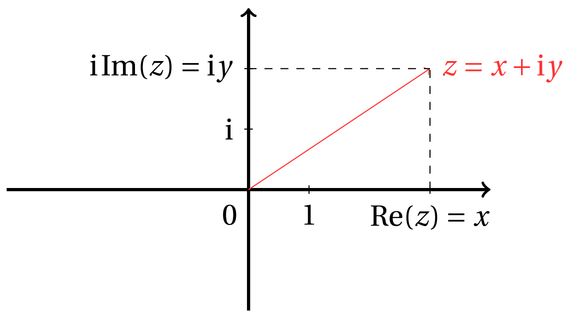
On définit des opérations sur $\mathbb{C}$ en manipulant les nombres formellement comme vous avez appris à le faire au collège avec les expressions algébriques. Par exemple, si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$(a + \mathrm{i}b) \times (c + \mathrm{i}d) = ac + \mathrm{i}ad + \mathrm{i}bc + \mathrm{i}^2 bd = ac - bd + \mathrm{i}(ad + bc)$$

L'ensemble des nombres complexes sera réintroduit de façon un peu plus rigoureuse en sup, mais vous n'aurez accès à une définition «parfaite» qu'au niveau de la L3.

Interprétation géométrique : L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes s'identifie à l'ensemble des points du plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé direct via la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longleftrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z = x + \mathrm{i}y &\longleftrightarrow M(x,y) \end{aligned}$$



- z s'appelle l'affixe du point M.
- z est réel si et seulement si M se trouve sur l'axe des abscisses.
- z est imaginaire pur si et seulement si M se trouve sur l'axe des ordonnées.

Attention.
La notation $\sqrt{-1}$ a été abandonnée en 1777 lorsqu'Euler introduisit la notation i.
Ainsi, même si vous trouvez dans certains ouvrages la notation $\sqrt{-1}$, ou pire encore $\sqrt{-3}$ par exemple, abstenez vous de l'utiliser !
De façon générale, on attend de vous que vous maîtrisiez les objets que vous manipulez, ainsi vous n'utiliserez le symbole $\sqrt{\ }$ qu'avec des **nombres réels positifs ou nuls**.

Remarque.

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des complexes non nuls $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Exemple.
$1 + \mathrm{i} \in \mathbb{C}$, on calcule par exemple $(1+\mathrm{i})^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = 2\mathrm{i}$.

Comment inverser un nombre complexe non nul, c'est-à-dire comment obtenir l'écriture algébrique de $z = a + \mathrm{i}b$ où $a, b \in \mathbb{R}$?
On utilise *l'expression conjuguée* :

$$\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{(a+\mathrm{i}b)(a-\mathrm{i}b)} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2 - \mathrm{i}^2 b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2+b^2}}_{\in\mathbb{R}} + \mathrm{i}\underbrace{\frac{-b}{a^2+b^2}}_{\in\mathbb{R}}$$

Exemple.

On calcule par exemple :

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

ou encore :

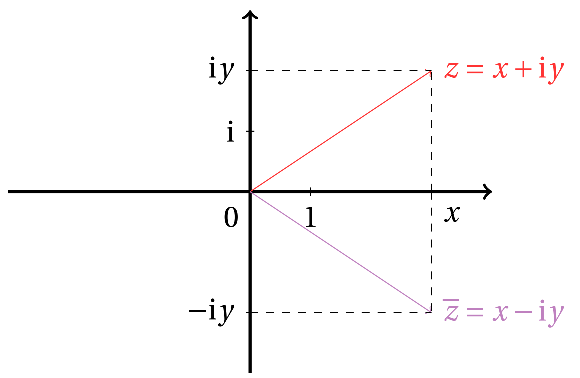
$$\frac{3-i}{2+i} = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-5i+i^2}{2^2+1^2} = 1-i$$

2. Conjugaison

Définition (conjugué d'un complexe).

Soit $z \in \mathbb{C}$ que l'on écrit $z = x + iy$ où $x, y \in \mathbb{R}$. Le *conjugué* de z est $\overline{z} = x - iy$.

Interprétation géométrique : La conjugaison complexe est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



Proposition (propriétés des conjugués).

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

(ii) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ et $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(iii) $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

(iv) $\forall z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$

Exemple.

$$\overline{2-5i} = 2+5i \qquad \overline{\left(\frac{3+2i}{1-i}\right)} = \frac{3-2i}{1+i}$$

3. Module

Définition (module d'un complexe).

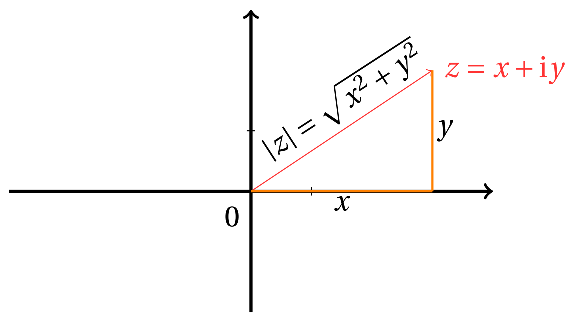
Soit $z \in \mathbb{C}$ que l'on écrit $z = x + iy$où $x, y \in \mathbb{R}$. Le *module* de z est $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Remarque.
Si z est un réel, alors le module de z est aussi sa valeur absolue. On écrit $z = x + i0$ où $x \in \mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$ (ainsi $z = x$) et on calcule

$$\underbrace{|z|}_{\text{module de } z} = \sqrt{x^2+0^2} = \sqrt{x^2} = \underbrace{|x|}_{\text{valeur absolue de } x}$$

Le module d'un complexe est une généralisation de la valeur absolue d'un réel, la notation $|\ |$ pour ces deux notions reste cohérente

Interprétation géométrique : si $z = x + iy$ est l'affixe du point $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $|z|$ est la distance (euclidienne) du point M à l'origine si on a muni le plan d'un repère orthonormé (utilisation du théorème de Pythagore).



Proposition (propriétés des modules).

(i) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z\overline{z}$

(ii) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

(iii) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
En particulier $|-z_1| = |z_1|$.

(iv) $\forall z \in \mathbb{C}$, $|\overline{z}| = |z|$

(v) $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$

(vi) $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

Exemple.

$$|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \qquad \left|\frac{1-i}{4+3i}\right| = \frac{|1-i|}{|4+3i|} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

4. Complexes de module 1

Définition (nombres complexes de module 1).

$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1.
Géométriquement $\mathbb{U}$ s'identifie au cercle trigonométrique.

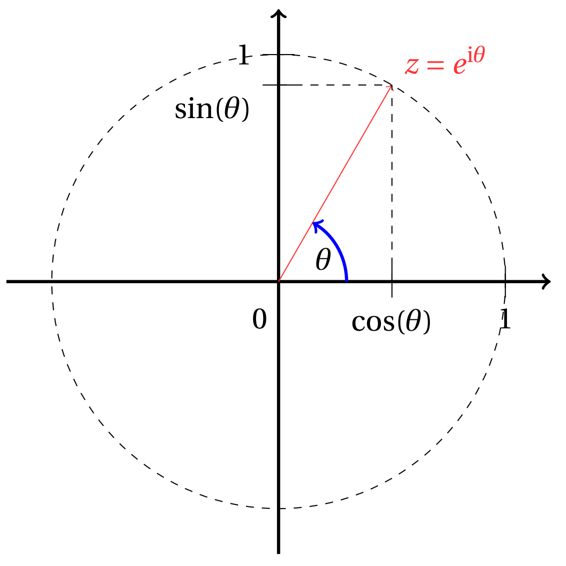
Proposition.

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U},\ z_1 z_2 \in \mathbb{U}$.
- $\forall z \in \mathbb{U},\ \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Définition (exponentielle d'un imaginaire pur).

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit le complexe $e^{i\theta}$ par : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Remarque.
Géométriquement, $e^{i\theta}$ est le point du cercle trigonométrique d'abscisse $\cos\theta$ et d'ordonnée $\sin\theta$.



Exemple.
À retenir :

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 \qquad e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$$

Théorème (écriture exponentielle des complexes de module 1).

Un nombre complexe z est de module 1 si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
De plus, ce réel θ est unique modulo 2π (*i.e.* si $z = e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ alors $\theta \equiv \theta' [2\pi]$).

Proposition (règles de calcul avec les exponentielles d'imaginaires purs).

(i) $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$

(ii) $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R},\ e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$

(iii) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

Exemple.
À retenir :

$$e^{in\pi} = (e^{i\pi})^n = (-1)^n$$

On déduit de cette propriété les formules d'Euler et de Moivre :

Théorème.

- (formules d'Euler) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- (formule de Moivre) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

5. Argument

Théorème (écriture exponentielle d'un complexe non nul).

Tout nombre complexe **non nul** $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
De plus, r est unique et θ est unique modulo 2π.

Remarque.
Cette écriture est appelée *écriture exponentielle* du complexe z. On trouvera parfois aussi les termes *écriture polaire* ou encore *écriture trigonométrique* de z (encore que cette dernière désigne plus couramment l'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$).

Remarque.
Avec les notations du théorème, bien que $r = |z|$, on évitera d'écrire $z = |z| e^{i\theta}$ à la place de

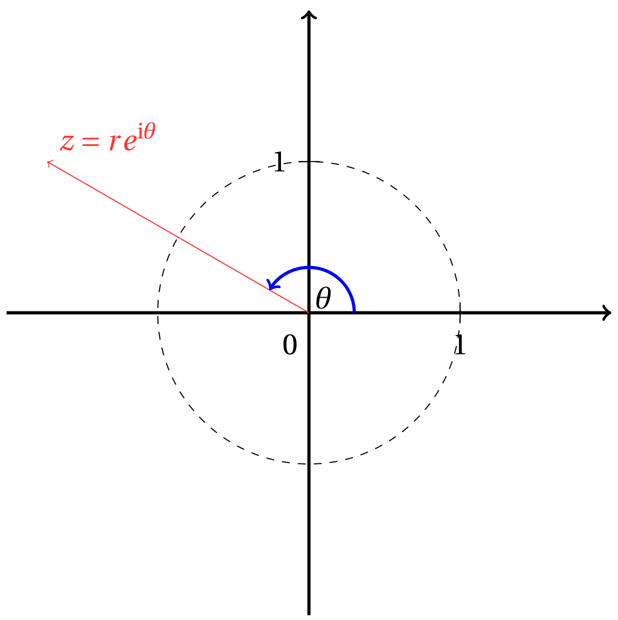
$z = re^{i\theta}$. Il est préférable pour les calculs abstraits de garder une notation, r, qui ne fait pas intervenir z.

Définition (argument d'un complexe non nul).

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Un réel θ introduit au théorème précédent est appelé *un argument* de z. On note $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Remarque.
On parle bien d'UN argument de z, il n'est pas unique (il l'est seulement modulo 2π).
Éventuellement, on peut toujours choisir $\theta \in]-\pi,\pi]$, et dire dans ce cas qu'il s'agit de *l'argument principal* de z, mais cette contrainte est peu utile voir désavantageuse pour les formules de calculs.

Interprétation géométrique : si M est un point du plan d'affixe $z \in \mathbb{C}^*$ (on suppose $M \neq O$), alors l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est un argument de z.



Proposition (propriétés des arguments).

Pour tous $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$:

- (i) $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$
- (ii) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- (iii) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$
- (iv) $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$
- (v) $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

Attention.
On ne peut rien dire en général de $\arg(z_1 + z_2)$.

Exemple.
Si $z = 1 + i \in \mathbb{C}^*$. Écrivons z sous forme exponentielle.
On calcule d'abord : $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ puis

$$\frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(en reconnaissant des angles remarquables.)
donc $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

Exemple.
Calculs de puissances.
On souhaite calculer z^n, où $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. La bonne méthode est d'écrire z sous forme exponentielle pour calculer z^n, puis on en déduit si besoin la forme algébrique de z^n. La contrainte pour pouvoir faire un calcul explicite est de tomber sur un angle remarquable dans l'écriture exponentielle de z.

1. Calcul de $(1 - i\sqrt{3})^{2025}$. On calcule $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ puis $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}$, si bien que

$$(1 - i\sqrt{3})^{2025} = (2e^{-i\pi/3})^{2025} = 2^{2025}e^{-i2025\pi/3} = 2^{2025}e^{-675i\pi} = 2^{2025}\underbrace{e^{-388i2\pi}}_{=1}\underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} = -2^{2025}$$

2. Calcul de $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{2025}$. On calcule $|\sqrt{3} - i| = 2$ et $|1 - i| = \sqrt{2}$, puis $\frac{\sqrt{3}-i}{2} = e^{-i\pi/6}$ et $\frac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{-i\pi/4}$ si bien que

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{2025} = \frac{2^{2025}e^{-i2025\pi/6}}{\sqrt{2}^{2025}e^{-i2025\pi/4}}$$

Or $2025 = 168 \times 12 + 9$ donc $\frac{2025\pi}{6} = 168 \times 2\pi + \frac{3\pi}{2}$; $2025 = 253 \times 8 + 1$ donc $\frac{2025\pi}{4} = 253 \times 2\pi + \frac{\pi}{4}$ donc

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{2025} = \sqrt{2}^{2025}e^{-i3\pi/2}e^{i\pi/4} = 2^{1012}\sqrt{2}e^{-5i\pi/4} = -2^{1012} + i2^{1012}$$

3. Calcul de $\left(\frac{1-4i}{5-3i}\right)$. On calcule $|1 - 4i| = \sqrt{17}$ et $|5 - 3i| = \sqrt{34}$ et on ne reconnaît pas d'angle remarquable au numérateur ou au dénominateur. On calcule plutôt :

$$\frac{1-4i}{5-3i} = \frac{(1-4i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{5+3i-20i+12}{25+9} = \frac{17}{34}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}$$

si bien que

$$\left(\frac{1-4i}{5-3i}\right) = \frac{2^{1012}\sqrt{2}}{2^{2025}}e^{i2025\pi/4} = \frac{1}{2^{1023}}(1+i)$$

6. Exercices

Exercice 34.

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

1. $(2+3i)(3+4i)$
2. $\dfrac{2+i}{3-2i}$
3. $\dfrac{3+5i}{3-5i}$
4. $(1+i)^2$
5. $(-1+i)^3$
6. $\dfrac{(2+3i)^2+(2-3i)^2}{(2+3i)^2-(2-3i)^2}$
7. $(3-2i)^4$
8. $(1+i)^3+(1+i)^5+\ldots+(1+i)^{11}$
9. $\sqrt{2}e^{i\frac{2025}{4}\pi}$
10. $\dfrac{(1-j)^3+(1+j)^3}{(1+j)(1+j^2)}$

(où $j = e^{-2i\pi/3}$).

Exercice 35.

Donner la forme trigonométrique des complexes suivants :

1. $4+4i$;
2. -2 ;
3. $2i$;
4. $\sqrt{3}-i$;
5. $3+\sqrt{3}i$.

Exercice 36.

Soit $\theta \in]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$ et $\alpha \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. Calculer les modules et arguments des nombres complexes :

1. $z_1 = -5\sqrt{3}-5i$
2. $z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{188}$
3. $z_3 = \dfrac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta+i\sin\theta}$
4. $z_4 = (1+i\tan\alpha)^n$
5. $z_5 = (1+i)^n+(1-i)^n$
6. $z_6 = \sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Exercice 37.

Calculer (on donnera les résultats sous forme algébrique et exponentielle) :

1. $(\sqrt{3}+i)^{2021}$
2. $\left(\dfrac{9+i}{5-4i}\right)^5$
3. $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$
4. $\left(1+e^{i\theta}\right)^n \quad (n\in\mathbb{N}^* \text{ et } \theta\in\mathbb{R})$

IV. Matrices

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définitons

Définition (matrice).

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.
On appelle *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ la donnée de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$, notés $a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$, représentés sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & (a_{i,j}) & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Les $a_{i,j}$ sont appelés *coefficients* de la matrice ou encore *terme général* de la matrice.

Remarque.

— Dans la suite du chapitre, on ne précisera plus que n, p ou les autres entiers relatifs à la taille des matrices sont des entiers naturels non nuls.
— L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
— Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont notés $a_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$.
On peut noter $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & \mathrm{i} & 3 \\ 0 & -1 & \frac{1+\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{C}) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & -3 \\ 0 & 7 & \sqrt{5} \\ -\frac{1}{3} & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,3}(\mathbb{R})$$

Définition (matrices remarquables).

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
— Si $n = 1$, A est une *matrice ligne*
— Si $p = 1$, A est une *matrice colonne*
— Si $n = p$, A est une *matrice carrée d'ordre n*. Dans ce cas on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Exemple.

— $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,4}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne
— $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\mathrm{i} \\ 3-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ est une matrice colonne
— $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice carrée (d'ordre 2)
— $D = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_1(\mathbb{C})$ est une matrice carrée/ligne/colonne

Définition (matrice nulle).

La matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée *matrice nulle de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$* et notée $O_{n,p}$ (ou O_n si $n = p$ ou encore 0 lorsque le contexte est clair).

Exemple.

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_{2,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition (matrice identité).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *matrice identité d'ordre n* (on encore matrice *unité d'ordre n*), notée I_n, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (donc c'est une matrice carrée) dont les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent tous 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & (0) \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Exemple.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Opérations

Définition (somme de matrices).

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}, B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La *somme* de ces deux matrices, notée $A+B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

(on somme «coefficient par coefficient»)

Attention.

On ne peut sommer que des matrices de même taille (*i.e.* ayant le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes) !
En particulier, on veillera à ne pas additionner des matrices et des scalaires (*i.e.* des réels ou des complexes).

Exemple.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.
On peut alors calculer $B+C$ ou $C+B$ mais pas $A+B$ ni $A+C$:

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} = C + B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

Définition (multiplication externe).

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $\lambda.A$ (ou $\lambda\, A$) la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\lambda.A = (\lambda \times a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

(tous les coefficients de A sont multipliés par λ)

Remarque.
On note les scalaires à gauche et les matrices à droite.
Il faut bien respecter cette convention !

Exemple.

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2i & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$. Alors :

$$2.A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4i & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C}) \quad -1.A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2i & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad i.A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 2 & 2i \\ -i & 3i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$$

On résume les opérations précédentes par :

Théorème (stabilité par combinaison linéaire).

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \qquad \alpha.A + \beta.B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Exemple.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\alpha = 2$ et $\beta = -3$. Alors :

$$2.A - 3.B = \begin{pmatrix} 2\times 2 - 3\times 0 & 2\times 1 - 3\times 1 & 2\times 0 - 3\times(-1) \\ 2\times(-1) - 3\times 1 & 2\times 4 - 3\times 0 & 2\times 2 - 3\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Définition (produit matriciel).

Soient $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B=(b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}\in\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le *produit* de A par B est la matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, notée AB (ou explicitement $A\times B$), définie par

$$AB=(c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant q}}\quad\text{où}\quad c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}=a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}+\cdots+a_{i,p}b_{p,j}$$

(attention, ce n'est PAS le produit «coefficient par coefficient»)

Remarque.

1. Hiérarchisons les apprentissages :
   — Il faut avant tout savoir faire le produit «concret» de deux matrices (exemples à la suite).
   — Il est indispensable (à court terme) de connaître et de savoir manipuler la formule générale (avec le symbole $\sum$ et les indices i,j,k). Cette formule sert beaucoup dans les preuves qui vont suivre et dans les exercices un peu théoriques.
   C'est un attendu du programme.
2. Le produit de deux matrices n'est bien défini que si le nombre de *colonnes* de A est le même que le nombre de *lignes* de B. On dit alors que A et B sont de tailles compatibles.
3. Le produit d'une matrices ligne à p colonnes par une matrice colonne à p lignes est une matrices carrée d'ordre 1 :
$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_py_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{p}x_ky_k\end{pmatrix}$$
   On peut, de ce point de vue, interpréter le produit matriciel AB comme étant la matrice C dont le coefficient de la ligne i et colonne j est obtenu en multipliant la ligne i de A par la colonne j de B.
4. Le produit d'une matrice quelconque par une matrice colonne est une matrice colonne :
$$\begin{pmatrix}a_{1,1}&a_{1,2}&\cdots&a_{1,p}\\a_{2,1}&a_{2,2}&\cdots&a_{2,p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n,1}&a_{n,2}&\cdots&a_{n,p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{p}a_{1,j}x_j\\\sum_{j=1}^{p}a_{2,j}x_j\\\vdots\\\sum_{j=1}^{p}a_{n,j}x_j\end{pmatrix}$$
   On peut, de ce point de vue, interpréter le produit matriciel AB comme étant la matrice C dont les colonnes sont obtenues en multipliant A par les colonnes de B.

Attention.

L'interprétation principale à retenir est que le résultat du produit matriciel d'une matrice quelconque A par une matrice colonne X donne une matrice colonne qui est *combinaison linéaire des colonnes* de A, les coefficients de cette combinaison linéaire étant les coefficients de X.

Exemple.

1. Soient $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&0&-1\\2&2&1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $B=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :
$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}^{=B}\\ \underbrace{\begin{pmatrix}2&3&4\\1&0&-1\\2&2&1\end{pmatrix}}_{=A} & \underbrace{\begin{pmatrix}2-3+8\\1+0-2\\2-2+2\end{pmatrix}}_{=AB}=\begin{pmatrix}7\\-1\\2\end{pmatrix}=AB\end{array}$$
   Mais, BA n'a pas de sens (B a 1 colonne, A a 3 lignes).

   Notons, conformément à la dernière remarque, que la matrice colonne $\begin{pmatrix}7\\-1\\2\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des colonnes de A :
$$\begin{pmatrix}7\\-1\\2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$$
2. Soient $A=\begin{pmatrix}2&1&0&1\\0&1&0&3\\1&0&1&1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ et $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. Alors :
$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix}2&1&0&1\\0&1&0&3\\1&0&1&1\end{pmatrix}}^{=A}\\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{pmatrix}}_{=B} & \underbrace{\begin{pmatrix}2+0+3&1+2+0&0+0+3&1+6+3\\0+0+2&0+1+0&0+0+2&0+3+2\end{pmatrix}}_{=BA}=\begin{pmatrix}5&3&3&10\\2&1&2&5\end{pmatrix}=BA\end{array}$$
   Mais, AB n'a pas de sens (A a 4 colonnes, B a 2 lignes).
3. Soient $A=\begin{pmatrix}1&1+\mathrm{i}&3\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{C})$ et $B=\begin{pmatrix}1&0&\mathrm{i}\\0&1&2\\-1&0&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$. Alors :
$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1&0&\mathrm{i}\\0&1&2\\-1&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&1+\mathrm{i}&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1+0-3&0+1+\mathrm{i}+0&\mathrm{i}+2+2\mathrm{i}+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1+\mathrm{i}&2+3\mathrm{i}\end{pmatrix}=AB\end{array}$$
   Mais, BA n'a pas de sens (B a 3 colonnes, A a 1 ligne).

4. Soient $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, alors on calcule $AB=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-2&0\\0&0&6\end{pmatrix}=BA$. On retiendra que de façon générale, le produit de deux matrices diagonale est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux des deux matrices, de plus le produit de ces matrices commute.

Attention.

1. Si $n \geqslant 2$ ou $p \geqslant 2$, le produit AB **ne commute pas (en général) !** En effet :
   — si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ avec $n \neq q$, alors AB existe mais pas BA, donc A et B ne commutent pas !
   — si $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ alors $AB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $BA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ existent mais ne peuvent être égales car pas de même taille !
   — si $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1\\2&-2\end{pmatrix}$ alors $AB=\begin{pmatrix}3&-1\\3&-1\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $BA=\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ existent, sont de même taille, mais ne sont pas égales.
   On retiendra donc que **l'ordre de l'écriture d'un produit est fondamental !**
2. On peut avoir $AB=0$ **sans que** A **ou** B **soit nulle**. En effet :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\\0&1\end{pmatrix}}^{=B\neq 0} \\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}}_{=A\neq 0} & \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}_{=AB} \end{array}$$

3. On **ne peut pas simplifier (en général)** l'égalité $AB=AC$ par A. En effet, soient $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-3\end{pmatrix}$ alors

$$AB \underset{\text{(calculs)}}{=} \begin{pmatrix}0&-1\\0&-1\end{pmatrix} \underset{\text{(calculs)}}{=} AC \qquad \text{mais} \qquad B \neq C$$

Proposition (élément neutre pour le produit matriciel).

