

# Nombres complexes et matrices

## I. Nombres complexes

### 1. Définition

On admet l'existence d'un «nombre» noté  $i$  tel que  $i^2 = -1$ . On définit alors :

#### 📖 Définition (nombres complexes).

L'ensemble  $\mathbb{C}$  des *nombres complexes* est défini par :

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{sachant que } i^2 = -1$$

Si  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , où  $x, y \in \mathbb{R}$ , la *partie réelle* de  $z$ , notée  $\text{Re}(z)$ , est égale à  $x$  et la *partie imaginaire* de  $z$ , notée  $\text{Im}(z)$ , est égale à  $y$ .

$z = x + iy$  est l'*écriture algébrique* du nombre complexe  $z$ .

Si  $y = 0$ , alors  $z$  est réel (ensemble  $\mathbb{R}$ ). Si  $x = 0$ , alors  $z$  est un *imaginaire pur* (ensemble que l'on peut noter  $i\mathbb{R}$ ).

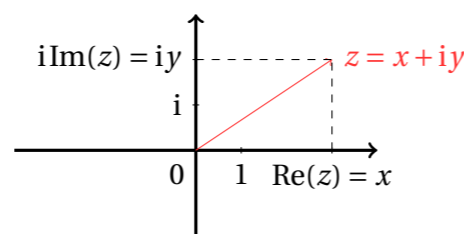
On définit des opérations sur  $\mathbb{C}$  en manipulant les nombres formellement comme vous avez appris à le faire au collège avec les expressions algébriques. Par exemple, si  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  :

$$(a + ib) \times (c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = ac - bd + i(ad + bc)$$

L'ensemble des nombres complexes sera réintroduit de façon un peu plus rigoureuse en sup, mais vous n'aurez accès à une définition «parfaite» qu'au niveau de la L3.

**Interprétation géométrique :** L'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes s'identifie à l'ensemble des points du plan  $\mathbb{R}^2$  muni d'un repère orthonormé direct via la correspondance suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longleftrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z = x + iy &\longleftrightarrow M(x, y) \end{aligned}$$



- $z$  s'appelle l'affixe du point  $M$ .
- $z$  est réel si et seulement si  $M$  se trouve sur l'axe des abscisses.
- $z$  est imaginaire pur si et seulement si  $M$  se trouve sur l'axe des ordonnées.

#### 🚫 Attention.

La notation  $\sqrt{-1}$  a été abandonnée en 1777 lorsqu'Euler introduisit la notation  $i$ . Ainsi, même si vous trouvez dans certains ouvrages la notation  $\sqrt{-1}$ , ou pire encore  $\sqrt{-3}$  par exemple, abstenez vous de l'utiliser ! De façon générale, on attend de vous que vous maîtrisiez les objets que vous manipulez, ainsi vous n'utiliserez le symbole  $\sqrt{\quad}$  qu'avec des **nombres réels positifs ou nuls**.

#### Remarque.

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .
- On note  $\mathbb{C}^*$  l'ensemble des complexes non nuls  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

#### Exemple.

$1 + i \in \mathbb{C}$ , on calcule par exemple  $(1 + i)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times i + i^2 = 2i$ .

Comment inverser un nombre complexe non nul, c'est-à-dire comment obtenir l'écriture algébrique de  $z = a + ib$  où  $a, b \in \mathbb{R}$  ?

On utilise l'*expression conjuguée* :

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 - i^2 b^2} = \frac{a}{\underbrace{a^2 + b^2}_{\in \mathbb{R}}} + i \frac{-b}{\underbrace{a^2 + b^2}_{\in \mathbb{R}}}$$

**Exemple.**

On calcule par exemple :

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}$$

ou encore :

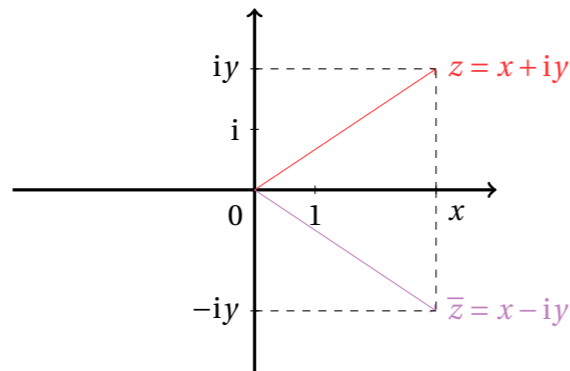
$$\frac{3-i}{2+i} = \frac{(3-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{6-5i+i^2}{2^2+1^2} = 1-i$$

**2. Conjugaison**

**📖 Définition (conjugué d'un complexe).**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  que l'on écrit  $z = x + iy$  où  $x, y \in \mathbb{R}$ . Le *conjugué* de  $z$  est  $\bar{z} = x - iy$ .