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A\,I_p = A$ et $I_n\,A = A$.

Définition (transposée d'une matrice).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$. On appelle *transposée de* A, notée $A^\top$, la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par

$$A^\top = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}} \qquad \text{où} \qquad \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \forall\, j \in [\![1,n]\!],\ \ b_{i,j}=a_{j,i}$$

Remarque.
— On rencontrera parfois la notation ${}^tA$ à la place de $A^\top$ pour désigner la transposée de A.
— En pratique la transposition échange les lignes d'une matrice avec ses colonnes : la ligne i devient la colonne i (et réciproquement).
— Si A est une matrice carrée, les coefficients diagonaux de A sont inchangés lorsqu'on transpose A : A et $A^\top$ ont les mêmes coefficients diagonaux.

Exemple.

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \qquad \longrightarrow \qquad A^\top=\begin{pmatrix}1&3&5\\2&4&6\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

(la première colonne de A est devenue la première ligne de $A^\top$, la deuxième colonne de A est devenue la deuxième ligne de $A^\top$)
et

$$B=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0&1\\2&3+2\mathrm{i}&2\\\frac{1}{2}&-1&4\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \qquad \longrightarrow \qquad B^\top=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&2&\frac{1}{2}\\0&3+2\mathrm{i}&-1\\1&2&4\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

Proposition (linéarité de la transposition).

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :
- $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
- $(\lambda.A)^\top = \lambda.A^\top$

ce qui se résume par :

$$\forall\, A,B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),\ \forall\, \alpha,\beta \in \mathbb{K}, \qquad (\alpha.A+\beta.B)^\top = \alpha.A^\top + \beta.B^\top$$

Proposition (la transposition est une involution).

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $(A^\top)^\top = A$.

Proposition (transposition d'un produit).

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$(AB)^\top = B^\top A^\top \qquad \text{(on change l'ordre du produit!)}$$

3. Puissances de matrices

Attention.

Dans cette partie, les matrices sont carrées : il n'est pas envisageable de parler de puissances de matrices non carrées!

Définition (puissances de matrices).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut définir les *puissances* de la matrice A par récurrence en posant :

$$A^0 = I_n \qquad \text{et} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ A^{n+1} = AA^n = A^n A$$

Exemple.
On calcule successivement(**retenir la présentation pour les calculs pratiques des puissances!**) :

$$\begin{array}{cccc}
 & & \overbrace{\begin{pmatrix}1+i & 1 & 0\\ 0 & 2 & i\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}^{=A} & \overbrace{\begin{pmatrix}1+i & 1 & 0\\ 0 & 2 & i\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}^{=A}\\
 & \underbrace{\begin{pmatrix}1+i & 1 & 0\\ 0 & 2 & i\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{=A} & \underbrace{\begin{pmatrix}2i & 3+i & i\\ -i & 4 & 3i\\ -2-i & -1 & 1\end{pmatrix}}_{=A^2} & \underbrace{\begin{pmatrix}-2+i & 6+4i & -1+4i\\ 1-4i & 8-i & 7i\\ -2-3i & -4-i & 1-i\end{pmatrix}}_{=A^3}
\end{array}$$

donc

$$A = \begin{pmatrix}1+i & 1 & 0\\ 0 & 2 & i\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad A^2 = \begin{pmatrix}2i & 3+i & i\\ -i & 4 & 3i\\ -2-i & -1 & 1\end{pmatrix},\quad A^3 = \begin{pmatrix}-2+i & 6+4i & -1+4i\\ 1-4i & 8-i & 7i\\ -2-3i & -4-i & 1-i\end{pmatrix}$$

Attention.

Il est généralement *difficile* de calculer A^p où A est une matrice carrée : il n'y a pas de formule générale ni de méthode universelle pour une matrice carrée quelconque! Selon la situation, on pourra calculer les puissances d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

— si la matrice A est diagonale (c'est-à-dire que tous les coefficients de A en dehors de la diagonale sont nuls), en élevant ses coefficients diagonaux à la puissance demandée (les autres coefficients restant nuls);

— si l'on observe une relation de récurrence permettant le passage de A^p à A^{p+1}, en émettant une conjecture que l'on démontre par récurrence;

— si l'on peut écrire $A = B + C$ où $BC = CB$, en utilisant la formule du binôme de Newton si l'on sait calculer «facilement» les puissances de B et de C : cette méthode sera introduite et détaillée dans le cours de l'année;

— si l'on connaît un polynôme annulateur P de A, en utilisant la division euclidienne de X^p par P, cette méthode sera introduite dans un futur chapitre sur les polynômes.

Exemple.

— Pour tout $n \geqslant 1$, $\begin{pmatrix}(-1) & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}(-1)^n & 0 & 0\\ 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

— Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $I_n^p = I_n$ et $O_n^p = O_n$.

Exemple.

On note J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 : $J_n = \begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\\ \vdots & (1) & \vdots\\ 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ Calculer J_n^2 puis en déduire J_n^p, pour $p \in \mathbb{N}$.

Solution.
On calcule $J_n^2 = nJ_n$.
On conjecture : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $J_n^p = n^{p-1}J_n$.
On le démontre par récurrence. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}_p$: $J_n^p = n^{p-1}J_n$.

▷ On a démontré $\mathcal{H}_1$.

▷ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{H}_p$ est vraie. Par hypothèse de récurrence on a $J_n^p = n^{p-1}J_n$. Ainsi

$$J_n^{p+1} = J_n^p J_n = n^{p-1}J_nJ_n = n^{p-1}J_n^2 = n^{p-1} \times nJ_n = n^{p+1-1}J_n$$

donc $\mathcal{H}_{p+1}$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

Attention la formule n'est pas valable si $p = 0$: $J_n^0 = I_n \neq n^{-1}J_n$.

4. Matrices inversibles

Attention.

Dans cette partie, les matrices sont carrées : il n'est pas envisageable de parler d'inverse de matrices non carrées!

Définition (matrice inversible).

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est *inversible* s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ ET $BA = I_n$.
Si B existe, alors B est unique et est appelé *inverse* de A. On la note $B = A^{-1}$.
L'ensemble des matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Attention.

1. Cela n'a pas de sens de parler de l'inversibilité d'une matrice qui n'est pas carrée !
2. Ne jamais noter $\frac{1}{A}$ à la place de A^{-1}, cela n'a aucun sens.

Exemple.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est inversible d'inverse $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $AB = I_2$ et $BA = I_2$.
2. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ n'est pas inversible car pour toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, la dernière ligne de CM est nulle :
$$CM = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$$
Ainsi il n'existe pas de $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telle que $CB = BC = I_2$ et C n'est pas inversible.
(on note $*$ des coefficients de matrices que l'on ne calcule pas pour gagner du temps.)

Proposition (inversibilité des matrices diagonales).

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale. D est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

Exemple.
$D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $D_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, mais $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Attention.
En dehors du cas particulier des matrices diagonales, il n'est généralement pas possible de déterminer l'inversibilité et calculer l'inverse le cas échéant d'une matrice carrée quelconque.
Nous verrons dans le cours de l'année une méthode pratique pour répondre à cette question en toute généralité.

L'exercice suivant présente une situation où l'on peut tester simplement l'inversibilité d'une matrice.

Exemple.
Soit $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer $M^2 + M - 2I_3$, en déduire que M est inversible et expliciter son inverse.

Solution.
On a :
$$M^2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
d'où l'on déduit
$$M^2 + M - 2I_3 = \begin{pmatrix} 5-3-2 & -4+4 & -2+2 \\ 2-2 & -1+3-2 & -1+1 \\ -2+2 & 2-2 & 2+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Ainsi,
$$M^2 + M - 2I_3 = O_3 \Longleftrightarrow M^2 + M = 2I_3 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(M + I_3)M = I_3 \Longleftrightarrow M\left(\frac{1}{2}(M + I_3)\right) = I_3$$
d'où l'on déduit que M est inversible d'inverse $\frac{1}{2}(M + I_3)$.
On calcule précisément :
$$\frac{1}{2}(M + I_3) = \begin{pmatrix} \frac{-3+1}{2} & \frac{4}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{-2}{2} & \frac{3+1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{0+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M^{-1}$$

Attention cependant à rester conscient qu'en général on ne trouvera pas facilement une relation entre les puissances de la matrice ! cette méthode n'est pas utilisable en toute généralité.

5. Exercices

Exercice 38.

1. Soient :

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1&-3&7\\0&-2&4\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&0&-2&\mathrm{i}\\-\mathrm{i}&3&0&1\end{pmatrix}$$

   Calculer les produits matriciels AB, AC et AD.

2. Soient :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&0\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}-2&3&0&1\\-1&2&0&1\\-1&0&0&2\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&0&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}$$

   Calculer les produits matriciels AB, AC et AD.

3. Soient :

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&1&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\0&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}1&2&-1&-2&0\\0&1&1&1&0\\-1&-2&3&-4&0\end{pmatrix}$$

   Calculer les produits matriciels AB, AC et AD.

4. Calculer, lorsque cela est possible, les produits AB et BA.

   (a) $A=\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\5&8\end{pmatrix}$

   (b) $A=\begin{pmatrix}-2&1&7\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix}$

   (c) $A=\begin{pmatrix}5&1\\1&-2\end{pmatrix}$ et $B=A^\top$

   (d) $A=\begin{pmatrix}4&3\\5&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}4&-3\\-5&4\end{pmatrix}$

   (e) $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-3&2&4\\0&1&-1\end{pmatrix}$

   (f) $A=\begin{pmatrix}\mathrm{i}&1&-\mathrm{i}\\1&-2&\mathrm{i}\\2&0&1+\mathrm{i}\end{pmatrix}$ et $B=\overline{A}^\top$

Exercice 39.

Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&-5&6\\3&-3&4\end{pmatrix}$.

1. Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que : $A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\2a_n&1-2a_n&2a_n\\a_n&-a_n&a_n+1\end{pmatrix}$
2. Montrer que la suite (a_n) est arithmético-géométrique, en déduire son terme général puis l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 40.

Soit $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{tr}(A)=a+d$ sa *trace* et $\det(A)=ad-bc$ son déterminant.
Démontrer que $A^2-\mathrm{tr}(A)A+\det(A)I_2=0$ (la matrice nulle).

Exercice 41.

1. Trouver deux matrices $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ non nulles telles que $AB=O_2$ (matrices que l'on choisira différentes des exemples de la partie cours).
2. Trouver trois matrices $A,B,C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ non nulles telles que $AB=AC$ mais $B\neq C$ (matrices que l'on choisira différentes des exemples de la partie cours).
3. Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices non nulles. On suppose que $AB=O_n$. Montrer que ni A ni B ne peuvent être inversibles.
4. Soient $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $a_0,\dots,a_d\in\mathbb{K}$ tels que $a_0\neq 0$. On suppose que $\sum\limits_{k=0}^{d}a_kA^k=0$. Montrer que A est inversible et déterminer l'inverse de A.
5. Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On suppose que $AA^T=O_n$. En regardant les coefficients diagonaux de AA^T, montrer que $A=0$.
6. Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. On suppose que $A\overline{A}^T=O_n$. Montrer que $A=0$.
   (par définition, la matrice $\overline{A}$ est la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de A, ainsi $\overline{A}^\top$ est la «transconjuguée», obtenue à partir de A en la conjuguant et en la transposant.)

V. Raisonner, rédiger

1. Axiomes, définitions, théorèmes

Fixons d'abord du vocabulaire : on appelle *proposition* toute phrase p au sujet de laquelle on peut poser la question «p est-elle vraie ?»

La plupart des phrases grammaticalement correctes sont des propositions, mais par exemple « Dis-le-moi ! », « Bonjour » ou « Comment vas-tu ? » n'en sont pas, la question « Est-il vrai que bonjour ? » n'a en effet aucun sens.

a) Axiome

Dans une théorie formelle quelconque, mathématique ou non, on appelle *axiome* une proposition posée comme vraie à l'intérieur d'une théorie.

Par exemple la géométrie d'Euclide repose sur plusieurs axiomes dont vous connaissez sûrement le 5ème postulat «par un point en dehors d'une droite il passe une unique parallèle à cette droite». La construction des l'ensemble des entiers naturels repose sur des axiomes (par exemple ceux de Péano). Enfin, votre curiosité mathématique vous fera peut-être croiser la route de «l'axiome du choix», sachez que selon l'axiomatique utilisée en théorie des ensembles on peut accepter ou rejeter cet axiome. Fort heureusement nous n'aurons pas à nous en préoccuper.

Nous aurons très peu l'occasion de rencontrer les axiomes sur lesquels les mathématiques sont traditionnellement fondées, en particulier nous ne construirons ni les entiers, ni les réels : ce sont des sujets passionnants mais trop difficiles.

b) Définition

On appelle *définition* toute manière d'accorder un nom jusqu'ici inusité à un objet vérifiant une certaine propriété.

Une définition crée ainsi une classe d'objets — les oiseaux, par exemple — réunis autour d'un certain nom — le mot «oiseau» — lequel résume une certaine propriété — «animal à plumes».

Par rigueur formelle, l'usage d'homonymes est à éviter à tout prix.

On introduit généralement une définition en commençant par «on appelle «truc» tout objet qui vérifie…» ou encore «Soit x un objet. On dit que x est un «truc» s'il vérifie…»

c) Théorème

On appelle *théorème* toute proposition d'une théorie que l'on a pu démontrer à partir de ses axiomes. Une théorie est un empilement ordonné d'axiomes, de démonstrations et de théorèmes. Plusieurs autres mots sont couramment utilisés pour désigner certaines formes de théorèmes :

- **Proposition** : on appelle *proposition* un théorème de moindre importance (on revient ici au sens premier introduit en début de texte).
- **Lemme** : on appelle *lemme* tout théorème préparatoire à la démonstration d'un plus gros théorème. La démonstration d'un gros théorème peut ainsi se trouver découpé en morceaux plus petits.
- **Corollaire** : on appelle *corollaire* tout théorème qui est une conséquence presque immédiate d'un plus gros théorème.
- **Caractérisations** : on appelle *caractérisation* tout théorème sur une notion qui donne une condition équivalente à la définition de cette notion. Une caractérisation est ce que l'on pourrait appeler une «redéfinition».

2. Introduire des objets

La règle la plus importante pour rédiger en mathématiques, c'est que *tout objet dont on parle doit être introduit*.

On rencontrera essentiellement deux types de symboles pour désigner les objets mathématiques : les *variables* et les *constantes*.

- **Introduire une variable.**

  Quand on se donne (par exemple) un réel x quelconque, on dit que x est une variable ; elle n'a pas de valeur définie, elle représente à elle seule tous les réels. En d'autres termes, pour parler des TOUS les objets d'un ensemble, on en prend un quelconque et on parle de CET objet pour parler de tous les autres.

  En pratique, on introduit une variable, un réel x par exemple, en commençant par «soit $x \in \mathbb{R}$» C'est l'usage du «soit» qui définit l'acte de naissance de la variable x, celle-ci signifie alors quelque chose jusqu'à la fin de la preuve ou de l'énoncé en cours.

  Si la vie de x est plus courte, une ou deux lignes par exemple, on peut écrire «pour tout $x \in \mathbb{R}$» plutôt que «soit $x \in \mathbb{R}$». Par exemple, pour calculer la dérivée de la fonction $f : x \mapsto xe^x$, on ne se contente pas d'écrire $f'(x) = (x+1)e^x$ car alors x n'est pas introduit, mais on écrit

  «Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x+1)e^x$»   ou   «Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f'(x) = (x+1)e^x$»

Enfin, certains symboles permettent d'introduire directement des variables, que l'on qualifiera de *locales*, sans passer par l'usage du «soit» ou du «pour tout», c'est le cas en particulier des symboles $\sum$, $\prod$ et $\int$. Par exemple :

$$\text{«Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on considère } \sum_{k=1}^{n} k\text{»}$$

La variable k n'a de sens que dans la somme qui lui donne vie, elle n'a pas besoin d'être introduite auparavant et n'a pas de sens en dehors de la somme. En revanche, la variable n a dû être introduite préalablement et conserve un sens en dehors de la somme.

- **Nommer des objets.**

  De nombreux symboles mathématiques désignent des objets mathématiques parfaitement définis, on les appelle des *constantes*. Par exemple 2, π, $\cos$, $\mathbb{N}$ ne sont pas des variables mais des constantes, des objets mathématiques qui ne représentent qu'eux-mêmes.

  Pour le besoin d'un raisonnement ou d'un énoncé, on peut définir nos propres constantes. Par exemple après avoir introduit convenablement un réel α, si la quantité $\dfrac{\alpha-2}{\alpha^2+1}$ est utilisée plusieurs fois, on peut la nommer pour alléger la rédaction. Pour cela on pourra écrire

  $$\text{«On pose } K=\frac{\alpha-2}{\alpha^2+1}\text{»} \qquad \text{ou encore} \qquad \text{«On note } K \text{ le réel } \frac{\alpha-2}{\alpha^2+1}\text{»}$$

  Notons au passage que K dépend de α, il est donc préférable de noter K_α ce réel plutôt que K si l'on est amené à utiliser cette quantité pour différentes valeurs de α. Mais c'est le contexte qui nous invite à choisir cette notation plutôt que l'autre, si la valeur de α n'a pas d'importance dans le raisonnement alors autant noter simplement K ce réel.

  On veillera autant que possible à respecter les usages pour nommer les objets : x, y, t pour des réels, i, j, k, ℓ, n pour des entiers, f, g pour des fonctions…

- **Abus tolérés.**

  La distinction, forte, rigoureuse, faite dans les deux items précédents n'est pas toujours respectée à la lettre. Par exemple introduire f ainsi :

  $$\text{«Soit } f : x \mapsto xe^x\text{»}$$

  n'est pas conforme à ce qui précède : la fonction f n'est pas une variable, elle est parfaitement définie et ne représente qu'elle même. Il serait plus correct d'écrire :

  $$\text{«On pose } f : x \mapsto xe^x\text{»}$$

  Mais la première rédaction est largement tolérée.

  Enfin, «on pose» et «on note», rigoureusement, ne s'emploient pas de la même façon d'un point de vue grammatical : le premier est suivi d'une égalité qui définit l'objet introduit, mais pas le second. Comme dans le cas de figure précédent, cette règle ne sera pas respectée à la lettre.

- **Ne pas prendre ses désirs pour des réalités.**

  Attention, en général il ne suffit pas d'introduire un objet pour qu'il existe. Typiquement, une phrase commençant par «soit x l'unique objet tel que…» doit être soigneusement vérifiée : x existe-t-il vraiment, si oui est-il bien unique? ces choses doivent être justifiées.

  Par exemple que penser du raisonnement suivant? Montrons que 1 est le plus grand entier naturel non nul, pour cela on considère N le plus grand entier naturel non nul et on suppose par l'absurde que $N>1$. Alors $N^2>N$ et N^2 est un entier naturel non nul, ce qui contredit la maximalité de N. Donc $N=1$.

3. De l'usage des quantificateurs

On rencontre deux quantificateurs :

— le quantificateur universel «$\forall$» qui signifie «pour tout»,

— le quantificateur existentiel «$\exists$» qui signifie «il existe».

Attention, les quantificateurs ne doivent pas être utilisés comme des abréviations!

Dans une phrase on écrit les quantificateurs en toutes lettres. Si l'on souhaite écrire une expression quantifiée dans une phrase, on sépare l'expression quantifié de la partie de la phrase qui la précède à l'aide de «:». Par exemple, il est correct d'écrire :

$$\text{Démontrer que, pour tout } x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0. \qquad \text{ou} \qquad \text{Démontrer que : } \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0.$$

La même dernière phrase écrite sans les «:» serait incorrecte. Pourquoi? c'est une règle d'écriture aussi importante que «toute phrase commence par une majuscule et termine par un point.»

- **Montrer une proposition universelle.**

  Quand on veut montrer : $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$ (où E est un ensemble préalablement introduit et $\mathscr{P}(x)$ une proposition dépendant de x), on commence par écrire :

  $$\text{Soit } x \in E. \text{ Montrons } \mathscr{P}(x).$$

  et on fait la preuve de la proposition annoncée. Éventuellement en fin de démonstration on précise «ceci étant valable pour tout $x \in E$, on a démontré : $\forall x \in E,\ \mathscr{P}(x)$.»

  Exemple.

  Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant \dfrac{1+x^2}{2}$.

  Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. on veut démontrer que $|x| \leqslant \frac{1+x^2}{2}$. L'inégalité à démontrer est équivalente à $0 \leqslant 1+x^2-2|x|$, où l'on reconnaît une identité remarquable. Or on sait que $(1-|x|)^2 \geqslant 0$ en tant que carré de nombre réel, donc $1-2|x|+|x|^2 \geqslant 0$ puis $|x| \leqslant \frac{1+x^2}{2}$ puisque $|x|^2 = x^2$.

  Ceci étant valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a démontré : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant \frac{1+x^2}{2}$.

- **Montrer une proposition existentielle.**

  Quand on veut montrer : $\exists x \in E, \mathscr{P}(x)$ (où E est un ensemble préalablement introduit et $\mathscr{P}(x)$ une proposition dépendant de x), la difficulté principale en général n'est pas de vérifier que x vérifie $\mathscr{P}$, mais de trouver x.

  Il faut trouver des «idées» de ce que peut être x et vérifier. L'expérience (vous en avez peu aujourd'hui, j'en ai un peu plus) nous y aidera, mais il n'y a pas de méthode générale ou systématique pour trouver x.

  Nous reviendrons sur ce point plus loin à propos du raisonnement par analyse-synthèse.

  Exemple.

  Démontrer : $\forall a, b \in \mathbb{N},\ \exists c \in \mathbb{N},\ \sqrt{c} > a+b$.

  Preuve : Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On pose $c = (a+b+1)^2$. Alors $c \in \mathbb{N}$ et

  $$\sqrt{c} = \sqrt{(a+b+1)^2} \underset{\text{à connaître}}{=} |a+b+1| \underset{a+b+1 \geqslant 0}{=} a+b+1 > a+b$$

  Ce qui montre la propriété annoncée.

  Notons que trouver c a nécessité un calcul, fait au brouillon ou dans votre tête.

- **Montrer l'unicité d'un objet.**
Quand on veut montrer qu'un ensemble E contient **au plus** un élément vérifiant une propriété $\mathscr{P}$, on commence par écrire :

Soient $x, x' \in E$. On suppose que $\mathscr{P}(x)$ et $\mathscr{P}(x')$. Montrons que $x = x'$.

et on démontre l'égalité annoncée.
On rencontrera le pseudo quantificateur «$\exists!$», qui signifie «il existe un unique», mais attention il ne sert pas juste à annoncer l'unicité, mais aussi l'existence.

Exemple.
Démontrer : $\exists! x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = 1$.
Preuve de l'existence : On pose $x = 1$. Alors $x \in \mathbb{R}_+$ et $x^2 = 1$.
Preuve de l'unicité : Soient $x, x' \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $x^2 = 1$ et $x'^2 = 1$. Alors $x^2 - x'^2 = 0$ donc $(x + x')(x - x') = 0$ donc $x = x'$ ou $x = -x'$. Dans ce dernier cas x et x' sont de signes opposés, ce qui n'est possible que si $x = x' = 0$, mais alors $x^2 = 0 \neq 1$, c qui est exclu. Donc $x = x'$.
Bilan on a démontré : $\exists! x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = 1$.

Remarque : on peut aussi démontrer l'unicité d'un objet à l'aide d'un raisonnement par l'absurde (voir plus loin), mais c'est rarement mieux que la méthode directe que l'on vient de présenter.

4. Implication, disjonction, équivalence

a) Implication («$p \Longrightarrow q$»)

- **Montrer une implication.**
Quand on veut montrer que $p \Longrightarrow q$, on commence par écrire :

«On suppose que p est vraie. Montrons que q est vraie.»

et on démontre le résultat annoncé.

Exemple.
Démontrer : Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^2 - x \leqslant -1/4 \Longrightarrow x = 1/2$.
Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose que $x^2 - x \leqslant -1/4$. Alors $x^2 - x + 1/4 \leqslant 0$, et reconnaissant une identité remarquable, $(x-1/2)^2 \leqslant 0$. Or $(x-1/2)^2 \geqslant 0$ en tant que carré de réel, donc $(x-1/2)^2 = 0$, si bien que $x = 1/2$.

- **Contredire une implication**.
Les propositions $\big(\text{non}(p \Longrightarrow q)\big)$ et $\big(p \text{ et non}(q)\big)$ sont équivalentes. Ainsi pour contredire une implication on commence par écrire :

«Montrons que p est vraie.»

suivi de la preuve de p, puis

«Montrons que q est fausse.»

suivi de la preuve de non(q).

Exemple.
Démontrer : la proposition «$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Longrightarrow \sin x \leqslant \sin y$» est fausse.
Preuve : il s'agit de démontrer la négation de la proposition citée qui est de la forme «$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \mathscr{P}(x, y) \Longrightarrow \mathscr{Q}(x, y)$». On va donc démontrer «$\exists x, y \in \mathbb{R},\ x < y$ et $\sin x > \sin y$».
On pose (après réflexion) $x = \pi/2$ et $y = \pi$, alors $x < y$ et $\sin \pi/2 = 1 > 0 = \sin y$, ce qui montre le résultat.

- **Contraposée**.
Les propositions $(p \Longrightarrow q)$ et $\big(\text{non}(q) \Longrightarrow \text{non}(p)\big)$ sont équivalentes. Cette dernière s'appelle la *contraposée* de la première. Ainsi pour montrer que $p \Longrightarrow q$ par contraposition, on commence par écrire :

«On suppose que q est fausse. Montrons que p est fausse.»

et on démontre le résultat annoncé.

Exemple.
Démontrer : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $2^n - 1$ est premier alors n est premier.
Preuve : On montre la contraposée : si n n'est pas premier, alors $2^n - 1$ ne l'est pas non plus.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que n n'est pas premier, il existe alors $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leqslant a < n$ et $n = ab$.
On écrit alors

$$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = \left(2^a\right)^b - 1 \underset{\text{identité remarquable}}{=} (2^a - 1)(1 + 2^a + 2^{2a} + \cdots + 2^{(b-1)a})$$

Or $2 \leqslant a \leqslant n-1$ donc $2^2 \leqslant 2^a \leqslant 2^{n-1} < 2^n$ puis $3 \leqslant 2^a - 1 < 2^n - 1$ donc $2^n - 1$ n'est pas premier.

- **Du mauvais usage du symbole $\Longrightarrow$.**
Attention, le symbole $\Longrightarrow$ ne signifie pas «donc» et ne doit pas être utilisé comme tel.
Quand on écrit «p est vraie, donc q est vraie», on effectue un *raisonnement* : on sait que p est vraie parce qu'on l'a démontré ou bien parce que c'est une hypothèse. Ce n'est pas la même chose que d'écrire «$p \Longrightarrow q$» qui est une *proposition* : on ne sait pas si p ou q sont vraies, mais si p est vraie, alors q est vraie aussi.
Un raisonnement est un enchevêtrement de propositions. Pour en terminer avec l'exemple cité, voici une reformulation détaillée de «p est vraie donc q est vraie» :

On sait que p est vraie (hypothèse ou résultat précédent).
Or il est vrai que $p \Longrightarrow q$ (théorème ou démonstration déjà faite), **donc** q est vraie.

b) Disjonction («p **ou** q»)

Les propositions $(p \text{ ou } q)$ et $\big(\text{non}(p) \Longrightarrow q\big)$ sont équivalentes. Autrement dit, dire que p ou q est vraie, c'est dire que si p est fausse, alors q est vraie. Ainsi pour montrer p ou q on commence par écrire :

«On suppose que p est fausse, montrons que q est vraie.»

et on démontre le résultat annoncé.

Exemple.
Démontrer : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| \leqslant \max(1, x^2)$.
Preuve : Il s'agit de montrer que $|x| \leqslant 1$ ou $|x| \leqslant x^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On suppose non$(|x| \leqslant 1)$, c'est-à-dire $|x| > 1$. En multipliant par $|x| > 0$ il vient $|x|^2 > |x|$ donc $|x| \leqslant x^2$.
On a démontré : $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \leqslant \max(1, x^2)$.

c) **Équivalence** («$p \Longleftrightarrow q$»)

Essentiellement, il y a deux façons de procéder.

- **Raisonnement par double implication.** (méthode prudente)
  On montre que $p \Longrightarrow q$ (sens direct) et on montre que $q \Longrightarrow p$ (sens indirect ou réciproque).

  Exemple.
  Démontrer : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$.
  Preuve : Soient $x, y \in \mathbb{R}$.
  — Si $x = y = 0$, alors $x^2 + y^2 = 0$, le sens réciproque est démontré.
  — On suppose que $x^2 + y^2 = 0$. Alors $x^2 = -y^2$, et sachant que $x^2 \geqslant 0$ et $-y^2 \leqslant 0$, il vient : $0 \leqslant x^2 = -y^2 \leqslant 0$ donc $x^2 = 0$ et $-y^2 = 0$, donc $x = y = 0$. Le sens direct est démontré.

  En pratique on commence par montrer le sens le plus facile !

- **Raisonnement par équivalence.**
  On utilise fréquemment cette méthode lors de la résolution d'équations ou inéquations, et éventuellement pour montrer une égalité d'ensemble (dans des cas «simples»).
  On démontre, par étapes successives

  $$p \Longleftrightarrow p_1 \Longleftrightarrow p_2 \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow p_n \Longleftrightarrow q$$

  où $p_1, \ldots, p_n$ sont des propositions obtenues en modifiant «un peu» la proposition qui la précède, jusqu'à obtenir q.

  Exemple.
  Démontrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(x^2 + 4x + 1 \geqslant 0\right) \Longleftrightarrow \left(x \leqslant -2 - \sqrt{3} \text{ ou } x \geqslant -2 + \sqrt{3}\right)$.
  Preuve : Soit $x \in \mathbb{R}$.

  $$x^2 + 4x + 1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow \underbrace{x^2 + 4x + 4}_{\text{on force une identité remarquable}} - 3 \geqslant 0 \Longleftrightarrow (x+2)^2 - \sqrt{3}^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow (x + 2 - \sqrt{3})(x + 2 + \sqrt{3}) \geqslant 0$$

  $$\underset{\text{tableau de signes}}{\Longleftrightarrow} x \leqslant -2 - \sqrt{3} \text{ ou } x \geqslant x \geqslant -2 + \sqrt{3}$$

- 💣 **Du mauvais usage du symbole $\Longleftrightarrow$.**

  ▷ Attention, le symbole $\Longleftrightarrow$ ne signifie pas «c'est-à-dire» (ou *i.e.* la locution latine synonyme souvent utilisée dans les textes mathématiques) et ne doit pas être utilisé comme tel. À nouveau il s'agit de ne pas confondre raisonnement et proposition.

  ▷ Attention, notre cerveau pense plus facilement l'implication que l'équivalence. Il ne faut pas utiliser le symbole $\Longleftrightarrow$ si l'on n'est pas sûr de l'équivalence !
  En particulier :
  — On peut sommer des (in)égalités :

  $$\left(\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \leqslant b_i\right) \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$$

  mais on ne peut pas «dé-sommer» :

  $$\left(\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \leqslant b_i\right) \not\Longleftarrow \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$$

  — On peut intégrer des (in)égalités :

  $$\left(\forall t \in [a, b],\ f(t) = g(t)\right) \Longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

  mais on ne peut pas «dés-intégrer» :

  $$\left(\forall t \in [a, b],\ f(t) = g(t)\right) \not\Longleftarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

5. Inclusion, égalité d'ensembles

Soient A et B deux ensembles.

- **Montrer une inclusion d'ensembles.**
  $A \subset B$ signifie, par définition : $\forall x \in A,\ x \in B$.
  Ainsi, quand on veut montrer que A est inclus dans B, on commence par écrire :

  « Soit $x \in A$. Montrons que $x \in B$. »

  et on démontre l'appartenance annoncée.

  Exemple.
  Démontrer : $\{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\} \subset 2\mathbb{N}$.
  Preuve : On note $A = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}$ et $B = 2\mathbb{N}$ (B est l'ensemble des entiers qui s'écrivent 2ℓ, où $\ell \in \mathbb{N}$, c'est l'ensemble des entiers naturels pairs).
  Soit $n \in A$: $\exists k \in \mathbb{N},\ n = k(k+1)$. k et $k+1$ sont deux entiers consécutifs, l'un d'eux est pair, et par produit n est alors pair. Donc $n \in B$.
  On a démontré que $A = \{k(k+1) \mid k \in \mathbb{N}\} \subset B = 2\mathbb{N}$.

- **Montrer une égalité d'ensembles.**
  Essentiellement, il y a deux façons de procéder.
  - **Raisonnement par double inclusion.** (méthode prudente)
    On montre que $A \subset B$ et on montre que $B \subset A$.

Exemple.
Démontrer : $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y > 0,\ x \leqslant y\}$.
Preuve :
— Soit $x \in \mathbb{R}_-$. Alors pour tout $y > 0$, $x \leqslant 0 < y$ donc $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y > 0,\ x \leqslant y\}$.
— Soit $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y > 0,\ x \leqslant y\}$. Montrons que $x \in \mathbb{R}_-$. Si $x > 0$, alors $x > x/2 < 0$, si bien qu'en posant $y = x/2 > 0$ il vient $x > y$ alors que par hypothèse, $x \leqslant y$. Il y a une contradiction, donc $x \leqslant 0$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}_-$.

En pratique on commence par montrer l'inclusion plus facile.
Notons qu'on effectué un raisonnement par l'absurde, ce qui sera développé plus loin.

- **Raisonnement par équivalence.**
On démontre, par étapes successives

$$x \in A \iff \cdots \iff x \in B$$

Exemple.
Démontrer : Soient A, I des ensembles, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de A. Alors :

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$$

Preuve : Soit $x \in A$. Alors

$$x \in \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \iff \text{non}\left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right) \iff \text{non}\,(\forall i \in I,\ x \in A_i)$$
$$\iff \exists i \in I,\ \text{non}\,(x \in A_i) \iff \exists i \in I,\ x \notin A_i \iff x \in \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$$

6. Raisonnement par récurrence

- **Récurrence simple.**
Le raisonnement par récurrence (simple) repose sur le principe suivant :

$$\text{si } \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie},}_{\text{initialisation}} \qquad \text{et si : } \underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1},}_{\text{hérédité}} \qquad \text{alors : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$$

Pour montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$, on rédige ainsi :
— On explicite $\mathscr{P}_n$: c'est une proposition qui dépend de n, n étant un entier introduit *avant* d'écrire $\mathscr{P}_n$.
— On démontre que $\mathscr{P}_0$ est vraie (initialisation).
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$. Et on démontre $\mathscr{P}_{n+1}$ (hérédité).

Toute autre rédaction est exclue !

▷ Introduire $\mathscr{P}_n$ en écrivant $\mathscr{P}_n : \forall n \in \mathbb{N}, \ldots$ est une erreur gravissime.
▷ Commencer l'hérédité par «supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}_n$» est une erreur tout aussi grave.
▷ Moins grave, mais gênant, écrire «supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$, montrons $\mathscr{P}_{n+1}$» est incorrect : cela ne permet pas d'utiliser le principe «$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1}$». On doit introduire n avec un «soit» et non avec un «il existe» (ou toute expression synonyme comme «pour un certain n»).

Exemple.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par récurrence en posant :

$$u_1 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

Démontrer : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n > 0$.
Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $\mathscr{H}(n)$: u_n existe et $u_n > 0$.
— L'initialisation se fait pour $n = 1$ car la propriété concerne les $n \in \mathbb{N}^*$. On constate que u_1 existe car il est donné explicitement par l'énoncé et $u_1 = 2 > 0$, donc $\mathscr{H}(1)$ est vraie.
— Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ (on précise n supérieur ou égal au rang de l'initialisation). On suppose que $\mathscr{H}(n)$ est vraie. On veut montrer $\mathscr{H}(n+1)$: u_{n+1} existe et $u_{n+1} > 0$.
Par hypothèse de récurrence : u_n existe et $u_n > 0$.
On effectue une série d'opérations pour obtenir l'expression de u_{n+1} :

$$u_n > 0 \text{ donc } u_n + 1 > 1 > 0$$

Ainsi $\ln(u_n + 1)$ est bien défini, donc $u_{n+1} = \ln(u_n + 1)$ existe.
Par ailleurs, par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$ on a :

$$u_n + 1 > 1 \quad \text{donc} \quad \ln(1 + u_n) > \ln(1) \quad \text{donc} \quad u_{n+1} > 0$$

donc $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

- **Récurrence double, multiple.**
Parfois il n'est pas possible de déduire $\mathscr{P}_{n+1}$ de $\mathscr{P}_n$, mais seulement $\mathscr{P}_{n+2}$ de $\mathscr{P}_{n+1}$ et $\mathscr{P}_n$. Le raisonnement par récurrence (double) devient :

$$\text{si } \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ et } \mathscr{P}_1 \text{ sont vraies},}_{\text{initialisation}} \qquad \text{et si : } \underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathscr{P}_{n+1} \text{ et } \mathscr{P}_n) \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+2},}_{\text{hérédité}} \qquad \text{alors : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$$

Pour montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$, on rédige ainsi :
— On explicite $\mathscr{P}_n$: c'est une proposition qui dépend de n, n étant un entier introduit *avant* d'écrire $\mathscr{P}_n$.
— On démontre que $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_1$ sont vraies (initialisation).
— Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies. Montrons $\mathscr{P}_{n+2}$. Et on démontre $\mathscr{P}_{n+2}$ (hérédité).

Exemple.
On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Démontrer : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 2^n$.
Preuve : On procède par récurrence double. En effet, le calcul de u_{n+2} nécessite la connaissance des termes u_{n+1} ET u_n.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{H}(n) : u_n \leqslant 2^n$.
- On initialise pour $n=0$ et $n=1$. L'énoncé donne $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, et $2^0 = 1 \geqslant u_0$ et $2^1 = 2 \geqslant 1 = u_1$, donc $\mathscr{H}(0)$ et $\mathscr{H}(1)$ sont vraies.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathscr{H}(n)$ et $\mathscr{H}(n+1)$ sont vraies (ainsi dans le cas de bord $n=0$ cela inclut bien les deux rangs de l'initialisation). On veut montrer $\mathscr{H}(n+2) : u_{n+2} \leqslant 2^{n+2}$.
  Par définition de u_n, on a $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
  On applique alors l'hypothèse de récurrence :
  $$u_{n+2} = \underbrace{u_{n+1}}_{\leqslant 2^{n+1}} + \underbrace{u_n}_{\leqslant 2^n} \leqslant \underbrace{2^{n+1} + 2^n}_{=2^n(2+1)=3\times 2^n}$$
  Or $3 \leqslant 4 = 2^2$ si bien qu'en multipliant l'inégalité par 2^n il vient $3 \times 2^n \leqslant 2^2 \times 2^n$ donc $3 \times 2^n \leqslant 2^{n+2}$.
  Finalement $u_{n+2} \leqslant 2^{n+1}$, donc $\mathscr{H}(n+2)$ est vraie, ce qui achève la récurrence.

Bien entendu, on peut étendre le principe à des récurrences triples ou plus!

- **Récurrence forte.**
  Parfois, il est nécessaire de supposer $\mathscr{P}_0, \ldots, \mathscr{P}_n$ pour déduire $\mathscr{P}_{n+1}$, on parle de *récurrence forte*. Le principe :
  $$\text{si } \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie},}_{\text{initialisation}} \qquad \text{et si : } \underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\ \left(\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathscr{P}_k\right) \Longrightarrow \mathscr{P}_{n+1},}_{\text{hérédité}} \qquad \text{alors : } \forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$$
  Pour montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$, on rédige ainsi :
  - On explicite $\mathscr{P}_n$: c'est une proposition qui dépend de n, n étant un entier introduit *avant* d'écrire $\mathscr{P}_n$.
  - On démontre que $\mathscr{P}_0$ est vraie (initialisation).
  - Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathscr{P}_k$ est vraie. Montrons $\mathscr{P}_{n+1}$. Et on démontre $\mathscr{P}_{n+1}$ (hérédité).

💣 Une récurrence forte n'est pas plus forte, ni moins forte, qu'une récurrence multiple, dans le sens où une récurrence forte peut ne nécessiter qu'une seule initialisation (elle parait alors «plus faible»), ou plusieurs.

Il n'y a pas de recette, c'est à vous de vous adapter au contexte pour savoir si une récurrence simple suffit, ou bien s'il faut faire une récurrence multiple, ou une récurrence forte.

Exemple.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation
$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}$$
Démontrer : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1$.
Preuve : On procède par récurrence forte. En effet, le calcul de u_{n+1} nécessite la connaissance de tous les termes $u_0, \ldots, u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathscr{P}(n) : u_n = 1$.
- $u_0 = 1$ (énoncé) donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
  On veut montrer $\mathscr{P}(n+1)$. On utilise alors la définition de u_{n+1} et le fait que par hypothèse de récurrence, $u_0, u_1, \ldots, u_n$ sont tous égaux à 1, ce qui donne :
  $$u_{n+1} = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n+1 \text{ termes}}}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1$$
  donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- On a donc prouvé par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1$.

- **Variantes, remarques importantes.**
  - ▷ Il est possible de ne faire que des récurrences fortes, puisque cela «ne coûte rien» de supposer $\mathscr{P}(k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ au lieu de ne supposer que $\mathscr{P}(n)$. *Mais ce n'est pas un bon usage!* en mathématiques on ne progresse que si l'on apprend à utiliser que les bonnes méthodes au bon moment : ne faites des récurrences fortes que si c'est vraiment nécessaire.
  - ▷ Il est possible, c'est plus surprenant, de ne faire que des récurrences simples, par exemple en posant $\mathscr{H}_n : \mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ dans le cas d'une récurrence double, ou en posant $\mathscr{H}_n : \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathscr{P}_k$ dans le cas d'une récurrence forte . Si cela permet de démontrer les principes de récurrence multiple et de récurrence forte, cela n'a pas réellement d'intérêt en pratique.
  - ▷ Parfois, on veut démontrer $\mathscr{P}_k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, où n est un entier naturel. On peut raisonner par *récurrence finie* en s'appuyant sur le principe :
    $$\text{si } \underbrace{\mathscr{P}_0 \text{ est vraie},}_{\text{initialisation}} \qquad \text{et si : } \underbrace{\forall k \in [\![0,n-1]\!],\ \mathscr{P}_k \Longrightarrow \mathscr{P}_{k+1},}_{\text{hérédité}} \qquad \text{alors : } \forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathscr{P}_k$$
    Pour montrer : $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \mathscr{P}_k$, on rédige ainsi :
    - On explicite $\mathscr{P}_k$: c'est une proposition qui dépend de k, k étant un entier introduit *avant* d'écrire $\mathscr{P}_k$.
    - On démontre que $\mathscr{P}_0$ est vraie (initialisation).
    - Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ (il faut laisser un rang libre pour le dernier pas). On suppose que $\mathscr{P}_k$ est vraie. Montrons $\mathscr{P}_{k+1}$. Et on démontre $\mathscr{P}_{k+1}$ (hérédité).
  - ▷ Il arrive enfin que l'on souhaite construire des familles d'objets par récurrence (une suite par exemple).
    L'idée étant la suivante : si l'on sait construire le premier objet, et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait construire le $n+1$-ième objet à partir du précédent (ou de plusieurs précédents si la «récurrence» est multiple ou forte), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut construire le n-ième objet.
    En MPSI, cela sera vu dans le chapitre sur les suites avec, en particulier, le théorème de Bolzano-Weierstrass, et dans le chapitre sur les espaces vectoriels.

7. Raisonnement par disjonction de cas

Quand on veut montrer que $p \Longrightarrow q$ et que p est de la forme $p = (p_1 \text{ ou } p_2)$, on montre d'une part que $p_1 \Longrightarrow q$ et d'autre part que $p_2 \Longrightarrow q$. C'est un raisonnement par *disjonction de cas* (et cela ne correspond pas à «montrer une disjonction», puisqu'ici on «utilise» la disjonction).

Exemple.

Démontrer : pour tout entier relatif n, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est entier.
Preuve : Soit $n \in \mathbb{Z}$.

— Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Alors
$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2k(2k+1)}{2} = k(2k+1) \in \mathbb{Z}$$
— Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$. Alors
$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} = (2k+1)(k+1) \in \mathbb{Z}$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$.

On peut aussi utiliser le raisonnement par disjonction de cas pour établir une équivalence. En effet, $(p \Longleftrightarrow q)$ et $\big((p \Longrightarrow q)$ et $(\text{non}(p) \Longrightarrow \text{non}(q))\big)$ sont équivalentes.

Exemple.
Démontrer : pour tout entier relatif n, n est impair si et seulement si n^2 est impair.
Preuve : Soit $n \in \mathbb{Z}$.

— Si n est impair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$, et ainsi
$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$
où $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, donc n^2 est impair.

— Si n n'est pas impair, alors n est pair et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$, donc
$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times 2 \times k^2$$
où $2k^2 \in \mathbb{Z}$, donc n^2 est pair donc pas impair.

Ainsi : pour tout entier relatif n, n est impair si et seulement si n^2 est impair.

8. Raisonnement par l'absurde

Une *contradiction* est une proposition de la forme «q et (non q)».
Ainsi, si d'une proposition on arrive à tirer une contradiction, c'est qu'elle est fausse, donc son contraire est vrai.
Quand on veut montrer que p est vraie à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, on commence par écrire :

«On suppose (par l'absurde) que p est FAUSSE.»

et on obtient une contradiction, ce qui permet de conclure que p est vraie.

Exemple.
Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+2} \notin \mathbb{Z}$.
Preuve : On suppose par l'absurde qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+2} \in \mathbb{Z}$. Notons a cet entier. Par positivité de la racine carrée, $a \geqslant 0$. Puis par élévation au carré il vient :
$$n^2 + 2 = a^2 \quad \text{donc} \quad a^2 - n^2 = 2 \quad \text{donc} \quad (a-n)(a+n) = 2$$
Comme $a + n \geqslant 0$ et que le produit $(a-n)(a+n) = 2$, nécessairement $a+n > 0$ et $a-n > 0$. De plus, $a+n$ et $a-n$ sont des entiers dont le produit vaut 2 : l'un vaut donc 1 et l'autre 2, et donc comme $a - n \leqslant a + n$ on a :
$$\begin{cases} a-n=1 \\ a+n=2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a-n=1 \\ 2a=3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} n=\frac{1}{2} \\ a=\frac{3}{2} \end{cases}$$
En particulier $n \notin \mathbb{N}$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur n.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n^2+2} \notin \mathbb{Z}$.

9. Raisonnement par analyse-synthèse

Quand on veut déterminer l'ensemble des éléments d'un ensemble E qui satisfont une propriété $\mathscr{P}$, on raisonne souvent par analyse-synthèse de la manière suivante :

- **Analyse.** Soit $x \in E$. On suppose $\mathscr{P}(x)$.

  $\vdots$

  On cherche les propriétés que possède x afin de réduire les possibilités pour x, on s'arrête quand on estime avoir suffisamment d'information sur x.

  $\vdots$

- **Synthèse.** Posons $x = \ldots$. (*d'après les informations obtenues lors de l'analyse*)
  Vérifions que $x \in E$ et que $\mathscr{P}(x)$.

  $\vdots$

Sans le savoir, vous utilisez en réalité depuis toujours le raisonnement par analyse-synthèse. Simplement, vous aurez désormais besoin de comprendre, au moment où vous en faites une, que vous êtes en train d'effectuer une analyse-synthèse.

— Dans l'analyse, on part d'un élément quelconque de E et on montre que s'il satisfait la propriété $\mathscr{P}$, il a forcément telle ou telle tête et non telle autre.
En résumé, DANS L'ANALYSE ON RESTREINT LE CHAMP DES SOLUTIONS POSSIBLES.