**Interprétation géométrique :** La conjugaison complexe est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



**🎓 Proposition (propriétés des conjugués).**

- (i)  $\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$  et  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- (ii)  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  et  $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- (iii)  $\forall z \in \mathbb{C}^*, \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$
- (iv)  $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{\bar{z}} = z$

**Exemple.**

$$\overline{2-5i} = 2+5i \quad \overline{\left(\frac{3+2i}{1-i}\right)} = \frac{3-2i}{1+i}$$

**3. Module**

**📖 Définition (module d'un complexe).**

Soit  $z \in \mathbb{C}$  que l'on écrit  $z = x + iy$  où  $x, y \in \mathbb{R}$ . Le *module* de  $z$  est  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

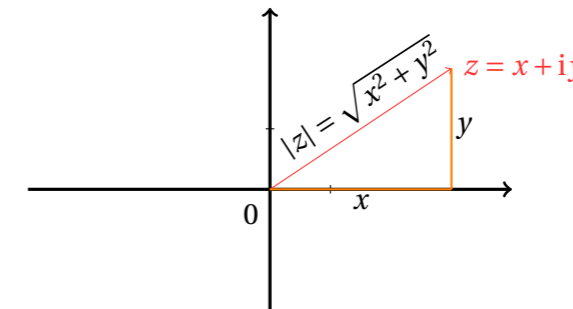
**Remarque.**

Si  $z$  est un réel, alors le module de  $z$  est aussi sa valeur absolue. On écrit  $z = x + i0$  où  $x \in \mathbb{R}$  et  $0 \in \mathbb{R}$  (ainsi  $z = x$ ) et on calcule

$$\underbrace{|z|}_{\text{module de } z} = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = \underbrace{|x|}_{\text{valeur absolue de } x}$$

Le module d'un complexe est une généralisation de la valeur absolue d'un réel, la notation  $||$  pour ces deux notions reste cohérente

**Interprétation géométrique :** si  $z = x + iy$  est l'affixe du point  $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , alors  $|z|$  est la distance (euclidienne) du point  $M$  à l'origine si on a muni le plan d'un repère orthonormé (utilisation du théorème de Pythagore).



**🎓 Proposition (propriétés des modules).**

- (i)  $\forall z \in \mathbb{C}, |z|^2 = z\bar{z}$
- (ii)  $|z| = 0 \iff z = 0$
- (iii)  $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$   
En particulier  $|-z_1| = |z_1|$ .
- (iv)  $\forall z \in \mathbb{C}, |\bar{z}| = |z|$
- (v)  $\forall z \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
- (vi)  $\forall z_1 \in \mathbb{C}, \forall z_2 \in \mathbb{C}^*, \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

**Exemple.**

$$|2+3i| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13} \quad \left|\frac{1-i}{4+3i}\right| = \frac{|1-i|}{|4+3i|} = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

### 4. Complexes de module 1

**Définition (nombres complexes de module 1).**

$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  est l'ensemble des nombres complexes de module 1. Géométriquement  $\mathbb{U}$  s'identifie au cercle trigonométrique.

**Proposition.**

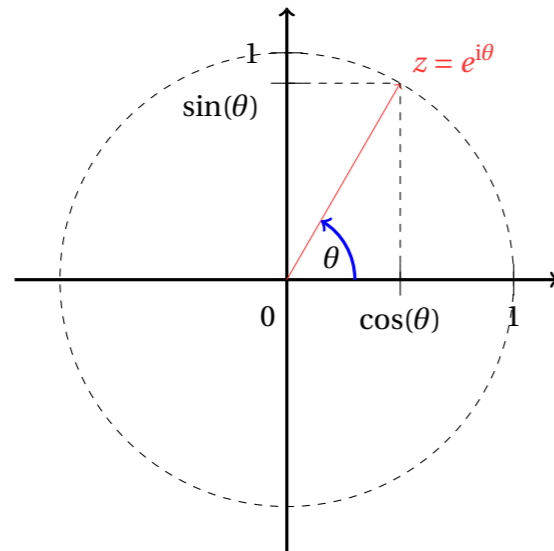
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{U}, z_1 z_2 \in \mathbb{U}$ .
- $\forall z \in \mathbb{U}, \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$ .