— Dans la synthèse, on vérifie que les possibilités obtenues dans l'analyse sont plus que des possibilités, qu'elles sont bel et bien solutions du problème étudié, *i.e.* des éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$.
À l'issue de ce double mouvement, on a déterminé tous les éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$.

Par exemple, vous faites sans le savoir une analyse-synthèse chaque fois que vous résolvez une équation. On vous l'a dit et répété, la résolution d'une équation est toujours un double mouvement avec réciproque. Tâchons de nous en convaincre sur un exemple de résolution par équivalence.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

Analyse
Les seules solutions possibes sont $-\sqrt{3}$, -1, 1 et $\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^2 + 3 = 0 &\iff (x^2)^2 - 4(x^2) + 3 = 0 \\ &\underset{\Delta=4}{\iff} x^2 = 1 \text{ ou } x^2 = 3 \\ &\iff x \in \{-\sqrt{3}, -1, 1, \sqrt{3}\} \end{aligned}$$

Synthèse
$-\sqrt{3}$, -1, 1 et $\sqrt{3}$ sont bien solutions

Exemple.
On cherche l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$.
En particulier, pour $y = f(x) \in \mathbb{R}$, on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(0) = 2 - x - f(x) \quad \text{donc} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x + 2 - f(0)$$
Autrement dit, f est affine de coefficient directeur -1, elle est de la forme $f : x \mapsto -x + \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Nous avons déjà bien réduit les possibilités pour f, on peut estimer que c'est suffisant pour passer à la synthèse. Attention, à ce stade les fonctions possibles sont de la forme trouvées, mais toutes les fonctions de cette forme ne conviennent pas nécessairement! c'est la synthèse qui permet de faire le tri.
- **Synthèse.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $f : x \mapsto -x + \lambda$. Alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$f\big(y - f(x)\big) = -y + f(x) + \lambda = -y - x + 2\lambda$$
La seule valeur de λ pour laquelle la relation fonctionnelle est satisfaite est donc $\lambda = 1$.

Bilan : la fonction $x \mapsto 1 - x$ est la seule solution du problème étudié.

Remarque. L'analyse aurait pu être prolongée, en effet, après avoir obtenu que $f : x \mapsto -x + 2 - f(0)$, on peut évaluer la relation en $x = 0$ pour obtenir $f(0) = 2 - f(0)$ donc $f(0) = 1$, puis $f : x \mapsto 1 - x$. Ainsi dès l'analyse il n'y a plus qu'une seule fonction possible, ce ne dispense néanmoins pas de vérifier en synthèse que cette fonction satisfait bien la relation de l'équation fonctionnelle.
On voit bien ici la principale difficulté de l'analyse-synthèse, il n'est pas toujours évident de savoir quand arrêter l'analyse.

Le raisonnement par analyse-synthèse est souvent employé pour montrer les propositions de la forme : $\exists!\, x \in E, \mathscr{P}(x)$. Montrer une telle proposition, c'est en effet chercher l'ensemble des éléments de E qui satisfont la propriété $\mathscr{P}$ et montrer qu'il en existe exactement un.
Dans ce cadre, l'analyse réduit le champ des possibles jusqu'à obtention d'une FORME UNIQUE de l'objet étudié, puis la synthèse vérifie que cette forme unique est bel et bien solution.
Revenons pour finir sur la manière dont on prouve une existence en mathématiques. «On pose $x = \ldots$», souvenez-vous. L'ennui, c'est qu'il faut avoir à l'avance une idée d'objet x pour vérifier qu'il a la propriété souhaitée. On tourne un peu en rond, mais l'analyse-synthèse est justement une machine à avoir des idées. Dans l'analyse, on prouve l'unicité, mais on le fait sous forme d'enquête, et à la fin on connaît la forme de l'objet recherché x. En montrant l'unicité, on prépare donc la preuve d'existence qui est la synthèse. En résumé, dans l'analyse-synthèse, l'unicité est déjà une manière d'aborder l'existence.
Schématiquement : «Analyse = Unicité / Synthèse=Existence»

Exemple.
On veut monter que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
On procède par analyse-synthèse.

- **Analyse.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f s'écrit comme somme d'une fonction paire que l'on note f_1 et d'un fonction impaire que l'on note f_2.
Alors :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \qquad (1)$$
Pour exploiter la parité de f_1 et l'imparité de f_2, il est naturel d'évaluer f en $-x$:
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = \underbrace{f_1(-x)}_{=f_1(x)} + \underbrace{f_2(-x)}_{=-f_2(x)} = f_1(x) - f_2(x) \qquad (2)$$
Ainsi $(1) + (2)$ donne : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2f_1(x) = f(x) + f(-x)$,
et $(1) - (2)$ donne : $\forall x \in \mathbb{R},\ 2f_2(x) = f(x) - f(-x)$.
Finalement on a déterminé de manière unique les fonctions f_1 et f_2, elles sont définies par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big),\ f_2(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$$
- **Synthèse.** Soit $f \in E$. Alors :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$$
donc f est la somme de $f_1 : x \mapsto \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$ et $f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$.
Il reste maintenant à vérifier la parité des fonctions f_1 et f_2. On calcule pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$f_1(-x) = \frac{1}{2}\big(f(-x) + f(+x)\big) = f_1(x)$$
et
$$f_2(-x) = \frac{1}{2}\big(f(-x) - f(+x)\big) = -\frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) = -f_2(x)$$
donc f_1 est paire et f_2 est impaire.

Bilan : on a démontré que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

10. Rédiger avec des fonctions ou des suites

Cas des fonctions.

- **Définir une fonction.**

Pour définir une fonction (par exemple la fonction racine carrée), on écrit proprement :

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}.$$

$\mathbb{R}_+$ est *l'ensemble de définition*, $\mathbb{R}$ est *l'ensemble d'arrivée*, la flèche entre les ensembles de départ et d'arrivée est toujours une simple flèche, celle entre x et la formule définissant son image $f(x)$ comprend une petite barre verticale au début (attention il est très important de bien écrire la bonne flèche!).
Noter que l'ensemble d'arrivé $\mathbb{R}$ n'est pas *l'ensemble image* (qui est l'ensemble des valeurs atteintes par $f(x)$ quand x décrit l'ensemble de départ) qui est ici $\mathbb{R}_+$.

Traditionnellement dans l'étude des fonctions l'ensemble d'arrivée d'une fonction à valeurs réelles est $\mathbb{R}$, même si l'ensemble image est plus petit (comme dans l'exemple précédent), on conserve une notation générale où l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$.

La même fonction peut être introduite de façon équivalente par :

▷ On note f la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
▷ On note $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$.
▷ On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$.
▷ On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$.

On s'interdira scrupuleusement d'écrire, entre autres :

▷ On note f la fonction $\sqrt{x}$ sur x (car $\sqrt{x}$ «tout seul» est - au mieux - un réel et pas une fonction).
▷ On note f la fonction $x \to \sqrt{x}$ (l'intention est meilleure, mais il y a un problème de flèche).
▷ On pose $f(x) = \sqrt{x}$ (il manque un quantificateur, x n'est pas introduit!).

De façon générale aussi, on veillera à utiliser les lettres $x,\ y,\ t$ pour désigner les variables d'une fonction, et d'éviter le plus possible d'utiliser les lettres i, j, k, ℓ, n plutôt réservées aux entiers (les fonctions définies sur des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ relèvent de l'étude des suites et ne seront pas envisagées avec le formalisme que l'on vient d'introduire).

- **Parler d'une fonction.**
  Pour parler d'une fonction, on pourra donc écrire «la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$», et non «la fonction $\sqrt{x}$».
  Retenir : la fonction f, mais le réel $f(x)$. Par exemple il est correct d'écrire «la fonction $x \mapsto \sin x$» ou même «la fonction $\sin$» (puisqu'elle a un nom officiel), mais incorrect d'écrire «la fonction $\sin(x)$».

  D'autre part, si I est un intervalle et f une fonction, on pourra dire que «f est définie/monotone/continue/dérivable (par exemple) **SUR** I», mais il est incorrect de dire que «f est définie/monotone/continue/dérivable pour tout $x \in I$», ni même que «$f(x)$ est définie/monotone/continue/dérivable pour tout $x \in I$» (l'ajout du x ne change rien au problème).

Cas des suites.

- **Définir une suite.**
  Pour définir une suite, on écrit proprement (par exemple) :

$$\text{Soit } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ la suite définie par : } \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n^2$$

  En général, on omet de préciser en indice «$n \in \mathbb{N}$» et on peut écrire «la suite (u_n)». En revanche il est incorrect d'écrire «la suite u_n».
  De façon équivalente on peut introduire la suite de la façon suivante : soit (u_n) la suite de terme général $u_n = n^2$. Mentionner le terme général dispense de l'usage de quantificateur.
- **Parler d'une suite.**
  On retient, comme pour les fonctions : la suite (u_n), mais le réel u_n.
  Concernant les propriétés telles que la monotonie, on dira qu'une suite (u_n) est monotone SANS préciser «sur $\mathbb{N}$».
  Éventuellement la suite pourra être monotone «à partir d'un certain rang», mais il ne sera jamais intéressant d'étudier la monotonie d'une suite sur un ensemble fini d'indices.

VI. Solutions des exercices

Solution de 1.

Faux, Vrai, Faux, Faux, Faux, Vrai, Faux.

Solution de 2.

Par définition, $\sqrt{x^2}$ *est l'unique réel positif ou nul tel que* $(\sqrt{x^2})^2 = x^2$.
Or $|x|$ *est positif ou nul et vérifie :*

$$\begin{array}{ll} |x|^2 = x^2 & \text{si } x \geqslant 0 \\ |x|^2 = (-x)^2 = x^2 & \text{si } x < 0 \end{array}$$

Dans tous les cas, $|x|$ *est un réel positif ou nul tel que* $|x|^2 = x^2$.
Par unicité il vient : $\sqrt{x^2} = |x|$.

Solution de 3.

1. *On calcule :*
$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$$
En divisant numérateur et dénominateur par $\cos(a)\cos(b) \neq 0$ *il vient :*
$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{\sin(b)}{\cos(b)}} = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
2. *On observe que :* $\tan(-b) = \dfrac{\sin(-b)}{\cos(-b)} = \dfrac{-\sin(b)}{\cos(b)} = -\tan(b)$.
Ainsi en remplaçant b *par* $-b$ *dans la relation précédente il vient :*
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)+\tan(-b)}{1-\tan(a)\tan(-b)} = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Solution de 4.

1. $\ln(4) = \ln(2\times 2) = 2\ln(2)$.
2. $\ln(8e) = \ln(2^3) + \ln(e) = 3\ln(2) + 1$.
3. $\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(e)$.
4. $\ln(1/2) + \ln(2/3) + \ln(3/4) + \ln(4/5) + \ln(5/6) = \ln(1) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(3) + \ln(4) - \ln(4) + \ln(5) - \ln(5) - \ln(6) = -\ln(6)$.
5. $\ln\left((3+2\sqrt{2})^{2025}\right) + \ln\left((3-2\sqrt{2})^{2025}\right) = \ln\left(\left((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})\right)^{2025}\right) = \ln\left(\left(3^2-(2\sqrt{2})^2\right)^{2025}\right) = \ln\left((9-8)^{2025}\right) = \ln(1^{2025}) = \ln(1) = 0$.

Solution de 5.

1. *Si* $\alpha \in \mathbb{N}$, *notons pour simplifier* $n = \alpha$.
D'après le rappel de cours : $\ln(x^\alpha) = \ln(x^n) = n\ln(x)$. *Ainsi* $e^{n\ln(x)} = e^{\ln(x^n)} = x^n = \underbrace{x\times\cdots\times x}_{n=\alpha\in\mathbb{N}\text{ facteurs}}$ *(on utilise le fait que pour tout réel* $y>0$, $e^{\ln(y)} = y$, *avec ici* $y = x^n$*).*
Si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, *alors* $x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)} = e^{-\left(-\alpha\ln(x)\right)} = \frac{1}{e^{-\alpha\ln(x)}} = \frac{1}{x^{-\alpha}}$.
2. *On calcule directement :*
$$\ln(a^b) \underset{\text{déf. de } a^b}{=} \ln(e^{b\ln(a)}) \underset{\text{car } \ln(e^y)=y}{=} b\ln(a)$$
3. *On calcule en exploitant les propriétés de l'exponentielle :*
$$a^b a^c = e^{b\ln(a)}e^{c\ln(a)} = e^{b\ln(a)+c\ln(a)} = e^{(b+c)\ln(a)} = a^{b+c}$$
puis
$$\frac{a^b}{a^c} = \frac{e^{b\ln(a)}}{e^{c\ln(a)}} = e^{b\ln(a)-c\ln(a)} = e^{(b-c)\ln(a)} = a^{b-c}$$
La relation de la question précédente donne enfin :
$$(a^b)^c = e^{c\ln(a^b)} = e^{cb\ln(a)} = a^{bc}$$
4. — *Si* $\alpha < 0$.
Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha\ln(x) = +\infty$ *puis par composition des limites avec l'exponentielle il vient* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha\ln(x) = -\infty$ *puis par composition des limites avec l'exponentielle il vient* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$.
— *Si* $\alpha = 0$, *alors* $x^\alpha = x^0 = 1$, *donc en tant que fonction constante égale à* 1 *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *les limites en* 0^+ *et* $+\infty$ *de* $x \mapsto x^\alpha$ *sont égales à* 1.

— *Si* $\alpha > 0$.
Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \alpha\ln(x) = -\infty$ *puis par composition des limites avec l'exponentielle il vient* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$.
D'autre part $\lim\limits_{x\to +\infty} \alpha\ln(x) = +\infty$ *puis par composition des limites avec l'exponentielle il vient* $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha = +\infty$.

5. *(On admet la dérivabilité de* $x \mapsto x^\alpha$*, nous apprendrons dans l'année à justifier cela proprement).*
La formule de dérivation composée pour l'exponentielle donne :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^\alpha\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^{\alpha\ln(x)}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\alpha\ln(x)\right) \times e^{\alpha\ln(x)} = \alpha\frac{1}{x}x^\alpha = \alpha x^{-1}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

Solution de 6.

1. *On étudie le signe de la différence :*

$$\frac{2}{7} - \frac{3}{8} = \frac{2\times 8}{7\times 8} - \frac{3\times 7}{8\times 7} = \frac{16-21}{56} = -\frac{5}{56} \leqslant 0 \quad \textit{d'où :}\ \frac{2}{7} \leqslant \frac{3}{8}$$

2. *On étudie le signe de la différence. Pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$(1+x)^2 - 4x = (1+2x+x^2) - 4x = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2 \geqslant 0$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ (1+x)^2 \geqslant 4x$.

3. *On a :* $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, *donc :* $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant 2+\cos(x) \leqslant 3$.
De même : $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, *donc :* $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < 1 \leqslant 2+\sin(x) \leqslant 3$.
Par inverse de nombres strictement positifs, il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{1} \geqslant \frac{1}{2+\sin(x)} \geqslant \frac{1}{3}$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant 2+\cos(x) \leqslant 3$ *et* $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2+\sin(x)} \leqslant 1$.
En multipliant ces inégalités de nombres positifs, on obtient le résultat demandé :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{3} \leqslant \frac{2+\cos(x)}{2+\sin(x)} \leqslant 3$$

4. *On étudie les variations de la fonction* $f : x \mapsto 2\ln(x) - x$ *pour en déduire son signe.*
f *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et on a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$$

Ainsi $f'(x)$ *est du signe de* $2-x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et on a :*

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$2(\ln(2)-1)$	$\searrow$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2\ln(2)-2 \\ &= 2(\ln(2)-1) \end{aligned}$$

Or $\ln(2) \approx 0{,}7$ *donc :* $2(\ln(2)-1) < 0$.
On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) \leqslant 2(\ln(2)-2) < 0$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2\ln(x) - x < 0$, *et finalement :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ 2\ln(x) < x$.
Notons qu'il n'a pas été nécessaire de calculer les limites de f *en* 0 *et en* $+\infty$.

Solution de 7.

1. — *On calcule :* $\frac{1}{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(3)} = \frac{\ln(3)-2\ln(2)}{\ln(2)\times\ln(3)} = \frac{\ln(3)-\ln(2^2)}{\ln(2)\times\ln(3)} = \frac{\ln(3)-\ln(4)}{\ln(2)\times\ln(3)}$.
Comme $2 > 1$ *et* $3 > 1$, *on a* $\ln(2) > 0$ *et* $\ln(3) > 0$.
De plus comme $\ln$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on a :* $\ln(3) < \ln(4)$.
On en déduit que : $\frac{1}{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(3)} = \frac{\ln(3)-\ln(4)}{\ln(2)\times\ln(3)} < 0$, *d'où :* $\frac{1}{\ln(2)} < \frac{2}{\ln(3)}$.
— *On calcule :* $\frac{e-1}{2e-3} - 1 = \frac{(e-1)-(2e-3)}{2e-3} = \frac{2-e}{2e-3}$.
Comme $e \approx 2{,}7$, *on a aussi* $2e > 4$, *donc* $2-e < 0$ *et* $2e-3 > 0$.
On en déduit que : $\frac{e-1}{2e-3} - 1 = \frac{2-e}{2e-3} < 0$, *d'où :* $\frac{e-1}{2e-3} < 1$.

2. — *On a :* $25 < 29 < 36$.
Par stricte croissance de $t \mapsto t^2$ *sur* $\mathbb{R}_+$, *il vient :* $\sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36}$.
Ainsi : $5 < \sqrt{29} < 6$.
— *De même on a :* $64 < 73 < 81$, *donc :* $8 = \sqrt{64} < \sqrt{73} < \sqrt{81} = 9$.
En multipliant par -1 (<0)*, il vient :* $-8 > -\sqrt{73} > -9$.
On ajoute 16 *dans chaque membre de l'inégalité :* $8 > 16-\sqrt{73} > 7$.
En multipliant par $\frac{1}{3}$ (>0)*, il vient :* $\frac{8}{3} > \frac{16-\sqrt{73}}{3} > \frac{7}{3}$.
En particulier : $\frac{9}{3} > \frac{8}{3} > \frac{16-\sqrt{73}}{3} > \frac{7}{3} > \frac{6}{3}$, *d'où :* $3 > \frac{16-\sqrt{73}}{3} > 2$.

Solution de 8.

1. *On a pour tout* $x \in]3,+\infty[$ *:* $\frac{7x-18}{2x-5} - 3 = \frac{(7x-18)-3(2x-5)}{2x-5} = \frac{x-3}{2x-5} > 0$.
D'où : $\forall x \in]3,+\infty[,\ \frac{7x-18}{2x-5} > 3$.

2. *On a :* $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leqslant 1 \leqslant e^x$.
En ajoutant e^x*, il vient :* $\forall x \in [0,+\infty[,\ e^x \leqslant 1+e^x \leqslant 2e^x$.
Par croissance de $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*, on obtient :* $\forall x \in [0,+\infty[,\ \ln(e^x) \leqslant \ln(1+e^x) \leqslant \ln(2e^x)$.
Or $\ln(e^x) = x$ *et* $\ln(2e^x) = \ln(2) + \ln(e^x) = \ln(2) + x$.
On a donc bien : $\forall x \in [0,+\infty[,\ x \leqslant \ln(1+e^x) \leqslant x + \ln(2)$.

3. *On étudie les variations de la fonction* $f : x \mapsto x - 1 + e^{-x}$ *pour en déduire son signe.*
f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a :* $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - e^{-x}$.
Par stricte croissance de $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*, on a pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$f'(x) > 0 \iff 1 > e^{-x} \iff \ln(1) > \ln(e^{-x}) \iff 0 > -x \iff 0 < x$$

Ainsi :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$f(0) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$.
Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ x-1+e^{-x} \geqslant 0$, *et finalement :* $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 1-e^{-x}$.

Solution de 9.
On étudie le signe de la différence (comme $t \geqslant 1$, *on a* $t=(\sqrt{t})^2$*) :*

$$\begin{aligned}2f(\sqrt{t})-f(t) &= \frac{t-1}{\sqrt{t}}-\frac{t^2-1}{2t}=\frac{2(t-1)\sqrt{t}}{2t}-\frac{(t-1)(t+1)}{2t}=\frac{t-1}{2t}\left(2\sqrt{t}-t-1\right)\\ &= -\frac{t-1}{2t}(\sqrt{t}-1)^2 \leqslant 0\end{aligned}$$

puisque $t \geqslant 1$, *donc* $t-1 \geqslant 0$.
Finalement on a bien démontré que : $\forall t \geqslant 1,\ 2f(\sqrt{t}) \leqslant f(t)$

Solution de 10.

— *Le plus petit multiple commun de* 6 *et de* 4 *est* 12. *Ainsi :*

$$A=\frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}{2}=\frac{\frac{2}{12}-\frac{3}{12}}{2}=\frac{-\frac{1}{12}}{\frac{2}{1}}=-\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{24}$$

— *Le plus petit multiple commun de* 5 *et de* 15 *est* 15. *Ainsi :*

$$B=\frac{\frac{1}{5}+\frac{4}{15}}{1+\frac{2}{5}}=\frac{\frac{3}{15}+\frac{4}{15}}{\frac{5}{5}+\frac{2}{5}}=\frac{\frac{7}{15}}{\frac{7}{5}}=\frac{7}{15}\times\frac{5}{7}=\frac{1}{3}$$

— *On a :* $C=\dfrac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}}=\dfrac{2\times\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\times\sqrt{\pi}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Solution de 11.

— *On a :* $f(x)=\dfrac{4x^2}{1-\frac{2-x}{2+x}}=\dfrac{4x^2}{\frac{2+x}{2+x}-\frac{2-x}{2+x}}=\dfrac{4x^2}{\frac{(2+x)-(2-x)}{2+x}}=\dfrac{\frac{4x^2}{1}}{\frac{2x}{2+x}}=\dfrac{4x^2}{1}\times\dfrac{2+x}{2x}$.
Finalement : $f(x)=2x\times(2+x)$.

> *On aura noté que le trait de fraction joue le rôle de parenthèses :*
> $$\frac{a}{c}-\frac{b-d}{c}=\frac{a-(b-d)}{c}$$

— *On a :* $g(x)=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x}{-(x-1)}=\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{x}{x-1}=0$.
On retiendra le résultat important suivant :

> *Le nombre* $a-b$ *est l'opposé du nombre* $b-a$.
> *Ainsi :* $a-b=-(b-a)$.

— *On a :* $h(x)=\dfrac{6x+4}{4-x^2}-\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{6x+4}{(2-x)(2+x)}-\dfrac{x}{2+x}$.
Il vient : $h(x)=\dfrac{6x+4}{(2-x)(2+x)}-\dfrac{x(2-x)}{(2+x)(2-x)}=\dfrac{(6x+4)-x(2-x)}{(2-x)(2+x)}$.
Finalement : $h(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{(2-x)(2+x)}=\dfrac{(x+2)^2}{(2-x)(2+x)}=\dfrac{x+2}{2-x}$.

— *On a :* $u(x)=\dfrac{e^{2x}+2e^x+1}{1+e^{-x}}=\dfrac{(e^x)^2+2e^x+1}{1+\frac{1}{e^x}}=\dfrac{(e^x+1)^2}{\frac{e^x+1}{e^x}}=\dfrac{\frac{(e^x+1)^2}{1}}{\frac{e^x+1}{e^x}}$.
Ainsi : $u(x)=\dfrac{(e^x+1)^2}{1}\times\dfrac{e^x}{e^x+1}=(e^x+1)\times e^x$.

— *On a :* $v(x)=\ln\left(\dfrac{e^{2x}+e^x}{e^{-2x}+e^{-x}}\right)=\ln\left(\dfrac{(e^x)^2+e^x}{\frac{1}{e^{2x}}+\frac{1}{e^x}}\right)=\ln\left(\dfrac{e^x(e^x+1)}{\frac{1}{(e^x)^2}+\frac{1}{e^x}}\right)$.
Ainsi : $v(x)=\ln\left(\dfrac{\frac{e^x(e^x+1)}{1}}{\frac{1+e^x}{(e^x)^2}}\right)=\ln\left(\dfrac{e^x(e^x+1)}{1}\times\dfrac{(e^x)^2}{1+e^x}\right)$.
Finalement : $v(x)=\ln\left((e^x)^3\right)=\ln(e^{3x})=3x$.

Solution de 12.

— *On a :* $A_n=2^n+2^n=2^n\times(1+1)=2^n\times 2=2^{n+1}$.
— *On a :* $B_n=2^n-2^{n-1}=2\times 2^{n-1}-2^{n-1}=2^{n-1}\times(2-1)=2^{n-1}$.
— *On a :* $C_n=2^{-n}+2^{-n}=\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1+1}{2^n}=\dfrac{2}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$.
— *On a :* $D_n=\dfrac{2^n}{2^{-n}}=2^n\times\dfrac{1}{2^{-n}}=2^n\times 2^n=2^{n+n}=2^{2n}$.
On peut éventuellement poursuivre le calcul en écrivant : $D_n=(2^2)^n=4^n$.

Solution de 13.

— *On a :* $A=2^{-1}-3^{-2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{9}=\dfrac{9}{18}-\dfrac{2}{18}=\dfrac{7}{18}$.
— *On a :* $B=\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{2^{-2}}{4}=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{4}\times 2^{-2}=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{6}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{7}{16}$.
— *On a :* $C=\dfrac{\frac{1}{2^n}}{4^n}=\dfrac{\frac{1}{2^n}}{\frac{4^n}{1}}=\dfrac{1}{2^n}\times\dfrac{1}{4^n}=\dfrac{1}{2^n\times 4^n}=\dfrac{1}{(2\times4)^n}=\dfrac{1}{8^n}=\dfrac{1}{(2^3)^n}=\dfrac{1}{2^{3n}}$.
— *On a :* $D=\dfrac{1}{\frac{2^n}{4^n}}=\dfrac{4^n}{2^n}=\dfrac{(2^2)^n}{2^n}=\dfrac{2^{2n}}{2^n}=2^{2n-n}=2^n$.

— *On a :* $E = \dfrac{(-1)^n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \dfrac{\frac{(-1)^n}{1}}{\frac{(-1)^n}{2^n}} = \dfrac{(-1)^n}{1} \times \dfrac{2^n}{(-1)^n} = 2^n$.

— *On a :* $F = (2^n + 2^{n-1}) \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 2^{n-1} \times (2+1) \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 2^{n-1} \times 3 \times \dfrac{1}{3^n}$.

Ainsi : $F = 2^{n-1} \times \dfrac{1}{3^{n-1}} = \dfrac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

— *On a :* $G = \dfrac{x^{2n} - 2x^{4n} + x^{6n}}{x^{2n}-1} = \dfrac{x^{2n} - 2(x^{2n})^2 + (x^{2n})^3}{x^{2n}-1}$.

On peut mettre x^{2n} *en facteur :* $G = \dfrac{x^{2n} \times \left(1 - 2x^{2n} + (x^{2n})^2\right)}{x^{2n}-1}$.

On reconnaît l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ *:*

$$G = \frac{x^{2n} \times (1 - x^{2n})^2}{x^{2n}-1} = \frac{x^{2n} \times \left(-(x^{2n}-1)\right)^2}{x^{2n}-1} = \frac{x^{2n} \times (-1)^2 \times (x^{2n}-1)^2}{x^{2n}-1}$$

Finalement : $G = x^{2n} \times (x^{2n}-1)$.

> *On retiendra que si* $a, b \in \mathbb{R}$, *alors :* $a - b = -(b-a)$ *et* $(a-b)^2 = (b-a)^2$.

— *En reconnaissant l'identité remarquable* $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, *on a :*

$$H = \frac{x^{2n}-1}{x^n - 1} = \frac{(x^n)^2 - 1^2}{x^n-1} = \frac{(x^n-1)(x^n+1)}{x^n-1} = x^n + 1$$

Solution de 14.

— *L'ensemble de validité de* (E_1) *est* $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, *puisque les dénominateurs doivent être non nuls.*
Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$. *On a :*

$$(E_1) \iff \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x+1} \iff (x+1)\times(x+1) = x \times x \iff (x+1)^2 = x^2$$

Ainsi :

$$(E_1) \iff x^2 + 2x + 1 = x^2 \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$$

Comme $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$, *l'équation* (E_1) *admet une unique solution :* $-\frac{1}{2}$.

— *L'ensemble de validité de* (E_2) *est* $\mathscr{D} = \mathbb{R}_+^*$, *puisqu'on doit avoir* $x > 0$ *et* $x+1>0$ *et* $x+2>0$ *pour que les logarithmes soient définis.*
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Comme* $t \mapsto \ln(t)$ *est bijective sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on a :*

$$(E_2) \iff \ln\left(x \times (x+1)\right) = \ln(x+2) \iff x \times (x+1) = x+2$$

Ainsi :

$$(E_2) \iff x^2 + x = x + 2 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Comme $\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*$ *et* $-\sqrt{2} \notin \mathbb{R}_+^*$, *l'équation* (E_2) *admet une unique solution :* $\sqrt{2}$.

— *L'ensemble de validité de* (E_3) *est* $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $t \mapsto \ln(t)$ *est bijective sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on a :*

$$(E_3) \iff 2e^{-x} = e^{-2x} \iff \ln(2e^{-x}) = \ln(e^{-2x})$$

Avec les propriétés du logarithme, il vient :

$$(E_3) \iff \ln(2) + \ln(e^{-x}) = \ln(e^{-2x}) \iff \ln(2) - x = -2x$$

Finalement :

$$(E_3) \iff -x + 2x = -\ln(2) \iff x = -\ln(2)$$

Ainsi l'équation (E_3) *admet une unique solution :* $-\ln(2)$.

Solution de 15.

Dans cet exercice, l'ensemble de validité des équations est $\mathbb{R}$.

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a d'après le rappel :*

$$(x+2)^2 = 1 \iff x+2 = 1 \text{ ou } x+2 = -1 \iff x = -1 \text{ ou } x = -3$$

Ainsi l'équation $(x+2)^2 = 1$ *admet deux solutions :* -1 *et* -3.

Remarque : on pouvait aussi développer, passer tout du même côté et factoriser, mais c'est maladroit ; on pouvait aussi tout mettre du même côté et utiliser une identité remarquable, mais c'est aussi un peu plus long.

2. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $t \mapsto t^3$ *est bijective sur* $\mathbb{R}$, *on a :*

$$(x+2)^3 = 1 \iff (x+2)^3 = 1^3 \iff x+2 = 1 \iff x = -1$$

Ainsi l'équation $(x+2)^3 = 1$ *admet une unique solution :* -1.

3. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$x^5 - 4x = 0 \iff x \times (x^4 - 4) = 0 \iff x \times \left((x^2)^2 - 2^2\right) = 0$$

On peut factoriser avec l'identité remarquable :

$$x^5 - 4x = 0 \iff x \times \left(x^2-2\right) \times \left(x^2+2\right) = 0$$

Comme un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, il vient :

$$x^5 - 4x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^2 = 2 \text{ ou } x^2 = -2$$

Il n'est pas possible d'avoir $x^2 = -2$. *Finalement :*

$$x^5 - 4x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Ainsi l'équation $x^5 - 4x = 0$ *admet trois solutions :* 0, $\sqrt{2}$ *et* $-\sqrt{2}$.

4. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *On a :*

$$x^5 + 4x = 0 \iff x \times (x^4 + 4) = 0$$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^4 \geqslant 0$, *donc :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^4 + 4 > 0$.
Le facteur $x^4 + 4$ *étant non nul, il vient :*

$$x^5 + 4x = 0 \iff x = 0$$

Ainsi l'équation $x^5 + 4x = 0$ *admet une unique solution :* 0.

Solution de 16.

1. *On a :* $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x > 0$, *donc :* $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x + 1 \neq 0$.
L'ensemble de validité de l'équation est $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. *On a :*
$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1}{2} \iff (e^x-1)\times 2 = 1\times(e^x+1) \iff 2e^x - 2 = e^x + 1$$
On met les termes en e^x *d'un côté et les termes constants de l'autre :*
$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1}{2} \iff 2e^x - e^x = 1+2 \iff e^x = 3$$
Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ *est bijective sur* $\mathbb{R}_+^*$, *il vient enfin :*
$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1}{2} \iff \ln(e^x) = \ln(3) \iff x = \ln(3)$$
Ainsi l'équation $\frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1}{2}$ *admet une unique solution :* $\ln(3)$.

2. *L'équation* $\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) = 3$ *est bien définie si et seulement si* $x > 0$ *et* $2x > 0$ *et* $3x > 0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On a :*
$$\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) = 3 \iff \ln\big(x\times 2x\times 4x\big) = 3 \iff \ln(8x^3) = 3$$
Comme la fonction $t \mapsto e^t$ *est bijective sur* $\mathbb{R}$, *on obtient :*
$$\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) = 3 \iff e^{\ln(8x^3)} = e^3 \iff 8x^3 = e^3 \iff x^3 = \frac{e^3}{2^3}$$
Comme la fonction $t \mapsto t^3$ *est bijective sur* $\mathbb{R}$, *il vient enfin :*
$$\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) = 3 \iff x^3 = \left(\frac{e}{2}\right)^3 \iff x = \frac{e}{2}$$
On vérifie que $\frac{e}{2} \in \mathbb{R}_+^*$.
Ainsi l'équation $\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) = 3$ *admet une unique solution :* $\frac{e}{2}$.

3. *L'équation* $\sqrt{2x-1} = x$ *est bien définie si et seulement si* $2x-1 \geqslant 0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x \geqslant \frac{1}{2}$.
Soit $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$. *Comme* $t \mapsto t^2$ *est bijective sur* $\mathbb{R}_+$, *on a :*
$$\sqrt{2x-1} = x \iff \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = x^2 \iff 2x-1 = x^2 \iff x^2-2x+1 = 0$$
En reconnaissant une identité remarquable, il vient :
$$\sqrt{2x-1} = x \iff (x-1)^2 = 0 \iff x-1 = 0 \iff x = 1$$
Comme $1 \in [\frac{1}{2}, +\infty[$, *l'équation* $\sqrt{2x-1} = x$ *admet une unique solution :* 1.

4. *L'équation* $\sqrt{\ln(x)} = \big(\ln(x)\big)^2$ *a un sens si et seulement si* $x > 0$ *et* $\ln(x) \geqslant 0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x \geqslant 1$.
Soit $x \in [1, +\infty[$. *Comme* $t \mapsto t^2$ *est bijective sur* $\mathbb{R}_+$, *on a :*
$$\sqrt{\ln(x)} = \big(\ln(x)\big)^2 \iff \left(\sqrt{\ln(x)}\right)^2 = \Big(\big(\ln(x)\big)^2\Big)^2 \iff \ln(x) = \big(\ln(x)\big)^4$$
On ramène tout à gauche et on factorise :
$$\sqrt{\ln(x)} = \big(\ln(x)\big)^2 \iff \ln(x) - \big(\ln(x)\big)^4 = 0 \iff \ln(x)\times\Big(1-\big(\ln(x)\big)^3\Big) = 0$$
Comme un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, on obtient :
$$\sqrt{\ln(x)} = \big(\ln(x)\big)^2 \iff \ln(x) = 0 \ ou\ 1-\big(\ln(x)\big)^3 = 0$$
Autrement dit :
$$\sqrt{\ln(x)} = \big(\ln(x)\big)^2 \iff x = 1 \ ou\ \big(\ln(x)\big)^3 = 1^3$$
Comme la fonction $t \mapsto t^3$ *est bijective sur* $\mathbb{R}$, *on a finalement :*
$$\sqrt{\ln(x)} = \big(\ln(x)\big)^2 \iff x = 1 \ ou\ \ln(x) = 1 \iff x = 1 \ ou\ x = e$$
On vérifie que $1 \in [1, +\infty[$ *et* $e \in [1, +\infty[$.
Ainsi l'équation $\sqrt{\ln(x)} = \big(\ln(x)\big)^2$ *admet deux solutions :* 1 *et* e.

Solution de 17.

— *L'ensemble de validité de* (I_1) *est* $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{-1, 0\}$, *puisque les dénominateurs doivent être non nuls.*
Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$. *Il ne faut surtout pas multiplier par x et par* $x+1$ *dans l'inégalité, puisque les signes de x et de* $x+1$ *ne sont pas connus! La bonne méthode consiste à tout mettre à gauche puis à réduire au même dénominateur :*
$$(I_1) \iff \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} \leqslant 0 \iff \frac{(x+1)\times(x+1) - x\times x}{x\times(x+1)} \leqslant 0$$
Ainsi :
$$(I_1) \iff \frac{(x+1)^2 - x^2}{x(x+1)} \leqslant 0 \iff \frac{2x+1}{x(x+1)} \leqslant 0$$
On s'aide d'un tableau de signes, construit pour x dans l'ensemble de validité $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ *:*

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
x		$-$	$\Vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\Vert$	$+$	
$x+1$		$-$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\Vert$	$+$	
$2x+1$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
$\frac{2x+1}{x(x+1)}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi : $(I_1) \iff \frac{2x+1}{x(x+1)} \leqslant 0 \iff x < -1$ *ou* $-\frac{1}{2} \leqslant x < 0$.
L'inéquation (I_1) *admet donc pour ensemble de solutions :* $]-\infty, -1[\, \cup\, [-\frac{1}{2}, 0[$.

— *L'ensemble de validité de* (I_2) *est* $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $t \mapsto \ln(t)$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on a :*
$$(I_2) \iff 2e^{-x} > e^{-2x} \iff \ln(2e^{-x}) > \ln(e^{-2x})$$
Avec les propriétés du logarithme, il vient :
$$(I_2) \iff \ln(2) + \ln(e^{-x}) > \ln(e^{-2x}) \iff \ln(2) - x > -2x$$
Finalement :
$$(I_2) \iff -x + 2x > -\ln(2) \iff x > -\ln(2)$$
Ainsi l'inéquation (I_2) *admet pour ensemble de solutions :* $]-\ln(2), +\infty[$.

Solution de 18.

1. *L'inéquation* $(x+2)^2 \leqslant 1$ *a un sens pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $t^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant t \leqslant 1$, *on a :*
   $$(x+2)^2 \leqslant 1 \iff -1 \leqslant x+2 \leqslant 1 \iff -3 \leqslant x \leqslant -1$$
   Ainsi l'inéquation $(x+2)^2 \leqslant 1$ *admet pour ensemble de solutions :* $[-3,-1]$.
2. *L'inéquation* $(x+2)^3 \leqslant 1$ *a un sens pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $t \mapsto t^3$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *on a :*
   $$(x+2)^3 \leqslant 1 \iff (x+2)^3 \leqslant 1^3 \iff x+2 \leqslant 1 \iff x \leqslant -1$$
   Ainsi l'inéquation $(x+2)^3 \leqslant 1$ *admet pour ensemble de solutions :* $]-\infty,-1]$.
3. *L'inéquation* $\sqrt{2x-1} > x$ *a un sens si et seulement si* $2x-1 \geqslant 0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x \geqslant \frac{1}{2}$.
   Soit $x \in [\frac{1}{2},+\infty[$. *Comme* $t \mapsto t^2$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$, *on a :*
   $$\sqrt{2x-1} > x \iff \left(\sqrt{2x-1}\right)^2 > x^2 \iff 2x-1 > x^2 \iff 0 > x^2-2x+1$$
   En reconnaissant une identité remarquable, il vient :
   $$\sqrt{2x-1} > x \iff 0 > (x-1)^2$$
   Or un carré est toujours positif, donc cette dernière inégalité n'est jamais vérifiée.
   Ainsi l'inéquation $\sqrt{2x-1} > x$ *n'admet pas de solution.*
4. *Comme dans la question précédente, on a pour* $x \in [\frac{1}{2},+\infty[$ *:*
   $$\sqrt{2x-1} < x \iff 0 < (x-1)^2$$
   Or un carré est toujours positif, donc $(x-1)^2$ *est strictement positif si et seulement si* $(x-1)^2 \neq 0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x \neq 1$.
   Ainsi l'inéquation $\sqrt{2x-1} < x$ *admet pour ensemble de solutions :* $[\frac{1}{2},1[\cup]1,+\infty[$.

Solution de 19.

1. *On a :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, *donc :* $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x+1 > 0$.
   Ainsi l'inéquation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. *Comme* $e^x+1>0$ *et comme* $2>0$, *on peut multiplier par ces quantités dans l'inégalité :*
   $$\frac{e^x-1}{e^x+1} \geqslant \frac{1}{2} \iff (e^x-1)\times 2 \geqslant 1 \times (e^x+1) \iff 2e^x-2 \geqslant e^x+1$$
   On met les termes en e^x *d'un côté et les termes constants de l'autre :*
   $$\frac{e^x-1}{e^x+1} \geqslant \frac{1}{2} \iff 2e^x-e^x \geqslant 1+2 \iff e^x \geqslant 3$$
   Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$, *il vient enfin :*
   $$\frac{e^x-1}{e^x+1} \geqslant \frac{1}{2} \iff \ln(e^x) \geqslant \ln(3) \iff x \geqslant \ln(3)$$
   Ainsi l'inéquation $\frac{e^x-1}{e^x+1} \geqslant \frac{1}{2}$ *admet pour ensemble de solutions :* $[\ln(3),+\infty[$.
2. *L'inéquation* $\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) \leqslant 3$ *a un sens si et seulement si* $x>0$ *et* $2x>0$ *et* $3x>0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x>0$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. *On a :*
   $$\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) \leqslant 3 \iff \ln\left(x \times 2x \times 4x\right) \leqslant 3 \iff \ln(8x^3) \leqslant 3$$
   Comme la fonction $t \mapsto e^t$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *on obtient :*
   $$\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) \leqslant 3 \iff e^{\ln(8x^3)} \leqslant e^3 \iff 8x^3 \leqslant e^3 \iff x^3 \leqslant \frac{e^3}{2^3}$$
   Comme la fonction $t \mapsto t^3$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *il vient enfin :*
   $$\ln(x)+\ln(2x)+\ln(4x) \leqslant 3 \iff x^3 \leqslant \left(\frac{e}{2}\right)^3 \iff x \leqslant \frac{e}{2}$$
   Or, on a pris x *dans* $\mathbb{R}_+^*$ *au départ.*
   Ainsi l'inéquation considérée admet pour ensemble de solutions : $]0,\frac{e}{2}]$.
3. *L'inéquation* $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x}$ *a un sens si et seulement si* $x^2-x \geqslant 0$ *et* $2-x \geqslant 0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x(x-1) \geqslant 0$ *et* $x \leqslant 2$.
   Pour déterminer le signe de $x(x-1)$, *on peut construire un tableau de signes :*

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$x-1$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Il vient : $x(x-1) \geqslant 0 \iff x \leqslant 0$ *ou* $x \geqslant 1$.
   Ainsi l'inéquation $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x}$ *a un sens si et seulement si* $x \in]-\infty,0] \cup [1,2]$.
   Soit $x \in]-\infty,0] \cup [1,2]$. *Comme* $t \mapsto t^2$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$, *on a :*
   $$\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x} \iff \left(\sqrt{x^2-x}\right)^2 > \left(\sqrt{2-x}\right)^2 \iff x^2-x > 2-x$$
   Avec les propriétés de la fonction $t \mapsto t^2$, *il vient :*
   $$\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x} \iff x^2 > 2 \iff x > \sqrt{2} \text{ ou } x < -\sqrt{2}$$
   Or, on a pris x *dans* $]-\infty,0] \cup [1,2]$ *au départ.*
   On rappelle de plus que $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.
   On en déduit que l'inéquation $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x}$ *admet pour ensemble de solutions :*
   $$]-\infty,-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2},2]$$

Solution de 20.

L'équation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ *et on observe que* $x^4 = \left(x^2\right)^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. *On pose* $t = x^2$ *:*
$$-2x^4+3x^2+2=0 \iff -2\left(x^2\right)^2+3x^2+2=0 \iff -2t^2+3t+2=0$$
Discriminant : $\Delta = 3^2-4\times(-2)\times 2 = 9+16 = 25 = 5^2 > 0$.
L'équation $-2t^2+3t+2=0$ *admet donc deux solutions :*
$$t_1 = \frac{-3-5}{2\times(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-3+5}{2\times(-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$
On reprend les équivalences précédentes :
$$-2x^4+3x^2+2=0 \iff -2t^2+3t+2=0 \iff \left(t=2 \text{ ou } t=-\frac{1}{2}\right)$$
Or $t = x^2$ *:*

$$-2x^4+3x^2+2=0 \iff \left(x^2=2 \text{ ou } \underbrace{x^2=-\frac{1}{2}}_{impossible}\right) \iff \left(x=-\sqrt{2} \text{ ou } x=\sqrt{2}\right)$$

Ainsi l'équation $-2x^4+3x^2+2=0$ admet deux solutions : $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

Solution de 21.

1. *L'équation a un sens si et seulement si $x>0$.*
   Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. En posant $t=\ln(x)$, il vient :
   $$2\big(\ln(x)\big)^2-3\ln(x)+1=0 \iff 2t^2-3t+1=0$$
   Après calcul, les solutions de l'équation $2t^2-3t+1=0$ sont : $\frac{1}{2}$ et 1.
   On reprend les équivalences précédentes :
   $$2\big(\ln(x)\big)^2-3\ln(x)+1=0 \iff 2t^2-3t+1=0 \iff \left(t=\frac{1}{2} \text{ ou } t=1\right)$$
   Or que $t=\ln(x)$:
   $$2\big(\ln(x)\big)^2-3\ln(x)+1=0 \iff \left(\ln(x)=\frac{1}{2} \text{ ou } \ln(x)=1\right)$$
   Comme la fonction $t\mapsto e^t$ est bijective sur $\mathbb{R}$, il vient finalement :
   $$2\big(\ln(x)\big)^2-3\ln(x)+1=0 \iff \left(x=e^{1/2} \text{ ou } x=e^1\right)$$
   Les deux solutions obtenues appartiennent bien à $\mathbb{R}_+^*$.
   Ainsi l'équation $2\big(\ln(x)\big)^2-3\ln(x)+1=0$ admet deux solutions : $\sqrt{e}$ et e.

2. *L'équation a un sens, si et seulement si $x>0$ et $x+1>0$, si et seulement si $x>0$ (car dans ce cas on a aussi $x+1>0$).*
   Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction $t\mapsto\ln(t)$ est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :
   $$\ln(x)+\ln(x+1)=0 \iff \ln\big(x\times(x+1)\big)=\ln(1) \iff x\times(x+1)=1$$
   Ainsi :
   $$\ln(x)+\ln(x+1)=0 \iff x^2+x-1=0$$
   Après calcul, l'équation $x^2+x-1=0$ admet deux solutions :
   $$x_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad et \quad x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
   Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Or $\sqrt{5}>\sqrt{4}=2$, donc $x_1<0$ et $x_2>0$.
   On en déduit que l'équation $\ln(x)+\ln(x+1)=0$ admet une unique solution : $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3. *L'équation a un sens pour tout $x\in\mathbb{R}$.*
   Soit $x\in\mathbb{R}$. On a en posant $t=e^x$:
   $$\begin{aligned} e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3=0 &\iff e^{2x}\times e^{\ln(2)}+e^x\times e^{\ln(5)}-3=0\\ &\iff 2(e^x)^2+5e^x-3=0\\ &\iff 2t^2+5t-3=0\end{aligned}$$
   Après calcul, l'équation $2t^2+5t-3=0$ admet deux solutions : -3 et $\frac{1}{2}$.
   On reprend les équivalences précédentes :
   $$\begin{aligned} e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3=0 &\iff 2t^2+5t-3=0\\ &\iff t=-3 \text{ ou } t=\tfrac{1}{2}\\ &\iff \underbrace{e^x=-3}_{impossible} \text{ ou } e^x=\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$
   Comme la fonction $t\mapsto\ln(t)$ est bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient finalement :
   $$e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3=0 \iff x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
   Ainsi l'équation $e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3=0$ admet une unique solution : $-\ln(2)$.