**Définition (exponentielle d'un imaginaire pur).**

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on définit le complexe  $e^{i\theta}$  par :  $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

**Remarque.**

Géométriquement,  $e^{i\theta}$  est le point du cercle trigonométrique d'abscisse  $\cos\theta$  et d'ordonnée  $\sin\theta$ .



**Théorème (écriture exponentielle des complexes de module 1).**

Un nombre complexe  $z$  est de module 1 si et seulement si il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $z = e^{i\theta}$ . De plus, ce réel  $\theta$  est unique modulo  $2\pi$  (i.e. si  $z = e^{i\theta} = e^{i\theta'}$  alors  $\theta \equiv \theta' [2\pi]$ ).

**Proposition (règles de calcul avec les exponentielles d'imaginaires purs).**

- (i)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
- (ii)  $\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, e^{i(\theta_1 + \theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$
- (iii)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

**Exemple.**

À retenir :

$$e^{in\pi} = (e^{i\pi})^n = (-1)^n$$

On déduit de cette propriété les formules d'Euler et de Moivre :

**Théorème.**

- (formules d'Euler)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$  et  $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
- (formule de Moivre)  $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$

### 5. Argument

**Théorème (écriture exponentielle d'un complexe non nul).**

Tout nombre complexe **non nul**  $z \in \mathbb{C}^*$  s'écrit sous la forme  $z = r e^{i\theta}$  où  $r \in \mathbb{R}_+^*$  et  $\theta \in \mathbb{R}$ . De plus,  $r$  est unique et  $\theta$  est unique modulo  $2\pi$ .

**Remarque.**

Cette écriture est appelée *écriture exponentielle* du complexe  $z$ . On trouvera parfois aussi les termes *écriture polaire* ou encore *écriture trigonométrique* de  $z$  (encore que cette dernière désigne plus couramment l'écriture  $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ).

**Remarque.**

Avec les notations du théorème, bien que  $r = |z|$ , on évitera d'écrire  $z = |z| e^{i\theta}$  à la place de

**Exemple.**

À retenir :

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 \quad e^{i\pi/2} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i$$

$z = r e^{i\theta}$ . Il est préférable pour les calculs abstraits de garder une notation,  $r$ , qui ne fait pas intervenir  $z$ .

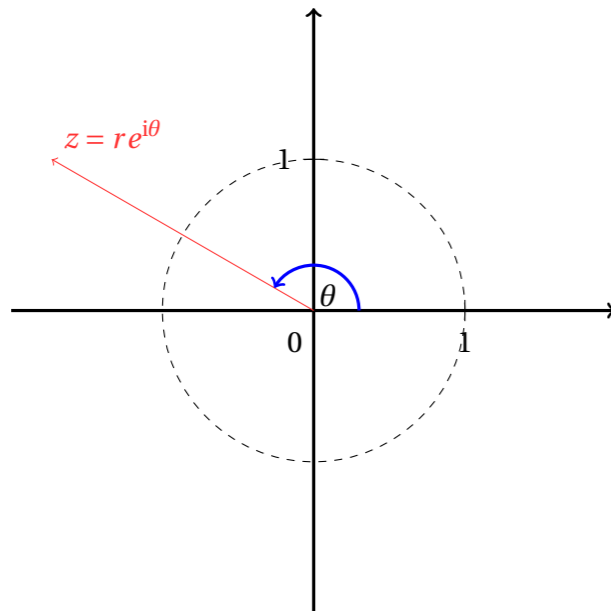
**Définition (argument d'un complexe non nul).**

Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ . Un réel  $\theta$  introduit au théorème précédent est appelé *un argument* de  $z$ . On note  $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$ .

**Remarque.**

On parle bien d'UN argument de  $z$ , il n'est pas unique (il l'est seulement modulo  $2\pi$ ). Éventuellement, on peut toujours choisir  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ , et dire dans ce cas qu'il s'agit de *l'argument principal* de  $z$ , mais cette contrainte est peu utile voir désavantageuse pour les formules de calculs.

**Interprétation géométrique :** si  $M$  est un point du plan d'affixe  $z \in \mathbb{C}^*$  (on suppose  $M \neq O$ ), alors l'angle orienté  $(\vec{OI}, \vec{OM})$  est un argument de  $z$ .



**Proposition (propriétés des arguments).**

Pour tous  $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$  :

(i)  $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$

(iii)  $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$

(ii)  $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$

(iv)  $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$

(v)  $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$

**Attention.**

On ne peut rien dire en général de  $\arg(z_1 + z_2)$ .

**Exemple.**

Si  $z = 1 + i \in \mathbb{C}^*$ . Écrivons  $z$  sous forme exponentielle.

On calcule d'abord :  $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$  puis

$$\frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

(en reconnaissant des angles remarquables.)

donc  $1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$

**Exemple.**

**Calculs de puissances.**

On souhaite calculer  $z^n$ , où  $z \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . La bonne méthode est d'écrire  $z$  sous forme exponentielle pour calculer  $z^n$ , puis on en déduit si besoin la forme algébrique de  $z^n$ . La contrainte pour pouvoir faire un calcul explicite est de tomber sur un angle remarquable dans l'écriture exponentielle de  $z$ .

1. Calcul de  $(1 - i\sqrt{3})^{2025}$ . On calcule  $|1 - i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$  puis  $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}$ , si bien que

$$(1 - i\sqrt{3})^{2025} = (2e^{-i\pi/3})^{2025} = 2^{2025} e^{-i2025\pi/3} = 2^{2025} e^{-675i\pi} = 2^{2025} \underbrace{e^{-388i2\pi}}_{=1} \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} = -2^{2025}$$

2. Calcul de  $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{2025}$ . On calcule  $|\sqrt{3}-i| = 2$  et  $|1-i| = \sqrt{2}$ , puis  $\frac{\sqrt{3}-i}{2} = e^{-i\pi/6}$  et  $\frac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{-i\pi/4}$  si bien que

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{2025} = \frac{2^{2025} e^{-i2025\pi/6}}{\sqrt{2}^{2025} e^{-i2025\pi/4}}$$

Or  $2025 = 168 \times 12 + 9$  donc  $\frac{2025\pi}{6} = 168 \times 2\pi + \frac{3\pi}{2}$ ;  $2025 = 253 \times 8 + 1$  donc  $\frac{2025\pi}{4} = 253 \times 2\pi + \frac{\pi}{4}$  donc

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i}\right)^{2025} = \sqrt{2}^{2025} e^{-i3\pi/2} e^{i\pi/4} = 2^{1012} \sqrt{2} e^{-5i\pi/4} = -2^{1012} + i2^{1012}$$

3. Calcul de  $\left(\frac{1-4i}{5-3i}\right)$ . On calcule  $|1-4i| = \sqrt{17}$  et  $|5-3i| = \sqrt{34}$  et on ne reconnaît pas d'angle remarquable au numérateur ou au dénominateur. On calcule plutôt :

$$\frac{1-4i}{5-3i} = \frac{(1-4i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{5+3i-20i+12}{25+9} = \frac{17}{34}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/4}$$

si bien que

$$\left(\frac{1-4i}{5-3i}\right)^{2025} = \frac{2^{1012} \sqrt{2}}{2^{2025}} e^{i2025\pi/4} = \frac{1}{2^{1023}} (1+i)$$

## 6. Exercices

### ? Exercice 1.

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

- |   |  |  |              |
|---|--|--|--------------|
| 1. $(2+3i)(3+4i)$                           | 2. $\frac{2+i}{3-2i}$                                | 3. $\frac{3+5i}{3-5i}$                       | 4. $(1+i)^2$ |
| 5. $(-1+i)^3$                               | 6. $\frac{(2+3i)^2 + (2-3i)^2}{(2+3i)^2 - (2-3i)^2}$ | 7. $(3-2i)^4$                                |              |
| 8. $(1+i)^3 + (1+i)^5 + \dots + (1+i)^{11}$ | 9. $\sqrt{2}e^{i\frac{2025}{4}\pi}$                  | 10. $\frac{(1-j)^3 + (1+j)^3}{(1+j)(1+j^2)}$ |              |
- (où  $j = e^{-2i\pi/3}$ ).

### ? Exercice 2.

Donner la forme trigonométrique des complexes suivants :

- |             |           |           |                   |                    |
|-------------|-----------|-----------|-------------------|--------------------|
| 1. $4+4i$ ; | 2. $-2$ ; | 3. $2i$ ; | 4. $\sqrt{3}-i$ ; | 5. $3+\sqrt{3}i$ . |
|-------------|-----------|-----------|-------------------|--------------------|

### ? Exercice 3.

Soit  $\theta \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\}$  et  $\alpha \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Calculer les modules et arguments des nombres complexes :