4. *L'équation a un sens pour tout $x\in\mathbb{R}$.*
   Soit $x\in\mathbb{R}$. Comme $e^x\neq0$, on peut multiplier par e^x et on a :
   $$1-2e^x=\frac{e^{-x}}{3} \iff e^x\times(1-2e^x)=e^x\times\frac{e^{-x}}{3} \iff e^x-2(e^x)^2=\frac{1}{3}$$
   En posant $t=e^x$, il vient :
   $$1-2e^x=\frac{e^{-x}}{3} \iff -2t^2+t-\frac{1}{3}=0$$
   Discriminant : $\Delta=1^2-4\times(-2)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3}<0$.
   On en déduit que l'équation $-2t^2+t-\frac{1}{3}=0$ n'admet pas de solution.
   Ainsi l'équation $1-2e^x=\frac{e^{-x}}{3}$ n'admet pas de solution.

5. *L'équation a un sens si et seulement si $2-x\geqslant0$, c'est-à-dire si et seulement si $x\leqslant2$.*
   Soit $x\in\,]-\infty,2]$.
   On souhaite passer au carré dans l'égalité : pour conserver l'équivalence, il faut pour cela que les deux membres de l'égalité soient de même signe, ici positifs.
   On note d'une part que si $x<0$, alors l'égalité $x=\sqrt{2-x}$ ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif ou nul.
   On suppose donc pour la suite que $x\in[0,2]$.
   Comme la fonction $t\mapsto t^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a :
   $$x=\sqrt{2-x} \iff x^2=\left(\sqrt{2-x}\right)^2 \iff x^2=2-x \iff x^2+x-2=0$$
   Après calcul, l'équation $x^2+x-2=0$ admet deux solutions : -2 et 1.
   Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans $[0,2]$.
   On en déduit que l'équation $x=\sqrt{2-x}$ admet une unique solution : 1.

6. *L'équation a un sens si et seulement si $x\geqslant0$.*
   Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On a :
   $$x-\sqrt{x}=\frac{3}{2} \iff x-\frac{3}{2}=\sqrt{x}$$
   Si $x<\frac{3}{2}$, alors l'égalité $x-\frac{3}{2}=\sqrt{x}$ ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif ou nul.
   On suppose donc pour la suite que $x\in[\frac{3}{2},+\infty[$.
   Comme la fonction $t\mapsto t^2$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$, on a :
   $$x-\sqrt{x}=\frac{3}{2} \iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=(\sqrt{x})^2 \iff x^2-3x+\frac{9}{4}=x$$
   Ainsi :
   $$x-\sqrt{x}=\frac{3}{2} \iff x^2-4x+\frac{9}{4}=0$$

Après calcul, l'équation $x^2 - 4x + \frac{9}{4} = 0$ *admet deux solutions :*

$$x_1 = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2} \quad et \quad x_2 = 2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans $[\frac{3}{2}, +\infty[$.
Or $\sqrt{7} > \sqrt{4} = 2$, *donc* $\frac{\sqrt{7}}{2} > 1$.
Il vient : $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2} < 2 - 1 = 1 < \frac{3}{2}$ *et :* $x_2 = 2 + \frac{\sqrt{7}}{2} > 2 + 1 = 3 \geqslant \frac{3}{2}$.
On en déduit que l'équation $x - \sqrt{x} = \frac{3}{2}$ *admet une unique solution :* $2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Solution de 22.

L'inéquation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ *et on observe que* $x^4 = (x^2)^2$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. *On pose* $t = x^2$ *:*

$$-2x^4 + 3x^2 + 2 \geqslant 0 \iff -2(x^2)^2 + 3x^2 + 2 \geqslant 0 \iff -2t^2 + 3t + 2 \geqslant 0$$

Discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0$.
Le polynôme $t \mapsto -2t^2 + 3t + 2$ *admet donc deux racines :*

$$t_1 = \frac{-3-5}{2 \times (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \quad et \quad t_2 = \frac{-3+5}{2 \times (-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Comme $a = -2 < 0$, *on obtient le tableau de signes suivant :*

t	$-\infty$		$-1/2$		2		$+\infty$
$-2t^2+3t+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On reprend les équivalences précédentes :

$$-2x^4 + 3x^2 + 2 \geqslant 0 \iff -2t^2 + 3t + 2 \geqslant 0 \iff -\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 2$$

Or $t = x^2$ *:*

$$-2x^4 + 3x^2 + 2 \geqslant 0 \iff -\frac{1}{2} \leqslant x^2 \leqslant 2 \iff x^2 \leqslant 2 \iff -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$$

On a pu supprimer l'inégalité $-\frac{1}{2} \leqslant x^2$ *puisqu'elle est toujours vraie.*
Ainsi l'inéquation $-2x^4 + 3x^2 + 2 \geqslant 0$ *admet pour ensemble de solutions :* $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Solution de 23.

1. *L'inéquation a un sens si et seulement si* $x > 0$.
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. *En posant* $t = \ln(x)$, *il vient :*

$$2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 1 > 0 \iff 2t^2 - 3t + 1 > 0$$

   Après calcul, le signe du polynôme $t \mapsto 2t^2 - 3t + 1$ *est donné par :*

t	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$2t^2-3t+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On reprend les équivalences précédentes :

$$2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 1 > 0 \iff 2t^2 - 3t + 1 > 0 \iff \left(t < \frac{1}{2} \ ou \ t > 1\right)$$

   Or $t = \ln(x)$ *:*

$$2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 1 > 0 \iff \left(\ln(x) < \frac{1}{2} \ ou \ \ln(x) > 1\right)$$

   Comme la fonction $t \mapsto e^t$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$, *il vient finalement :*

$$2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 1 > 0 \iff \left(x < e^{1/2} \ ou \ x > e^1\right)$$

   On rappelle que les solutions de l'inéquation sont à chercher dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Ainsi l'inéquation $2\big(\ln(x)\big)^2 - 3\ln(x) + 1 > 0$ *admet pour ensemble de solutions :*

$$]0, \sqrt{e}[\cup]e, +\infty[$$

2. *L'inéquation a un sens si et seulement si* $x > 0$ *(dans ce cas on a aussi* $x + 1 > 0$*).*
   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Comme la fonction* $t \mapsto \ln(t)$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$, *on a :*

$$\ln(x) + \ln(x+1) \leqslant 0 \iff \ln\big(x \times (x+1)\big) \leqslant \ln(1) \iff x \times (x+1) \leqslant 1$$

   Ainsi :

$$\ln(x) + \ln(x+1) \leqslant 0 \iff x^2 + x - 1 \leqslant 0$$

   Après calcul, le signe du polynôme $x \mapsto x^2 + x - 1$ *est donné par :*

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On reprend les équivalences précédentes :

$$\ln(x) + \ln(x+1) \leqslant 0 \iff x^2 + x - 1 \leqslant 0 \iff \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

   On rappelle que les solutions de l'inéquation sont à chercher dans $\mathbb{R}_+^*$.
   Or $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, *donc :* $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ *et* $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$.
   Ainsi l'inéquation $\ln(x) + \ln(x+1) \leqslant 0$ *admet pour ensemble de solutions :* $]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$.

3. *L'inéquation a un sens pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. *On a en posant* $t = e^x$ *:*

$$\begin{aligned} e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 > 0 &\iff e^{2x} \times e^{\ln(2)} + e^x \times e^{\ln(5)} - 3 > 0 \\ &\iff 2(e^x)^2 + 5e^x - 3 > 0 \\ &\iff 2t^2 + 5t - 3 > 0 \end{aligned}$$

   Après calcul, le signe du polynôme $t \mapsto 2t^2 + 5t - 3$ *est donné par :*

t	$-\infty$		-3		$1/2$		$+\infty$
$2t^2+5t-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   On reprend les équivalences précédentes :

$$e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 > 0 \iff 2t^2 + 5t - 3 > 0 \iff \left(t < -3 \ ou \ t > \frac{1}{2}\right)$$

   Or que $t = e^x$ *:*

$$e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 > 0 \iff \left(\underbrace{e^x < -3}_{impossible} \ ou \ e^x > \frac{1}{2}\right) \iff e^x > \frac{1}{2}$$

   Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$, *il vient finalement :*

$$e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3>0 \iff x>\ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ainsi l'inéquation $e^{2x+\ln(2)}+e^{x+\ln(5)}-3>0$ *admet pour ensemble de solutions :*

$$]-\ln(2),+\infty[$$

4. *L'inéquation a un sens pour tout* $x\in\mathbb{R}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$. *Comme* $e^x>0$, *on peut multiplier par* e^x *et on a :*
$$1-2e^x \geqslant \frac{e^{-x}}{3} \iff e^x\times(1-2e^x)\geqslant e^x\times\frac{e^{-x}}{3} \iff e^x-2(e^x)^2\geqslant\frac{1}{3}$$
En posant $t=e^x$, *il vient :*
$$1-2e^x\geqslant\frac{e^{-x}}{3} \iff -2t^2+t-\frac{1}{3}\geqslant 0$$
Discriminant : $\Delta=1^2-4\times(-2)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{8}{3}=-\frac{5}{3}<0$.
On en déduit que le polynôme $t\mapsto -2t^2+t-\frac{1}{3}$ *n'admet pas de racine.*
Comme $a=-2<0$, *on a alors :* $\forall\, t\in\mathbb{R},\ -2t^2+t-\frac{1}{3}<0$.
Ainsi l'inéquation $1-2e^x\geqslant\frac{e^{-x}}{3}$ *n'admet pas de solution.*

5. *L'inéquation a un sens si et seulement si* $2-x\geqslant 0$, *c'est-à-dire si et seulement si* $x\leqslant 2$.
Soit $x\in\,]-\infty,2]$.
On souhaite passer au carré dans l'inégalité : il faut pour cela que les deux membres de l'inégalité soient de même signe, ici positifs.
On note d'une part que si $x<0$, *alors l'inégalité* $x>\sqrt{2-x}$ *ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif.*
On suppose donc pour la suite que $x\in[0,2]$.
Comme la fonction $t\mapsto t^2$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$, *on a :*
$$x>\sqrt{2-x} \iff x^2>\left(\sqrt{2-x}\right)^2 \iff x^2>2-x \iff x^2+x-2>0$$
Après calcul, le signe du polynôme $x\mapsto x^2+x-2$ *est donné par :*

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On reprend les équivalences précédentes :
$$x>\sqrt{2-x} \iff x^2+x-2>0 \iff (x<-2 \text{ ou } x>1)$$
On rappelle que les solutions de l'inéquation sont à chercher dans $[0,2]$.
Ainsi l'inéquation $x>\sqrt{2-x}$ *admet pour ensemble de solutions :* $]1,2]$.

6. *L'équation a un sens si et seulement si* $x\geqslant 0$.
Soit $x\in\mathbb{R}_+$. *On a :*
$$x-\sqrt{x}=\frac{3}{2} \iff x-\frac{3}{2}=\sqrt{x}$$
Si $x<\frac{3}{2}$, *alors l'égalité* $x-\frac{3}{2}=\sqrt{x}$ *ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif.*
On suppose donc pour la suite que $x\in[\frac{3}{2},+\infty[$.
Comme la fonction $t\mapsto t^2$ *est bijective sur* $\mathbb{R}_+$, *on a :*
$$x-\sqrt{x}=\frac{3}{2} \iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x}\right)^2 \iff x^2-3x+\frac{9}{4}=x$$
Ainsi :
$$x-\sqrt{x}=\frac{3}{2} \iff x^2-4x+\frac{9}{4}=0$$
Après calcul, l'équation $x^2-4x+\frac{9}{4}=0$ *admet deux solutions :*
$$x_1=2-\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \textit{et} \quad x_2=2+\frac{\sqrt{7}}{2}$$
Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans $[\frac{3}{2},+\infty[$.
Or $\sqrt{7}>\sqrt{4}=2$, *donc* $\frac{\sqrt{7}}{2}>1$.
Il vient : $x_1=2-\frac{\sqrt{7}}{2}<2-1=1<\frac{3}{2}$ *et :* $x_2=2+\frac{\sqrt{7}}{2}>2+1=3\geqslant\frac{3}{2}$.
On en déduit que l'équation $x-\sqrt{x}=\frac{3}{2}$ *admet une unique solution :* $2+\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Solution de 24.

1. $x\mapsto 2x^2-2$ *et* $x\mapsto 5x-1$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}\setminus\{1/5\}$ *(polynômes) et le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble, donc par quotient,* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}\setminus\{1/5\}$ *et on calcule :*
$$\forall\, x\in\mathbb{R}\setminus\{1/5\},\quad f'(x)=\cdots=\frac{10x^2-4x+10}{(5x-1)^2}$$
2. $x\mapsto e^x-1$ *et* $x\mapsto 3e^x+5$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *(combinaisons linéaires de fonctions de référence), pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $3e^x+5\neq 0$ *donc par quotient,* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *On calcule :*
$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\cdots=\frac{8e^x}{(3e^x+5)^2}$$
3. $x\mapsto 3x^2+2$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(polynôme) et pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $3x^2+2>0$, $t\mapsto\ln t$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$, *donc par composition* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *On calcule :*
$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\frac{6x}{3x^2+2}$$
4. $x\mapsto 2x+1=t$ *est dérivable (affine) et strictement positif sur* $]-1/2,+\infty[$, $t\mapsto\ln t$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(référence), donc* $x\mapsto\ln(2x+1)$ *est dérivable sur* $]-1/2,+\infty[$ *par composition. Par ailleurs,* $X\mapsto X^5$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(polynôme), donc par composition* f *est dérivable sur* $]-1/2,+\infty[$. *On calcule :*
$$\forall\, x>-1/2,\quad f'(x)=\frac{10}{2x+1}(\ln(2x+1))^4$$
5. $x\mapsto 2x+1=t$ *est dérivable (affine) et strictement positif sur* $]-1/2,+\infty[$, $t\mapsto\sqrt{t}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(référence, attention, ce n'est pas dérivable en* 0*!) donc par composition,* $x\mapsto\sqrt{2x+1}$ *est dérivable sur* $]-1/2,+\infty[$.
Par ailleurs, $X\mapsto e^X$ *est dérivable (référence) sur* $\mathbb{R}$, *donc par composition* f *est dérivable sur* $]-1/2,+\infty[$.
On calcule :
$$\forall\, x>-1/2,\qquad f'(x)=\frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}$$
6. $x\mapsto\frac{2x+1}{x-1}=t$ *est dérivable et strictement positif sur* $]-\infty,-1/2[\cup]1,+\infty[$ *(quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas et tableau de signes) et* $t\mapsto\ln t$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(référence) donc par composition* f *est dérivable sur* $]-\infty,-1/2[\cup]1,+\infty[$.
On calcule alors pour tout $x\in]1,+\infty[$ *:*
$f(x)=\ln(2x+1)-\ln(x-1)$ *ce qui permet de calculer simplement la dérivée :*
$$f'(x)=\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x-1}=\cdots=\frac{-3}{(2x+1)(x-1)}$$
Pour tout $x\in]-\infty,-1/2[$, *on écrit* $f(x)=\ln(-(2x+1))-\ln(-(x-1))$ *ce qui permet de calculer simplement la dérivée :*
$$f'(x)=\frac{-2}{-(2x+1)}-\frac{-1}{-(x-1)}=\cdots=\frac{-3}{(2x+1)(x-1)}$$
(expressions identiques)

7. *$x \mapsto x^2 + \ln x = t$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme de fonctions de référence, $t \mapsto \sin t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (référence) donc par composition f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On calcule :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = (2x + 1/x)\cos(x^2 + \ln x)$$

8. *$x \mapsto 3x+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme) donc sur D l'ensemble des réels tels que $3x+1$ ne soit pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.*
$t \mapsto \tan t$ est dérivable sur l'ensemble des réels qui ne sont pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.
Ainsi par composition f est dérivable sur D.
On calcule alors :

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{3}{\cos^2(3x+1)}$$

9. *Si D est l'ensemble des réels tels que $\sin x \neq -1$ alors une étude détaillée montre que f est dérivable sur D (le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).*
On calcule :

$$\forall x \in D, \qquad f'(x) = \frac{\frac{-\cos(x)}{1+\sin x}(x^2+x+1) - (2x+1)\ln(1+\sin x)}{(x^2+x+1)^2}$$

Solution de 25.

On note D_1 l'ensemble de définition et D_2 l'ensemble de dérivabilité. Le lecteur est invité à rédiger de façon détaillée les justifications de ce ces résultats.

1. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}_+^*$, $\quad f'(x) = \dfrac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$
2. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}_+^*$, $\quad f'(x) = 2\alpha(1+2x)^{\alpha-1}\ln 3x + \dfrac{(1+2x)^\alpha}{x}$
3. $D_1 = [-1,1]$, $D_2 =]-1,1[$, $\quad f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$
4. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2}$
5. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = 2\alpha x(x^2+1)^{\alpha-1}$
6. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}_+^*$, $\quad f'(x) = (\ln x + 1)x^x$
7. $D_1 = D_2 =]-1,+\infty[$, $\quad f'(x) = (2x\ln(1+x) + \dfrac{x^2}{1+x})(1+x)^{x^2}$
8. $D_1 = D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\quad f'(x) = \dfrac{10x-2}{(x+1)^3}$
9. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{-20x^3+4x}{(x^2+1)^4}$
10. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}_+^*$, $\quad f'(x) = (\dfrac{\ln(3x+1)}{x} + \dfrac{3\ln x}{3x+1})(3x+1)^{\ln x}$
11. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1}$
12. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
13. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{-2\sin x\cos x}{\cos^2 x + 1}$
14. $D_1 = D_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]k\pi, \pi/2 + k\pi[$, $\quad f'(x) = \dfrac{1+\tan^2 x}{\tan x} = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$
15. $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
16. $D_1 = \mathbb{R}_+$, $D_2 = \mathbb{R}_+^*$, $\quad f'(x) = \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$

Solution de 26.

CC signifie «croissances comparées» et TA signifie «taux d'accroissement».

1. *Sans indétermination :* $+\infty$.
2. *Sans indétermination :* $+\infty$ *et* 2.
3. *On factorise numérateur et dénominateur par «le terme le plus fort» :* $-\infty$.
4. *On factorise numérateur et dénominateur par «le terme le plus fort» :* $+\infty$.
5. *On factorise numérateur et dénominateur par «le terme le plus fort» :* $-\infty$.
6. *On factorise numérateur et dénominateur par «le terme le plus fort» :* 2.
7. *On simplifie :*

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1} \begin{cases} \xrightarrow[x\to1^+]{} +\infty \\ \xrightarrow[x\to1^-]{} -\infty \end{cases}$$

8. *On simplifie :*

$$\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x^2-1}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x} \begin{cases} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty \\ \xrightarrow[x\to0^-]{} -\infty \end{cases}$$

9. *On factorise par les termes «les plus forts» :*

$$\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2}\sqrt{1+1/x^2}}{x^2+\sqrt{x^2}\sqrt{1+1/x^2}} \underset{\sqrt{x^2}=|x|=_{x\geqslant0}x}{=} \frac{x+x\sqrt{1+1/x^2}}{x^2+x\sqrt{1+1/x^2}} = \frac{x}{x^2} \times \frac{1+\sqrt{1+1/x^2}}{1+\frac{1}{x}\sqrt{1+1/x^2}}$$
$$= \frac{1}{x} \times \frac{1+\sqrt{1+1/x^2}}{1+\frac{1}{x}\sqrt{1+1/x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

10. *On factorise par le terme «le plus fort» :*

$$\frac{1}{x}(\sqrt{x+1}-x-1) = \frac{1}{x}(\sqrt{x}\sqrt{1+1/x}-x-1) = \frac{\sqrt{x}}{x} - 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$$

11. *Par CC. et différence :* 0.
12. *On factorise par «le terme le plus fort» :* $e^x - x = e^x(1-xe^{-x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *puisque par CC,* $xe^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
13. *On développe et par CC. :* 0.
14. *On factorise par le terme «le plus fort» :* $\dfrac{e^x}{3x+2} = \dfrac{e^x}{x}(3+2/x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
15. *On factorise par le terme «le plus fort» :* e^{2x} *au voisinage de* $+\infty$, *et* $e^{-x/2}$ *au voisinage de* $-\infty$, *et on trouve les limites* $+\infty$ *en* $+\infty$ *et* $+\infty$ *en* $-\infty$.
16. *On factorise par le terme «le plus fort» et on utilise les C.C. :*

$$\frac{e^{3x}-e^{x^2}}{\left(\ln^3(x)+x\right)^2} = \frac{e^{x^2}}{x^2} \times \frac{e^{x(3-x)}-1}{\underbrace{\left(\frac{\ln^3(x)}{x}+1\right)^2}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} -1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

17. *Par expression conjuguée :*

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1} = \frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \underset{x-1\geqslant0,\,x+1\geqslant0}{=} \frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

18. $\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} = \dfrac{x^2+1-2}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2})} =$
$\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2}} \xrightarrow[x\to 1]{} \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

19. $\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \dfrac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \sqrt{x}+3 \xrightarrow[x\to 9]{} \boxed{6}$

20. $\sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x^2}{1+x}\right) = x^{1/2}\ln x^2 - x^{1/2}\ln(1+x) = 2\underbrace{x^{1/2}\ln x}_{\to 0\ (\text{C.C.})} - \underbrace{x^{1/2}\ln(1+x)}_{\to 0} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \boxed{0}$

21. $e^{\sqrt{x}} - 2\ln x - x^2 = e^{\sqrt{x}}\left(1 - 2\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}} - \dfrac{(\sqrt{x})^4}{e^{\sqrt{x}}}\right)$

Or $X = \sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, $\dfrac{\ln X}{e^X} = \dfrac{\ln X}{X}\dfrac{X}{e^X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$ *(C.C.) et* $\dfrac{X^4}{e^X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$ *(C.C.) donc par composition puis produit :*
$e^{\sqrt{x}} - 2\ln x - x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{+\infty}$

22. $\dfrac{1-x^2}{x}e^{1/x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \boxed{+\infty}$ *(calcul direct)*
$\dfrac{1-x^2}{x}e^{1/x} = \dfrac{1}{x}e^{1/x} - \underbrace{x^2e^{1/x}}_{\to 0}$
Or $X = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$ *et* $Xe^X \xrightarrow[X\to-\infty]{} 0$ *(C.C.) donc par composition puis différence il vient :*
$\dfrac{1-x^2}{x}e^{1/x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} \boxed{0}$

23. $(x-2)\ln\left(x^2-x-2\right) = (x-2)\ln((x-2)(x+1)) = (x-2)\ln(x-2) + \underbrace{(x-2)\ln(x+1)}_{\to 0}$

avec $X = x-2 \xrightarrow[x\to 2^+]{} 0^+$ *et* $X\ln X \xrightarrow[X\to 0^+]{} 0$ *(C.C.). Ainsi, par composition puis somme il vient :* $(x-2)\ln\left(x^2-x-2\right) \xrightarrow[x\to 2^-]{} \boxed{0}$

24. $x^2e^{-e^x} = \dfrac{x^2}{e^x}e^xe^{-e^x}$

avec $\dfrac{x^2}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *(C.C.),* $X = e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *et* $Xe^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$ *(C.C.), donc par composition*
$x^2e^{-e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{0}$

25. $e^{-1/x}\ln x = \dfrac{1}{x}e^{-1/x}x\ln x$
avec $x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ *(C.C.),* $X = 1/x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ *et* $Xe^{-X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$ *donc par composition puis produit il vient*
$e^{-1/x}\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} \boxed{0}$

26. $e^x\ln\left(x^2+x\right) = (x^2+x)e^x\dfrac{\ln(x^2+x)}{x^2+x} = x^2e^x\dfrac{\ln(x^2+x)}{x^2+x} + xe^x\dfrac{\ln(x^2+x)}{x^2+x}$

avec $x^2e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ *(C.C.),* $xe^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ *(C.C.),* $X = x^2+x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ *et* $\dfrac{\ln X}{X} \xrightarrow[X\to+\infty]{} 0$*, donc par composition, produit et somme il vient*
$e^x\ln\left(x^2+x\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \boxed{0}$

27. $\dfrac{\sin(e^x-1)}{x} = \dfrac{\sin(e^x-1)}{e^x-1}\dfrac{e^x-1}{x}$
avec $\dfrac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *(T.A.),* $X = e^x-1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, $\dfrac{\sin X}{X} \xrightarrow[X\to 0]{} 1$ *donc par composition et produit il vient :*
$\dfrac{\sin(e^x-1)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{1}$

Solution de 27.