- |  |   |
|--|---|
| 1. $z_1 = -5\sqrt{3} - 5i$   | 2. $z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{188}$ |
| 3. $z_3 = \frac{1 + \cos\theta + i\sin\theta}{1 - \cos\theta + i\sin\theta}$ | 4. $z_4 = (1 + i \tan \alpha)^n$                      |
| 5. $z_5 = (1+i)^n + (1-i)^n$   | 6. $z_6 = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$     |

### ? Exercice 4.

Calculer (on donnera les résultats sous forme algébrique et exponentielle) :

- |  |  |
|--|--|
| 1. $(\sqrt{3}+i)^{2021}$                       | 2. $\left(\frac{9+i}{5-4i}\right)^5$                                       |
| 3. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}$ | 4. $(1+e^{i\theta})^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ ) |

## II. Matrices

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1. Définitions

#### Définition (matrice).

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ .

On appelle *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$*  la donnée de  $n \times p$  éléments de  $\mathbb{K}$ , notés  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq p$ , représentés sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & (a_{i,j}) & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Les  $a_{i,j}$  sont appelés *coefficients* de la matrice ou encore *terme général* de la matrice.

#### Remarque.

- Dans la suite du chapitre, on ne précisera plus que  $n, p$  ou les autres entiers relatifs à la taille des matrices sont des entiers naturels non nuls.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  se note  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .
- Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  dont les coefficients sont notés  $a_{i,j}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq p$ . On peut noter  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ .

#### Exemple.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & i & 3 \\ 0 & -1 & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C}) \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{5} & -3 \\ 0 & 7 & \sqrt{5} \\ -\frac{1}{3} & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$$

#### Définition (matrices remarquables).

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

- Si  $n = 1$ , A est une *matrice ligne*
- Si  $p = 1$ , A est une *matrice colonne*
- Si  $n = p$ , A est une *matrice carrée d'ordre n*. Dans ce cas on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  au lieu de  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ .

**Exemple.**

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$  est une matrice ligne
- $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+i \\ 3-2i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$  est une matrice colonne
- $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est une matrice carrée (d'ordre 2)
- $D = (i) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  est une matrice carrée/ligne/colonne

**📖 Définition (matrice nulle).**

La matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients sont nuls est appelée *matrice nulle de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*  et notée  $O_{n,p}$  (ou  $O_n$  si  $n = p$  ou encore 0 lorsque le contexte est clair).

**Exemple.**

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad O_{2,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**📖 Définition (matrice identité).**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle *matrice identité d'ordre  $n$*  (on encore matrice *unité d'ordre  $n$* ), notée  $I_n$ , la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  (donc c'est une matrice carrée) dont les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale qui valent tous 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & (0) \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

**Exemple.**

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**2. Opérations**

**📖 Définition (somme de matrices).**

Soient  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}, B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . La *somme* de ces deux matrices, notée  $A + B$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  définie par

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

(on somme «coefficient par coefficient»)

**⚠ Attention.**

On ne peut sommer que des matrices de même taille (*i.e.* ayant le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes)!

En particulier, on veillera à ne pas additionner des matrices et des scalaires (*i.e.* des réels ou des complexes).

**Exemple.**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ .

On peut alors calculer  $B + C$  ou  $C + B$  mais pas  $A + B$  ni  $A + C$  :

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 7 & 1 \end{pmatrix} = C + B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

**📖 Définition (multiplication externe).**

Soient  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On note  $\lambda.A$  (ou  $\lambda A$ ) la matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  définie par

$$\lambda.A = (\lambda \times a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

(tous les coefficients de  $A$  sont multipliés par  $\lambda$ )

**Remarque.**

On note les scalaires à gauche et les matrices à droite.  
**Il faut bien respecter cette convention!**

**Exemple.**

Si  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2i & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$ . Alors :

$$2.A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4i & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C}) \quad -1.A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2i & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = -A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad i.A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 2 & 2i \\ -i & 3i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{C})$$

On résume les opérations précédentes par :

**Théorème (stabilité par combinaison linéaire).**

$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est stable par combinaisons linéaires, c'est-à-dire :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad \alpha.A + \beta.B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

**Exemple.**

Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha = 2$  et  $\beta = -3$ . Alors :

$$2.A - 3.B = \begin{pmatrix} 2 \times 2 - 3 \times 0 & 2 \times 1 - 3 \times 1 & 2 \times 0 - 3 \times (-1) \\ 2 \times (-1) - 3 \times 1 & 2 \times 4 - 3 \times 0 & 2 \times 2 - 3 \times (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ -5 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