1. $\dfrac{e^{x^2}}{x+\ln x} = \dfrac{e^{x^2}}{(x^2)^{1/2}} \dfrac{1}{\underbrace{1+\ln x/x}_{\to 1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *(croissances comparées)*
2. $\dfrac{(\ln x)^3+x}{2\sqrt{x}+\frac{1}{x}+2x} = \dfrac{x}{2x}\dfrac{1+(\ln x)^3/x}{\underbrace{\sqrt{x}/x+1/(2x)+1}_{\to 1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ *(croissances comparées)*
3. $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *car* $x\mapsto \sin x$ *est bornée et* $x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
4. $-xe^{\frac{1}{x}} \to -\infty$ *(aucune difficulté!)*
5. *Il faut distinguer* 0^+ *et* 0^-.
$$-xe^{\frac{1}{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty \quad \text{et} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$
(croissances comparées)
6. $\dfrac{e^{x/3}-e^{2x}}{x^5+\ln x+\cos x} = \dfrac{e^{2x}}{x^5}\dfrac{e^{-(5/3)x-1}}{\underbrace{1+\ln x/x^5+\cos x/x^5}_{\to -1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *(croissances comparées)*
7. $\sin x+\cos x$ *est bornée (compris entre* -2 *et* $+2$*) et* $x+\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *donc la limite est* 0.
8. *Idem.*
9. *!!! tend vers* $1-1=0$...
10. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 0$ *donc* $\sqrt{2+x^2}\geqslant\sqrt{2}$ *donc* $\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0^+$ *donc par quotient la limite est* $+\infty$.
11. *On écrit, pour* x *au voisinage de* 1 *(donc* $1-x>0$*) :*
$$\frac{\sqrt{1-x}}{1-x} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}^2} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\geqslant 0}} \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$$
12. *Pour tout* $x\in[0,1[$, $\lfloor x\rfloor=0$ *donc* $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.

    Par ailleurs, pour tout $x\in]-1,0[$, $\lfloor x\rfloor=-1$ *donc* $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$
13. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor \leqslant \dfrac{1}{x} < \left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor+1$ *puis multipliant par* $x>0$ *on a :*
$$x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leqslant 1 \leqslant x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + x$$
donc en échangeant les inégalités (technique classique : $1\leqslant x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+x \Longleftrightarrow 1-x\leqslant x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$ *puis on réutilise à la suite l'inégalité* $x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant 1$ *) il vient :*
$$1-x\leqslant x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant 1$$
et par encadrement, on a : $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$
Si $x<0$, *on obtient l'inégalité :*
$$1-x\geqslant x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\geqslant 1$$
ce qui donne encore : $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$
14. *Pour tout* $x>1$, $0<\frac{1}{x}<1$ *donc* $\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor=0$ *et* $x\left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor=0$ *donc la limite est nulle.*
15. *On a, pour tout* $x\in\mathbb{R}_+$ *:*
$$\lfloor x\rfloor\leqslant x\leqslant\lfloor x\rfloor+1 \Longrightarrow \frac{\lfloor x\rfloor}{x}\leqslant 1\leqslant\frac{\lfloor x\rfloor}{x}+\frac{1}{x}$$
donc en échangeant les inégalités :
$$1-\frac{1}{x}\leqslant\frac{\lfloor x\rfloor}{x}\leqslant 1$$
donc par comparaison : $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

Solution de 28.

1. *On considère la fonction* $f : x\mapsto x\ln x$, *elle est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(par produit) et de dérivée* $f'(x)=\ln x+1$. *Comme* $f(2)=2\ln 2$ *et* $f'(2)=\ln 2+1$ *il vient :* $\boxed{\dfrac{x\ln x-2\ln 2}{x-2} \xrightarrow[x\to 2]{} \ln 2+1}$
2. *On reconnaît une limite usuelle :* $\dfrac{e^X-1}{X} \xrightarrow[X\to 0]{} 1$ *et comme* $X=x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *par composition des limites ont a :* $\boxed{\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1}$
3. *On écrit :* $\boxed{\dfrac{e^{x^2}-1}{x} = x\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0}$
4. *On utilise la formule :* $\cos 2x = 1-2\sin^2 x$ *donc :*
$$\frac{\ln\cos 2x}{\sin^2 x} = 2\frac{\ln(1-2\sin^2 x}{2\sin^2 x}$$
et comme $\dfrac{\ln(1+X)}{X} \xrightarrow[X\to 0]{} 1$ *et que* $X=2\sin^2 x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *par composition des limites il vient :*
$\boxed{\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin^2 x} \xrightarrow[x\to 0]{} -1/2}$
5. *On a* $\dfrac{\ln(1+X)}{X} \xrightarrow[X\to 0]{} 1$ *et* $X=\cos x \xrightarrow[x\to\pi/2]{} 0$ *donc par composition il vient* $\boxed{\dfrac{\ln(1+\cos x)}{\cos x} \xrightarrow[x\to\pi/2]{} 1}$
6. *On décompose pour faire apparaître plusieurs limites connues ou calculables facilement :*
$$\frac{x^a-a^x}{x^4-a^4} = \frac{x^a-a^a+a^a-a^x}{x-a}\frac{x-a}{x^4-a^4} = \left(\frac{x^a-a^a}{x-a} - \frac{e^{x\ln a}-e^{a\ln a}}{x-1}\right)\frac{1}{\frac{x^4-a^4}{x-a}}$$
On considère les fonctions $f : x\mapsto x^a$, $g : x\mapsto e^{x\ln a}$ *et* $h : x\mapsto x^4$, *ces fonctions sont dérivables sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(donc en* a*) et on calcule :*
$$\forall\, x>0,\quad f'(x)=ax^{a-1},\qquad g'(x)=\ln a e^{x\ln a},\qquad h'(x)=4x^3$$
Ainsi en reconnaissant des taux d'accroissements :
$$\boxed{\frac{x^a-a^x}{x^4-a^4} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{a^{a-3}(1-\ln a)}{4}}$$

Solution de 29.

on considère $\varphi : x \mapsto \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$, c'est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$$

et le signe de cette expression, même factorisée, n'est pas évident.
On peut encore dériver (car $x \mapsto \varphi'(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \varphi''(x) = -\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} + \frac{1}{4} \geqslant 0$$

puisque $1 + x \geqslant 1$.
On en déduit le tableau :

x	0		$+\infty$
$\varphi''(x)$		$+$	
φ'	0	$\nearrow$	
$\varphi'(x)$		$+$	
φ	0	$\nearrow$	

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{1+x} \geqslant 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2$.

Solution de 30.

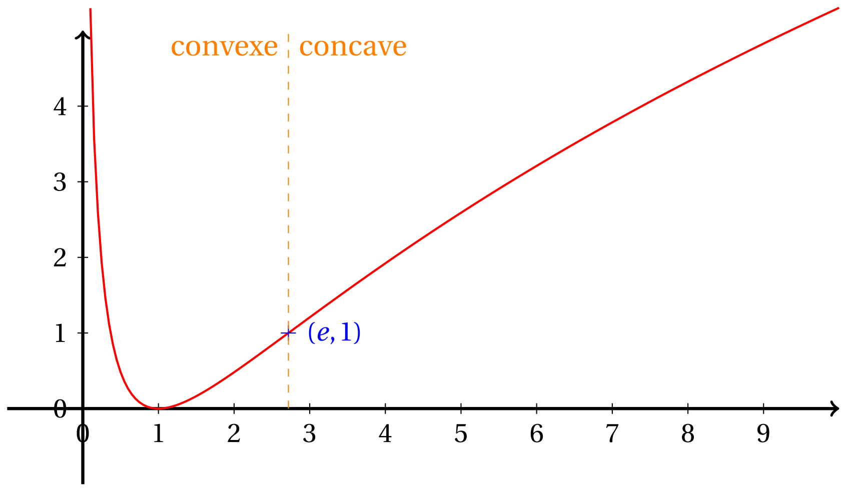
1. *f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (référence et passage au carré), on calcule pour tout $x > 0$:*

$$f'(x) = 2\frac{1}{x}\ln(x) \qquad \text{et} \qquad f''(x) = 2\frac{-1}{x^2}\ln(x) + 2\frac{1}{x^2} = 2\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

ce qui donne le tableau complet :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
f	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$		$+$	0	$-$	
f	‖	convexe			(inflexion)	concave	

Graphe.



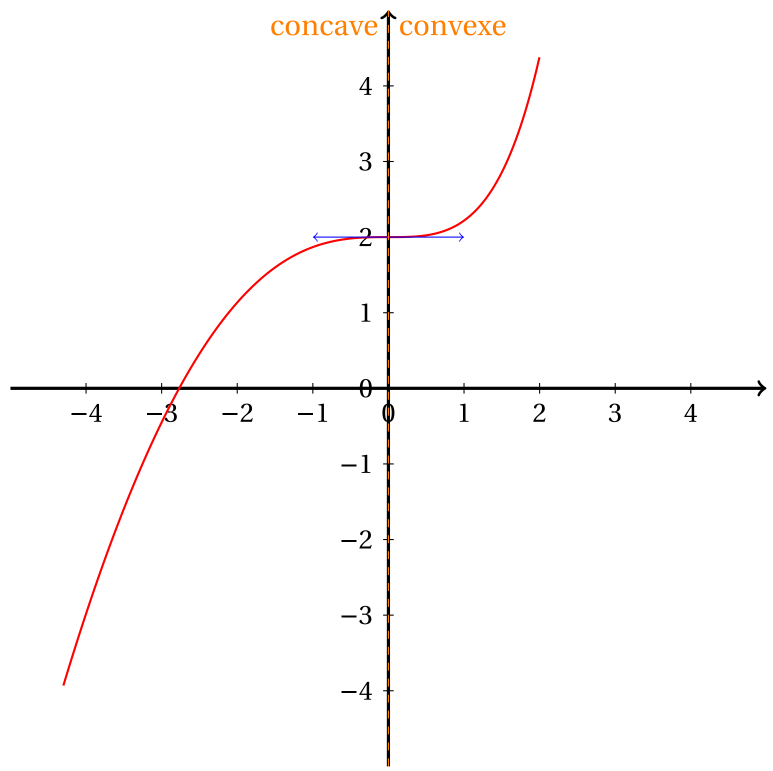
2. *f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ par somme et on calcule pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f'(x) = e^x - x - 1 \qquad \text{et} \qquad f''(x) = e^x - 1$$

ce qui donne le tableau complet :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f'		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
f		concave	(inflexion)	convexe	

Graphe.



Solution de 31.

1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geqslant 1 > 0$ donc* $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$
2. *$\mathbb{R}$ est centré en 0. Par ailleurs :*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \ln(1+(-x)^2) = \ln(1+x^2) = f(x)$$
Donc $\boxed{f \text{ est paire}}$
3. *$x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \ln(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t = 1+x^2 \in \mathbb{R}_+^*$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule alors :*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$
En en déduit les variations (limite en $+\infty$ évidente et argument de parité) :

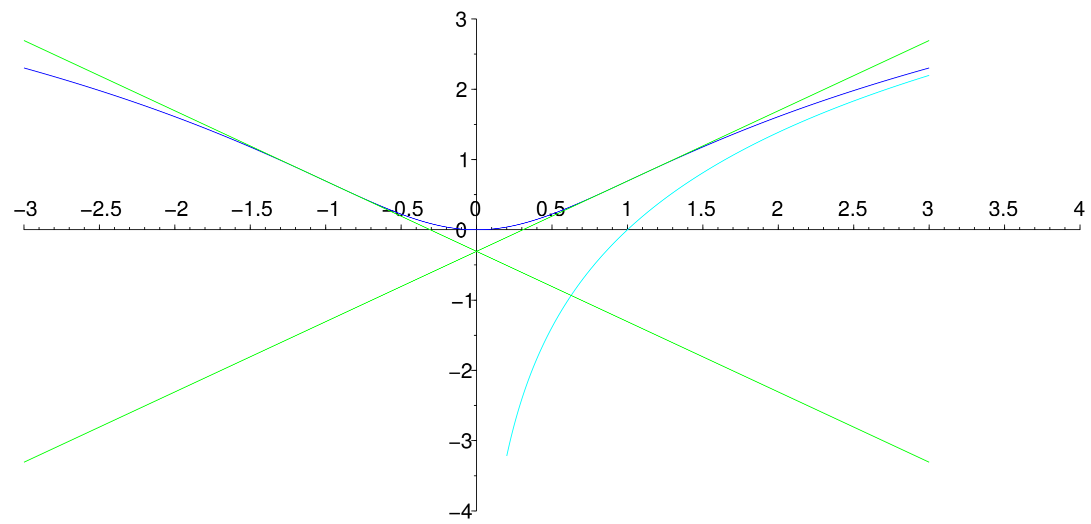
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4. *La fonction f' est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de deux fonctions polynômiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On calcule :*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{2 \times (1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$
On en déduit le tableau complet des variations et de convexité :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$			0			$+$	
f	$+\infty$	↘	$\ln(2)$	↘	0	↗	$\ln(2)$	↗	$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f		concave	|		convexe		|	concave	

$\boxed{\textit{Il y a deux points d'inflexion : } (-1, \ln(2)) \textit{ et } (1, \ln(2))}$

5. *Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x=-1$ a pour équation :*
$$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1) \iff \boxed{y = -x + \ln(2) - 1}$$
L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 1$ a pour équation :
$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \iff \boxed{y = x + \ln(2) - 1}$$
6. *On calcule :*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - 2\ln(x) = \ln(1+x^2) - \ln(x^2) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \geqslant 0$$
car $1 + \frac{1}{x^2} \geqslant 1$ implique, par croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\ln(1+1/x^2) \geqslant \ln(1) = 0$.
Par ailleurs : $f(x) - 2\ln(x) = \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
7. *Pour effectuer ce tracé, on tient compte de la position relative du graphe de f et de celui de $x \mapsto 2\ln(x)$ (qui se trouve en dessous vu le signe trouvé à la question précédente, mais se rapproche de celui de f lorsque x grandit).*
On a :



Solution de 32.

1. *$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$*
2. *Les fonctions $t \mapsto 4t^2 - 1$, $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto -2t$ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par produit $t \mapsto -2t\ln(t)$ est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et par somme $f : t \mapsto 4t^2 - 2t\ln(t) - 1$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.*
On calcule :
$$\boxed{\forall t > 0, \quad f'(t) = 8t - 2\ln(t) - 2 \quad \text{et} \quad f''(t) = 8 - \frac{2}{t}}$$
3. *On étudie le signe de f'' sur $\mathbb{R}_+^*$:*
$$\begin{aligned} f''(t) > 0 &\iff 8 - \frac{2}{t} > 0 \iff 8 > \frac{2}{t} \iff \frac{1}{8} < \frac{t}{2} \qquad (\textit{car } 8 > 0 \textit{ et } \frac{2}{t} > 0) \\ &\iff \frac{1}{4} < t \end{aligned}$$
On étudie aussi les limites de $f'(t)$ en 0 et $+\infty$:
$$f'(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty \quad \textit{et} \quad f'(t) = 8t\left(1 - \frac{1}{4}\underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ par C.C.}} - \underbrace{\frac{2}{t}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

Enfin, $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{4} - 2\ln\left(\frac{1}{4}\right) - 2 = 2\ln\left((2^2\right) = 4\ln 2$ *On a donc le tableau de variations :*

t	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f''(t)$	‖	$-$	0	$+$	
f'	‖ $+\infty$	↘	$4\ln 2$	↗	$+\infty$

4. *D'après le tableau de variations de f' :* $\quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f'(t) \geqslant 4\ln 2 > 0$
   On calcule aussi les limite de $f(t)$ en 0^+ et $+\infty$:

$$f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} -1 \qquad \textit{puisque } t\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \textit{ par croissances comparées}$$

   et

$$f(t) = 4t^2\left(1 - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \text{ par C.C.}} - \underbrace{\frac{1}{4t^2}}_{\xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$

   On obtient le tableau de variations :

t	0		$1/4$		$+\infty$
$f'(t)$	‖	$+$		$+$	
f	‖ -1	↗	$-\frac{3}{4}+\ln(2)$	↗	$+\infty$
$f''(t)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	concave	|	convexe	

   $\boxed{\textit{Le point } (1/4, -3/4+\ln(2)) \textit{ est point d'inflexion du graphe de } f}$

   $\boxed{\textit{Par ailleurs, comme } \ln(2) \approx 0{,}7 \textit{ et } 3/4 = 0{,}75,\ -\frac{3}{4}+\ln(2) < 0}$

5. *L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $1/4$ est, d'après les calculs déjà faits de $f(1/4)$ et $f'(1/4)$:*

$$\boxed{y = 4\ln(2)(x-1/4) - 3/4 + \ln(2) = 4\ln(2)x - 3/4}$$

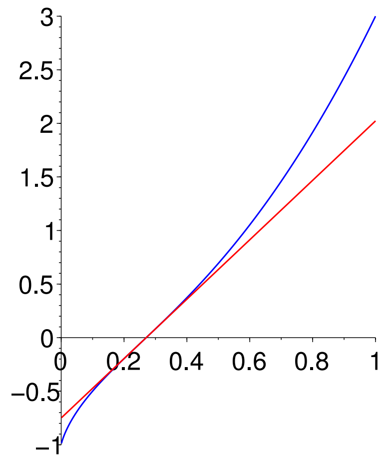
   S'agissant de la tangente en un point d'inflexion, d'après notre étude précédente,
   $\boxed{\mathcal{C}_f \textit{ est en dessous de sa tangente sur }]0,1/4[\textit{ et au dessus sur }]1/4,+\infty[}$

6. (a) *On a vu que* $f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} -1$ *donc* $\boxed{f \textit{ est continue à droite en } 0}$
   (b) *On étudie le taux d'accroissement :*

$$\frac{f(t)-\tilde{f}(0)}{t} = \frac{4t^2 - 2t\ln t - 1 - (-1)}{t} = \frac{4t^2 - 2t\ln t}{t} = 4t - 2\ln t \xrightarrow[t\to 0^+]{} +\infty$$

   Donc $\boxed{f \textit{ n'est pas dérivable en } 0^+}$, $\mathcal{C}_f$ *admet une* $\boxed{\textit{demi-tangente verticale au point d'abscisse } t = 0}$

7. *Tracé :*



8. (a) — *f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (car dérivable)*
   — *f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (déjà vu)*
   — $f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} -1$ *et* $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$
   — $0 \in\ ]-1,+\infty[$.
   d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   (b) *On a* $f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} -1 < 0$ *et* $f(1) = 4 - 2\ln(1) - 1 = 3 > 0$ *donc, puisque* $f(\alpha) = 0$, *par croissance de f, on a* $\boxed{0 < \alpha < 1}$
   (c) *On traduit le fait que $f(\alpha) = 0$ avec la formule définissant f :*

$$f(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow 4\alpha^2 - 2\alpha\ln\alpha - 1 = 0 \Longleftrightarrow 2\alpha - \ln\alpha - \frac{1}{2\alpha} = 0 \qquad (\textit{car } \alpha > 0)$$
$$\Longleftrightarrow \boxed{\ln\alpha = 2\alpha - \frac{1}{2\alpha}}$$

Solution de 33.

1. *Par définition, $g : x \mapsto x^a = e^{a\ln x}$ si bien que l'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}_+^*$.*
   Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est donnée par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g'(x) = ax^{a-1}}$$

2. — *Si $a < 0$, alors* $x^a \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ *donc* $\boxed{h_a(x) = e^{(1-x^a)\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty}$
   — *Si $a > 0$, alors* $x^a \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ *donc* $\boxed{h_a(x) = e^{(1-x^a)\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0}$
   $\boxed{h_a \textit{ est alors prolongeable par continuité en } 0}$
3. *On se place donc dans le cas où $a > 0$ et on note encore (abusivement) h_a la fonction prolongée. On a $h_a(0) = 0$. On étudie donc la dérivabilité de h_a en 0 :*

$$\forall x > 0, \quad \frac{h_a(x) - h_a(0)}{x - 0} = \frac{x^{1-x^a}}{x} = x^{-x^a} = e^{-x^a\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1 \quad \text{(par croissances comparées)}$$

   Donc $\boxed{\textit{le graphe de } h_a \textit{ admet une (demi)-tangente d'équation } y = x \textit{ au point d'abscisse } x = 0}$

4. (a) — *Si* $a<0$, *alors* $x^a \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *donc* $\boxed{h_a(x)=e^{(1-x^a)\ln x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty}$

— *Si* $a>0$, *alors* $x^a \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *donc* $\boxed{h_a(x)=e^{(1-x^a)\ln x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}$

(b) *Pour* $a<0$, *pour tout* $x>0$ *:*

$$g_a(x)=\frac{h_a(x)-x}{x^{a+1}\ln x}=\frac{x^{1-x^a}-x}{x^{a+1}\ln x}=\frac{x^{-x^a}-1}{x^a\ln x}=-\frac{e^{-x^a\ln x}-1}{-x^a\ln x}$$

Or, $x^a\ln x=-\left(\frac{1}{x}\right)^{-a}\ln\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ *(composition et croissance comparées) et* $\frac{e^X-1}{X}\xrightarrow[X\to0]{}1$,

donc par composition $\boxed{g_a(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}-1}$

(c) *D'après la question précédente, il existe* $\varepsilon:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ *avec* $\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ *telle que :*

$$\frac{h_a(x)-x}{x^a\ln x}=-1+\varepsilon(x)$$

(concrètement : $\varepsilon(x)=\frac{h_a(x)-x}{x^a\ln x}+1$*.)*

Ainsi, on a : pour tout $x>0$,

$$h_a(x)-x=-x^a\ln x+\varepsilon(x)x^a\ln x\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

(croissances comparées et composition comme à la question précédente.)

Ainsi $\boxed{\text{la droite d'équation } y=x \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_a}$

5. (a) *On calcule, pour tout* $x>0$ *:*

$$\frac{h_a(x)}{h_b(x)}=\frac{x^{1-x^a}}{x^{1-x^b}}=\boxed{x^{x^b-x^a}}$$

Au passage, on observe que $h_b(x)$ *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}_+^*$ *puisque* $h_b(x)=e^{(1-x^b)\ln x}$.

(b) *Un point commun à* $\mathscr{C}_a$ *et à* $\mathscr{C}_b$ *vérifie* $h_a(x)=h_b(x)$ *c'est-à-dire* $\frac{h_a(x)}{h_b(x)}=1$.

On résout donc :

$$\frac{h_a(x)}{h_b(x)}=1\iff x^{x^b-x^a}=1\iff e^{(x^b-x^a)\ln x}=1\iff(x^b-x^a)\ln x=0$$
$$\iff x^b-x^a=0 \text{ ou } \ln x=0\iff x^b=x^a \text{ ou } x=1\iff e^{b\ln x}=e^{a\ln x}\text{ ou } x=1$$
$$\iff b\ln x=a\ln x\text{ ou } x=1\iff(b-a)\ln x=0\text{ ou } x=1$$
$$\iff\ln x=0\text{ ou } x=1\iff x=1$$

Donc $\boxed{\mathscr{C}_a \text{ et } \mathscr{C}_b \text{ ont un unique point commun qui est } (1,h_a(1))=(1,1)}$

(c) *On a :*

$$\frac{h_a(x)}{h_b(x)}>1\iff e^{(x^b-x^a)\ln x}>1\iff(x^b-x^a)\ln x>0\iff x^a(x^{b-a}-1)\ln x>0$$
$$\iff\underbrace{x^a}_{>0}(e^{(b-a)\ln x}-1)\ln x>0$$

Si $a\geqslant b$, *alors* $e^{(b-a)\ln x}-1$ *est du signe opposé à celui de* $\ln x$, *donc* $\frac{h_a(x)}{h_b(x)}\leqslant1$.

Si $b>a$, *alors* $e^{(b-a)\ln x}-1$ *est du signe de* $\ln x$, *donc* $\frac{h_a(x)}{h_b(x)}>1$ *(inégalité stricte si et seulement si* $x\neq1$ *car* $h_a(1)=h_b(1)$ *d'après la question précédente).*

Ainsi $\boxed{\mathscr{C}_a \text{ est en dessous de } \mathscr{C}_b \text{ si } b>a}$

6. (a) *On a, pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$, $h_a(x)=e^{(1-x^a)\ln x}$. *Or,* $x\mapsto1-x^a$ *et* $x\mapsto\ln x$ *sont dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$, $X\mapsto e^X$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$, $(1-x^a)\ln x\in\mathbb{R}$, *donc par composition*

$\boxed{h_a \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$

On calcule alors :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad h_a'(x)=\left(-ax^{a-1}\ln x+\frac{1-x^a}{x}\right)e^{(1-x^a)\ln x}=\boxed{x^a\frac{-a\ln x+x^{-a}-1}{x}e^{(1-x^a)\ln x}}$$

(b) *Comme pour tout* $x>0$, $x^a>0$ *et* $e^{(1-x^a)\ln x}>0$, $\boxed{h_a'(x) \text{ est du signe de } \phi_a(x)=-a\ln x+x^{-a}-1}$

(c) ϕ_a *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(combinaison linéaire de fonctions dérivables). On calcule :*

$$\forall x>0,\quad\phi_a'(x)=-ax^{-a-1}-a\frac{1}{x}=-a\frac{x^{-a}+1}{x}$$

qui est du signe de $-a$ *(et est non nul).*

— *si* $a>0$, ϕ_a *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et comme* $\phi_a(1)=1^{-a}-a\ln1-1=0$, ϕ_a *est positive sur* $]0,1[$ *et négative sur* $]1,+\infty[$.

— *si* $a<0$, *les variations sont opposées donc le signe est opposé.*

On résume :

— *Si* $a>0$ *:*

x	0		1		$+\infty$
$\phi_a'(x)$		$-$		$-$	
ϕ_a		↘	0	↘	
h_a'		$+$	0	$-$	
h_a	0	↗	1	↘	0

— *Si* $a<0$ *:*

x	0		1		$+\infty$
$\phi_a'(x)$		$+$		$+$	
ϕ_a		↗	0	↗	
h_a'		$-$	0	$+$	
h_a	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

7. *On a, pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$ *fixé :*

$$\forall a\in\mathbb{R}^*,\quad H_x(a)=e^{(1-e^{a\ln x})\ln x}$$

donc H_x *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *par composition (à écrire en détail...) et on calcule (en dérivant par rapport à* a *!!) :*

$$\forall a\in\mathbb{R}^*,\quad H_x'(a)=\left(-\ln xe^{a\ln x}\times\ln x\right)e^{(1-e^{a\ln x})\ln x}=-\underbrace{(\ln x)^2}_{\geqslant0}\underbrace{x^a}_{>0}\underbrace{h_a(x)}_{>0}\leqslant0$$

donc H_x *est décroissante sur* $\mathbb{R}_-^*$ *et sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Si $x=1$, *alors pour tout* $a\in\mathbb{R}^*$, $H_1(a)=1$.

Si $x>1$, *alors*

$$e^{a\ln x}\xrightarrow[a\to+\infty]{}+\infty\quad e^{a\ln x}\xrightarrow[a\to-\infty]{}0\quad e^{a\ln x}\xrightarrow[a\to0]{}1$$

Si $x<1$, *alors*

$$e^{a\ln x}\xrightarrow[a\to+\infty]{}0\quad e^{a\ln x}\xrightarrow[a\to-\infty]{}+\infty\quad e^{a\ln x}\xrightarrow[a\to0]{}1$$

Ceci permet de calculer les limites en $+\infty$, $-\infty$ et 0 de H_x. On donne les tableaux, en dehors du cas $x=1$ où H_1 est constante :

Si $x>1$

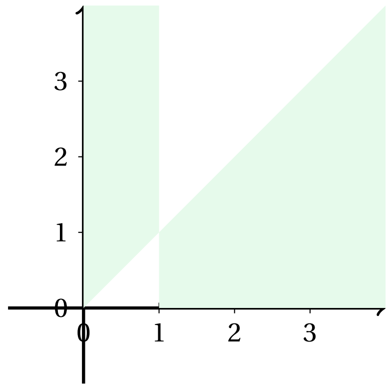
a	$-\infty$	0	$+\infty$
H_x	$x \searrow 1$	‖	$1 \searrow 0$

Si $x<1$

a	$-\infty$	0	$+\infty$
H_x	$+\infty \searrow 1$	‖	$1 \searrow x$

8. *On s'appuie sur les variations de H_x.*
   — *Si $x\in]0,1[$, alors H_x est à valeurs dans $]x,+\infty[$, par théorème des valeurs intermédiaires (H_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$), pour tout $y\in]x,+\infty[$, il existe $a\in\mathbb{R}^*$ tel que $y=H_x(a)=h_a(x)$.*
   — *Si $x=1$, alors pour tout $a\in\mathbb{R}^*$, $h_a(1)=1$.*
   — *Si $x\in]1,+\infty[$, alors H_x est à valeurs dans $]0,x[$, par théorème des valeurs intermédiaires (H_x est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$), pour tout $y\in]0,x[$, il existe $a\in\mathbb{R}^*$ tel que $y=H_x(a)=h_a(x)$.*

   Graphiquement cela correspond aux régions :



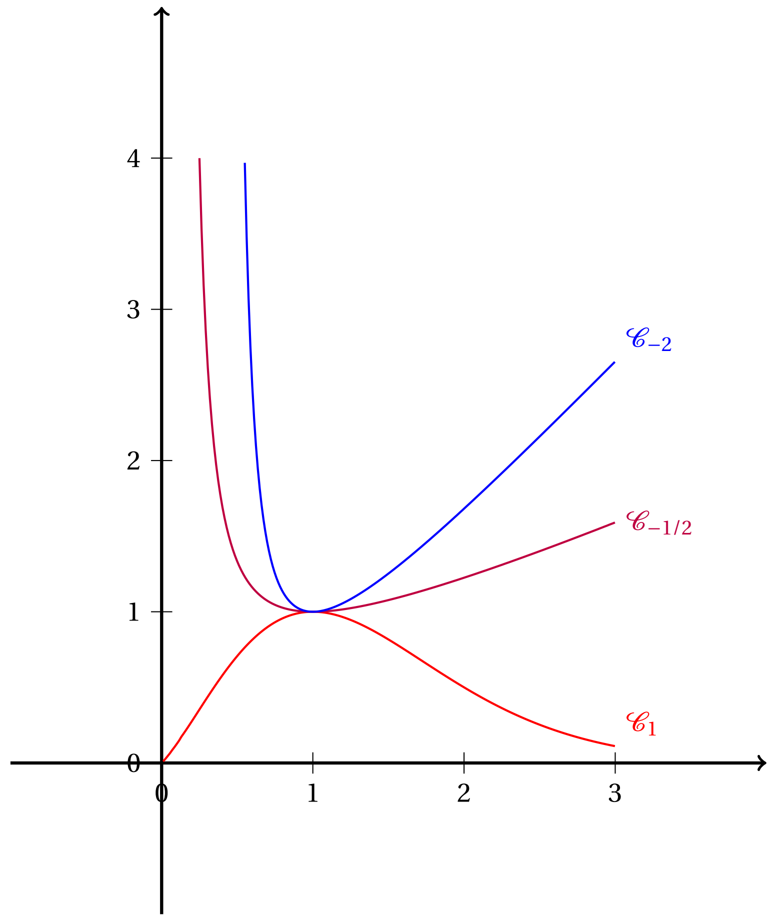
Pour ces couples (x,y) tels que $x\neq 1$, on résout :

$$h_a(x)=y \iff x^{1-x^a}=y \iff (1-x^a)\ln(x)=\ln(y) \underset{\ln(x)\neq 0}{\iff} 1-x^a=\frac{\ln(y)}{\ln(x)} \qquad \iff x^a=1-\frac{\ln(y)}{\ln(x)}$$

Si $x\in]0,1[$, $\ln(x)<0$ et $x<y$ donc $\ln(x)<\ln(y)$, puis $1-\dfrac{\ln(y)}{\ln(x)}>0$; si $x\in]1,+\infty[$, $\ln(x)>0$ et $x>y$ donc $\ln(x)>\ln(y)$, puis $1-\dfrac{\ln(y)}{\ln(x)}>0$; ainsi

$$h_a(x)=y \iff x^a=1-\frac{\ln(y)}{\ln(x)} \iff a\ln(x)=\ln\left(1-\frac{\ln(y)}{\ln(x)}\right) \iff a=\frac{\ln\left(1-\frac{\ln(y)}{\ln(x)}\right)}{\ln(x)}$$

9. *On trace avec les données des questions précédentes :*



Solution de 34.

1. $-6+17\mathrm{i}$
2. $\frac{4+7\mathrm{i}}{13}$
3. $\dfrac{-8+15\mathrm{i}}{18}$
4. $2\mathrm{i}$
5. $2+2\mathrm{i}$
6. $\dfrac{5}{12}\mathrm{i}$
7. $25-312\mathrm{i}$
8. $2(-7+19\mathrm{i})$
9. $1+\mathrm{i}$
10. $\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Solution de 35.

1. $4\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/4}$
2. $2e^{\mathrm{i}\pi}$
3. $2e^{\mathrm{i}\pi/2}$
4. $2e^{-\mathrm{i}\pi/6}$
5. $2\sqrt{3}e^{\mathrm{i}\pi/6}$

Solution de 36.

1. $z_1 = 10e^{-i5\pi/6}$ *donc* $|z_1| = 10$ *et* $\arg(z_1) \equiv -5\pi/6\,[2\pi]$.
2. $z_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{e^{i\pi/3}}{e^{-i\pi/4}}\right)^{188} = 2^{94}e^{i1316\pi/12} = 2^{94}e^{i\frac{\overbrace{24\times 54+20}^{\text{division euclidienne de 1316 par 24}}}{24}\times 2\pi} = 2^{94}e^{i54\times 2\pi}e^{i5\pi/3} = \underbrace{2^{94}}_{>0}e^{i5\pi/3}$.

   Ainsi $|z_2| = 2^{94}$ *et* $\arg(z_2) \equiv 5\pi/3\,[2\pi]$.
3. $z_3 = e^{i\theta}\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(-\theta/2)} = \frac{-1}{\tan(\theta/2)}e^{i\theta}$.

   Ainsi si $\theta \in]-\pi, 0[$, $\tan(\theta/2) < 0$ *donc* $|z_3| = \frac{-1}{\tan(\theta/2)}$ *et* $\arg(z_3) \equiv \theta\,[2\pi]$ *; si* $\theta \in]0,\pi[$, $\tan(\theta/2) > 0$ *donc* $|z_3| = \frac{1}{\tan(\theta/2)}$ *et* $\arg(z_3) \equiv \theta+\pi\,[2\pi]$.
4. $z_4 = \frac{1}{\cos^n(\alpha)}e^{in\alpha}$.

   Comme $\alpha \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\cos^n(\alpha) > 0$ *donc* $|z_4| = \frac{1}{\cos^n(\alpha)}$ *et* $\arg \equiv n\alpha\,[2\pi]$.
5. $z_5 = 2\,\mathrm{Re}\left((1+i)^n\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(2^{n/2}e^{in\pi/4}\right)$.

   Ainsi
   - *si* $n \equiv 0\,[8]$, $|z_5| = 2^{n/2}$ *et* $\arg z_5 \equiv 0\,[2\pi]$
   - *si* $n \equiv \pm 1\,[8]$, $|z_5| = 2^{(n-1)/2}$ *et* $\arg(z_5) \equiv 0\,[2\pi]$
   - *si* $n \equiv \pm 2\,[8]$, $z_5 = 0$
   - *si* $n \equiv \pm 3\,[8]$, $|z_5| = 2^{(n-1)/2}$ *et* $\arg(z_5) \equiv \pi\,[2\pi]$
   - *si* $n \equiv 4\,[8]$, $|z_5| = 2^{n/2}$ *et* $\arg(z_5) \equiv \pi\,[2\pi]$.
6. *On reconnaît* $z_6 = 2\cos(\pi/8) + 2\sin(\pi/8)$ *donc* $|z_6| = 2$ *et* $\arg(z_6) \equiv \pi/8\,[2\pi]$.

Solution de 37.

Méthode : pour calculer z^n avec z un complexe et n un entier, on déterminer le module de z, que l'on note $r > 0$ et on recherche l'argument de z/r en reconnaissant des valeurs particulières de trigonométrie.

1. *Soit* $z = \sqrt{3}+i$. *Alors* $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2+1} = 2$ *puis* $z/2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = e^{i\pi/6}$.

   Finalement :
   $$(\sqrt{3}+i)^{2021} = 2^{2021}e^{i(\pi/6)\times 2021}$$
   Il s'agit de déterminer la valeur $\pi\times 2021/6$ *modulo* 2π. *On écrit :* $\pi\times 2021/6 = 2\pi\times 2021/12$ *et on effectue la division euclidienne de* 2021 *par* 12 *(comme en primaire). On obtient :* $2021 = 12*168+5$ *donc finalement :*
   $$\begin{aligned}(\sqrt{3}+i)^{2021} &= 2^{2021}\underbrace{e^{i2\pi\times 168}}_{=1}\underbrace{e^{i2\pi\times 5/12}}_{e^{i5\pi/6}=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}}\\ &= \boxed{2^{2021}e^{i5\pi/6}} \quad \text{(forme exponentielle)}\\ &= \boxed{-\sqrt{3}\times 2^{2020} + i\times 2^{2020}} \quad \text{(forme algébrique)}\end{aligned}$$
2. *On peut calculer module et argument du dénominateur et du numérateur, puis considérer le quotient de ces complexes sous forme trigonométrique, mais on voit assez vite que les arguments de ces complexes ne sont pas simples à calculer.*

   On va donc d'abord écrire $z = \frac{9+i}{5-4i}$ *sous forme algébrique en multipliant son dénominateur par l'expression conjuguée :*
   $$\frac{9+i}{5-4i} = \frac{(9+i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)} = \frac{(45-4)+i(36+5)}{25+16} = 1+i$$
   On calcule : $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ *puis* $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = e^{i\pi/4}$

   Donc :
   $$\begin{aligned}\left(\frac{9+i}{5-4i}\right)^5 &= (1+i)^5 = \sqrt{2}^5 e^{i\pi/4\times 5}\\ &= \boxed{4\sqrt{2}e^{i5\pi/4}} \quad \text{(forme exponentielle)}\\ &= \boxed{-4-4i} \quad \text{(forme algébrique)}\end{aligned}$$
   (en remarquant que $\cos(5\pi/4) = -1/\sqrt{2}$ *et* $\sin(5\pi/4) = -1/\sqrt{2}$.*)*
3. *Ici c'est le contraire, les modules et arguments des numérateurs et dénominateurs sont plus simples à calculer. Soit on applique la méthode précédente (calculs des modules/arguments), soit on transforme directement les complexes concernés (c'est plus rapide mais nécessite du recul) :*
   $$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}$$
   et
   $$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$
   Ainsi :
   $$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30} = \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{30} = \left(\sqrt{2}e^{i7\pi/12}\right)^{30} = 2^{15}e^{i2\times\pi\times 105/12}$$
   On effectue la division euclidienne de 105 *par* 12 *:* $105 = 8*12+9$

   Ainsi :
   $$\begin{aligned}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30} &= 2^{15}\underbrace{e^{i2\pi\times 8}}_{=1}\underbrace{e^{i2\pi\times 9/12}}_{=e^{i3\pi/2}=-i}\\ &= \boxed{2^{15}e^{i3\pi/2}} \quad \text{(forme exponentielle)}\\ &= \boxed{-i2^{15}} \quad \text{(forme algébrique)}\end{aligned}$$
4. *Ici, c'est plutôt la technique de l'angle moitié qui est attendue :*
   $$1+e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right) = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$$
   Ainsi :
   $$\begin{aligned}(1+e^{i\theta})^n &= \left(2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}\right)^n = 2^n\cos^n(\theta/2)e^{in\theta/2}\\ &= \boxed{2^n\cos^n(\theta/2)\cos(n\theta/2) + i2^n\cos^n(\theta/2)\sin(n\theta/2)} \quad \text{(forme algébrique)}\end{aligned}$$
   On ne donne pas la forme exponentielle car le signe de $2^n\cos^n(\theta/2)$ *dépend de la parité de n et de θ modulo π, la distinction de cas est lourde et peu intéressante.*

Solution de 38.

1. — $AB = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$ — $AC = \begin{pmatrix}1 & -9 & 19\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ — $AD = \begin{pmatrix}1-3i & 9 & -2 & 3+i\\ -1-2i & 6 & 2 & 2-i\end{pmatrix}$
2. — $AB = \begin{pmatrix}7 & 10\\ -3 & -4\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ — $AC = \begin{pmatrix}-7 & 7 & 0 & 9\\ -1 & -2 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$ — $AD = \begin{pmatrix}-2 & -5 & 1\\ 1 & -4 & 4\\ -1 & 4 & -4\end{pmatrix}$

3. — $AB=\begin{pmatrix}-5&-3\\2&2\\0&0\\4&7\end{pmatrix}$ — $AC=\begin{pmatrix}-6\\1\\0\\2\end{pmatrix}$ — $AD=\begin{pmatrix}-2&-6&6&-16&0\\-1&-1&2&3&0\\0&0&0&0&0\\0&1&3&-5&0\end{pmatrix}$

4. (a)

$$AB \text{ impossible} \qquad BA=\begin{pmatrix}5&-4\\-1&2\\23&-16\end{pmatrix}$$

(b)

$$AB=(33) \qquad BA=\begin{pmatrix}-2&1&7\\0&0&0\\-10&5&35\end{pmatrix}$$

(c)

$$AB=\begin{pmatrix}26&3\\3&5\end{pmatrix} \qquad BA=\begin{pmatrix}26&3\\3&5\end{pmatrix}$$

(d)

$$AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \qquad BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

(e)

$$AB=\begin{pmatrix}3&0&8\\0&3&4\\0&0&7\end{pmatrix} \qquad BA=\begin{pmatrix}7&4&-4\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

(f)

$$AB=\begin{pmatrix}3&-3+\mathrm{i}&-1+\mathrm{i}\\-3-\mathrm{i}&6&3+\mathrm{i}\\-1-\mathrm{i}&3-\mathrm{i}&6\end{pmatrix} \qquad BA=\begin{pmatrix}6&-2-\mathrm{i}&1+3\mathrm{i}\\-2+\mathrm{i}&5&-3\mathrm{i}\\1-3\mathrm{i}&3\mathrm{i}&4\end{pmatrix}$$

Solution de 39.

1. *On procède par récurrence. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n$: il existe $a_n\in\mathbb{R}$ tel que $A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\2a_n&1-2a_n&2a_n\\a_n&-a_n&a_n+1\end{pmatrix}$.*
   - *Pour $n=0$, avec $a_0=0$ il vient :*
   $$\begin{pmatrix}1&0&0\\2a_0&1-2a_0&2a_0\\a_0&-a_0&a_0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3=A^0$$
   donc $\mathcal{H}_0$ est démontrée.
   - *Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe $a_n\in\mathbb{R}$ tel que $A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\2a_n&1-2a_n&2a_n\\a_n&-a_n&a_n+1\end{pmatrix}$, ainsi :*
   $$A^{n+1}=A^nA=\begin{pmatrix}1&0&0\\2a_n&1-2a_n&2a_n\\a_n&-a_n&a_n+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\6&-5&6\\a3&-3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-4a_n+6&4a_n-5&-4a_n+6\\-2a_n+3&2a_n-3&-2a_n+4\end{pmatrix}$$
   $$=\begin{pmatrix}1&0&0\\2(-2a_n+3)&1-2(-2a_n+3)&2(-2a_n+3)\\-2a_n+3&-(-2a_n+3)&(-2a_n+3)+1\end{pmatrix}$$
   si bien qu'en posant $a_{n+1}=-2a_n+3\in\mathbb{R}$, on a montré $\mathcal{H}_{n+1}$, ce qui achève la récurrence.
2. *On reconnaît une suite arithmético-géométrique. Le plan d'étude (à connaître) est le suivant :*
   - ▷ *On déterminer le «point fixe» en résolvant :*
   $$c=-2c+3 \iff c=1$$
   - ▷ *On introduit une suite auxiliaire géométrique :*
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases}a_{n+1}=-2a_n+3\\1=-2\times1+3\end{cases} \quad \text{donc} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ (a_{n+1}-1)=-2(a_n-1)$$
   La suite (a_n-1) est géométrique de raison -2, son terme général est donné par :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n-1=(-2)^n(a_0-1)=-(-2)^n$$
   - ▷ *Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=1-(-2)^n$.*
3. *On en déduit finalement*
$$\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\2-(-2)^{n+1}&(-2)^{n+1}-1&2-(-2)^{n+1}\\1-(-2)^n&(-2)^n-1&2-(-2)^n\end{pmatrix}$$

Solution de 40.

On calcule :
$$A^2=\begin{pmatrix}a^2+bc&b(a+d)\\c(a+d)&bc+d^2\end{pmatrix}$$
si bien que
$$A^2-\mathrm{tr}(A)A+\det(A)I_2=\begin{pmatrix}a^2+bc-(a+d)a+ad-bc&b(a+d)-(a+d)b\\c(a+d)-(a+d)c&bc+d^2-(a+d)d+ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

Solution de 41.

1. *On propose $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ et on vérifie que $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.*
2. *On propose $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0&0\\2&-3\end{pmatrix}$, on vérifie que $AB=O_2$ et $AC=O_2$ mais $B\neq C$: on ne peut pas simplifier par A !*
3. *On suppose que $AB=O_2$. On suppose par l'absurde que A est inversible, alors en multipliant l'égalité à gauche par A^{-1} il vient : $A^{-1}AB=A^{-1}O_2$, donc comme $A^{-1}A=I_2$ et que le produit d'une matrice par la matrice nulle est la matrice nulle : $I_2B=O_2$, donc $B=O_2$, ce qui est absurde.*
   On procède de même en supposant par l'absurde B inversible, il s'agit alors de multiplier par B^{-1} à droite.
4. *Puisque $a_0\neq0$ on peut isoler le terme $a_0A^0=a_0I_n$ dans la somme, le passer au second membre et diviser par $-a_0$, ce qui donne :*
$$I_n=-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{d}a_kA^k=A\left(-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{d}a_kA^{k-1}\right)=\left(-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{d}a_kA^{k-1}\right)A$$
où $B=-\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{d}a_kA^{k-1}$ définit bien une matrice puisque pour tout $k\in[\![1,d]\!]$, $k-1\geqslant0$, ce qui donne une combinaison linéaire de puissances entières positives de la matrice A.

On a donc trouvé $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$: la matrice A est inversible d'inverse $B = -\dfrac{1}{a_0}\displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k A^{k-1}$.

5. *On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $A^\top = (\tilde{a}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$, où pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, $\tilde{a}_{i,j} = a_{j,i}$ par définition de la transposée. Par définition du produit matriciel, en notant $AA^\top = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$:*

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\tilde{a}_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}a_{j,k}$$

En particulier si $AA^\top = O_n$ on a

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ 0 = c_{i,i} = \sum_{k=1}^{p} \underbrace{a_{i,k}^2}_{\geqslant 0}$$

Or une somme de réels positifs ou nuls est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls, si bien que l'on a :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \forall\, k \in [\![1,p]\!],\ a_{i,k}^2 = 0 \text{ donc } a_{i,k} = 0$$

Ceci traduit le fait que $A = O_{n,p}$.

6. *On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $\overline{A}^\top = (\tilde{a}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$, où pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!]$, $\tilde{a}_{i,j} = \overline{a}_{j,i}$ par définition de la transconjuguée. Par définition du produit matriciel, en notant $A\overline{A}^\top = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$:*

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\tilde{a}_{k,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\overline{a}_{j,k}$$

En particulier si $A\overline{A}^\top = O_n$ on a

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ 0 = c_{i,i} = \sum_{k=1}^{p} \underbrace{\left|a_{i,k}\right|^2}_{\geqslant 0}$$

Or une somme de réels positifs ou nuls est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls, si bien que l'on a :

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \forall\, k \in [\![1,p]\!],\ \left|a_{i,k}\right|^2 = 0 \text{ donc } a_{i,k} = 0$$

Ceci traduit le fait que $A = O_{n,p}$.