**Définition (produit matriciel).**

Soient  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . Le *produit* de  $A$  par  $B$  est la matrice de  $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ , notée  $AB$  (ou explicitement  $A \times B$ ), définie par

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}} \quad \text{où} \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j} = a_{i,1} b_{1,j} + a_{i,2} b_{2,j} + \dots + a_{i,p} b_{p,j}$$

(attention, ce n'est PAS le produit «coefficient par coefficient»)

**Remarque.**

- Hiérarchisons les apprentissages :
  - Il faut avant tout savoir faire le produit «concret» de deux matrices (exemples à la suite).
  - Il est indispensable (à court terme) de connaître et de savoir manipuler la formule générale (avec le symbole  $\sum$  et les indices  $i, j, k$ ). Cette formule sert beaucoup dans les preuves qui vont suivre et dans les exercices un peu théoriques.

**C'est un attendu du programme.**

- Le produit de deux matrices n'est bien défini que si le nombre de *colonnes* de  $A$  est le même que le nombre de *lignes* de  $B$ . On dit alors que  $A$  et  $B$  sont de tailles compatibles.

- Le produit d'une matrices ligne à  $p$  colonnes par une matrice colonne à  $p$  lignes est une matrices carrée d'ordre 1 :

$$(x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_p) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_p y_p) = \left( \sum_{k=1}^p x_k y_k \right)$$

On peut, de ce point de vue, interpréter le produit matriciel  $AB$  comme étant la matrice  $C$  dont le coefficient de la ligne  $i$  et colonne  $j$  est obtenu en multipliant la ligne  $i$  de  $A$  par la colonne  $j$  de  $B$ .

- Le produit d'une matrice quelconque par une matrice colonne est une matrice colonne :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p a_{1,j} x_j \\ \sum_{j=1}^p a_{2,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p a_{n,j} x_j \end{pmatrix}$$

On peut, de ce point de vue, interpréter le produit matriciel  $AB$  comme étant la matrice  $C$  dont les colonnes sont obtenues en multipliant  $A$  par les colonnes de  $B$ .

**Attention.**

L'interprétation principale à retenir est que le résultat du produit matriciel d'une matrice quelconque  $A$  par une matrice colonne  $X$  donne une matrice colonne qui est *combinaison linéaire des colonnes* de  $A$ , les coefficients de cette combinaison linéaire étant les coefficients de  $X$ .

**Exemple.**

- Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ . Alors :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=B} = \begin{pmatrix} 2-3+8 \\ 1+0-2 \\ 2-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = AB$$

Mais,  $BA$  n'a pas de sens ( $B$  a 1 colonne,  $A$  a 3 lignes).

Notons, conformément à la dernière remarque, que la matrice colonne  $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est combinaison linéaire des colonnes de  $A$  :

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Soient  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ . Alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 & 10 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = BA$$

Mais,  $AB$  n'a pas de sens ( $A$  a 4 colonnes,  $B$  a 2 lignes).

3. Soient  $A = (1 \ 1+i \ 3) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{C})$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ . Alors :

$$(1 \ 1+i \ 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-2 \ 1+i \ 2+3i) = AB$$

Mais,  $BA$  n'a pas de sens ( $B$  a 3 colonnes,  $A$  a 1 ligne).

4. Soient  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ , alors on calcule  $AB = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = BA$ . On retiendra que de façon générale, le produit de deux matrices diagonales est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les produits des coefficients diagonaux des deux matrices, de plus le produit de ces matrices commute.

**Attention.**

- Si  $n \geq 2$  ou  $p \geq 2$ , le produit  $AB$  ne commute pas (en général)! En effet :
  - si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  avec  $n \neq q$ , alors  $AB$  existe mais pas  $BA$ , donc  $A$  et  $B$  ne commutent pas!
  - si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  alors  $AB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  et  $BA \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  existent mais ne peuvent être égales car pas de même taille!
  - si  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$  alors  $AB = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  et  $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  existent, sont de même taille, mais ne sont pas égales.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  existent, sont de même taille, mais ne sont pas égales.

On retiendra donc que l'ordre de l'écriture d'un produit est fondamental!

2. On peut avoir  $AB = 0$  sans que  $A$  ou  $B$  soit nulle. En effet :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. On ne peut pas simplifier (en général) l'égalité  $AB = AC$  par  $A$ . En effet, soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ alors}$$

$$AB \underset{\text{(calculs)}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{\text{(calculs)}}{=} AC \quad \text{mais} \quad B \neq C$$

**Proposition (élément neutre pour le produit matriciel).**

Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $AI_p = A$  et  $I_n A = A$ .

**Définition (transposée d'une matrice).**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , notée  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ . On appelle *transposée de  $A$* , notée  $A^T$ , la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  définie par

$$A^T = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{où} \quad \forall i \in [1, p], \forall j \in [1, n], b_{i,j} = a_{j,i}$$

**Remarque.**

- On rencontrera parfois la notation  ${}^t A$  à la place de  $A^T$  pour désigner la transposée de  $A$ .
- En pratique la transposition échange les lignes d'une matrice avec ses colonnes : la ligne  $i$  devient la colonne  $i$  (et réciproquement).
- Si  $A$  est une matrice carrée, les coefficients diagonaux de  $A$  sont inchangés lorsqu'on transpose  $A$  :  $A$  et  $A^T$  ont les mêmes coefficients diagonaux.

**Exemple.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \quad \longrightarrow \quad A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$$

(la première colonne de  $A$  est devenue la première ligne de  $A^\top$ , la deuxième colonne de  $A$  est devenue la deuxième ligne de  $A^\top$ )

et

$$B = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 2 & 3+2i & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \quad \longrightarrow \quad B^\top = \begin{pmatrix} i & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3+2i & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$$

**Proposition (linéarité de la transposition).**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors :

- $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
- $(\lambda.A)^\top = \lambda.A^\top$

ce qui se résume par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \quad (\alpha.A + \beta.B)^\top = \alpha.A^\top + \beta.B^\top$$

**Proposition (la transposition est une involution).**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Alors  $(A^\top)^\top = A$ .

**Proposition (transposition d'un produit).**

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ . Alors

$$(AB)^\top = B^\top A^\top \quad (\text{on change l'ordre du produit!})$$

**3. Puissances de matrices**

**Attention.**

Dans cette partie, les matrices sont carrées : il n'est pas envisageable de parler de puissances de matrices non carrées!

**Définition (puissances de matrices).**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On peut définir les puissances de la matrice  $A$  par récurrence en posant :

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^{n+1} = AA^n = A^n A$$

**Exemple.**

On calcule successivement (retenir la présentation pour les calculs pratiques des puissances!) :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2i & 3+i & i \\ -i & 4 & 3i \\ -2-i & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A^2} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -2+i & 6+4i & -1+4i \\ 1-4i & 8-i & 7i \\ -2-3i & -4-i & 1-i \end{pmatrix}}_{=A^3}$$

donc

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2i & 3+i & i \\ -i & 4 & 3i \\ -2-i & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} -2+i & 6+4i & -1+4i \\ 1-4i & 8-i & 7i \\ -2-3i & -4-i & 1-i \end{pmatrix}$$

**Attention.**

Il est généralement *difficile* de calculer  $A^p$  où  $A$  est une matrice carrée : il n'y a pas de formule générale ni de méthode universelle pour une matrice carrée quelconque! Selon la situation, on pourra calculer les puissances d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :

- si la matrice  $A$  est diagonale (c'est-à-dire que tous les coefficients de  $A$  en dehors de la diagonale sont nuls), en élevant ses coefficients diagonaux à la puissance demandée (les autres coefficients restant nuls);
- si l'on observe une relation de récurrence permettant le passage de  $A^p$  à  $A^{p+1}$ , en émettant une conjecture que l'on démontre par récurrence;
- si l'on peut écrire  $A = B + C$  où  $BC = CB$ , en utilisant la formule du binôme de Newton si l'on sait calculer «facilement» les puissances de  $B$  et de  $C$  : cette méthode sera introduite et détaillée dans le cours de l'année;
- si l'on connaît un polynôme annulateur  $P$  de  $A$ , en utilisant la division euclidienne de  $X^p$  par  $P$ , cette méthode sera introduite dans un futur chapitre sur les polynômes.

**Exemple.**

- Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\begin{pmatrix} (-1) & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
- Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n^p = I_n$  et  $O_n^p = O_n$ .

**Exemple.**

On note  $J_n$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1 :  $J_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  Cal-

culer  $J_n^2$  puis en déduire  $J_n^p$ , pour  $p \in \mathbb{N}$ .

**Solution.**

On calcule  $J_n^2 = nJ_n$ .

On conjecture :  $\forall p \in \mathbb{N}^*, J_n^p = n^{p-1}J_n$ .

On le démontre par récurrence. Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{H}_p : J_n^p = n^{p-1}J_n$ .

▷ On a démontré  $\mathcal{H}_1$ .

▷ Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On suppose que  $\mathcal{H}_p$  est vraie. Par hypothèse de récurrence on a  $J_n^p = n^{p-1}J_n$ . Ainsi

$$J_n^{p+1} = J_n^p J_n = n^{p-1} J_n J_n = n^{p-1} J_n^2 = n^{p-1} \times n J_n = n^{p+1-1} J_n$$

donc  $\mathcal{H}_{p+1}$  est vraie, ce qui achève la récurrence.

Attention la formule n'est pas valable si  $p = 0 : J_n^0 = I_n \neq n^{-1}J_n$ .

**4. Matrices inversibles**

**Attention.**

Dans cette partie, les matrices sont carrées : il n'est pas envisageable de parler d'inverse de matrices non carrées!

**Définition (matrice inversible).**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est *inversible* s'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $AB = I_n$  ET  $BA = I_n$ . Si  $B$  existe, alors  $B$  est unique et est appelé *inverse* de  $A$ . On la note  $B = A^{-1}$ . L'ensemble des matrices carrées inversibles de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est noté  $GL_n(\mathbb{K})$ .

**Attention.**

1. Cela n'a pas de sens de parler de l'inversibilité d'une matrice qui n'est pas carrée!
2. Ne jamais noter  $\frac{1}{A}$  à la place de  $A^{-1}$ , cela n'a aucun sens.

**Exemple.**

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  est inversible d'inverse  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  car  $AB = I_2$  et  $BA = I_2$ .

2.  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  n'est pas inversible car pour toute matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ , la dernière ligne de  $CM$  est nulle :

$$CM = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$$

Ainsi il n'existe pas de  $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  telle que  $CB = BC = I_2$  et  $C$  n'est pas inversible.

(on note \* des coefficients de matrices que l'on ne calcule pas pour gagner du temps.)

**Proposition (inversibilité des matrices diagonales).**

Soit  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice diagonale.  $D$  est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

**Exemple.**

$D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$  est inversible d'inverse  $D_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ , mais  $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  n'est pas inversible.

**Attention.**

En dehors du cas particulier des matrices diagonales, il n'est généralement pas possible de déterminer l'inversibilité et calculer l'inverse le cas échéant d'une matrice carrée quelconque.

Nous verrons dans le cours de l'année une méthode pratique pour répondre à cette question en toute généralité.

L'exercice suivant présente une situation où l'on peut tester simplement l'inversibilité d'une matrice.

**Exemple.**

Soit  $M = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . Calculer  $M^2 + M - 2I_3$ , en déduire que  $M$  est inversible et expliciter son inverse.

**Solution.**

On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit

$$M^2 + M - 2I_3 = \begin{pmatrix} 5-3-2 & -4+4 & -2+2 \\ 2-2 & -1+3-2 & -1+1 \\ -2+2 & 2-2 & 2+0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$M^2 + M - 2I_3 = O_3 \iff M^2 + M = 2I_3 \iff \frac{1}{2}(M + I_3)M = I_3 \iff M\left(\frac{1}{2}(M + I_3)\right) = I_3$$

d'où l'on déduit que  $M$  est inversible d'inverse  $\frac{1}{2}(M + I_3)$ .

On calcule précisément :

$$\frac{1}{2}(M + I_3) = \begin{pmatrix} \frac{-3+1}{2} & \frac{4}{2} & \frac{2}{2} \\ \frac{-2}{2} & \frac{3+1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} & \frac{0+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M^{-1}$$

Attention cependant à rester conscient qu'en général on ne trouvera pas facilement une relation entre les puissances de la matrice! cette méthode n'est pas utilisable en toute généralité.

## 5. Exercices

### ? Exercice 5.

1. Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & i \\ -i & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits matriciels  $AB$ ,  $AC$  et  $AD$ .

2. Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits matriciels  $AB$ ,  $AC$  et  $AD$ .

3. Soient :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits matriciels  $AB$ ,  $AC$  et  $AD$ .

4. Calculer, lorsque cela est possible, les produits  $AB$  et  $BA$ .

(a)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

(b)  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

(c)  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $B = A^T$

(d)  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

(e)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(f)  $A = \begin{pmatrix} i & 1 & -i \\ 1 & -2 & i \\ 2 & 0 & 1+i \end{pmatrix}$  et  $B = \overline{A}^T$

### ? Exercice 6.

Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ .

- Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un réel  $a_n$  tel que :  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$
- Montrer que la suite  $(a_n)$  est arithmético-géométrique, en déduire son terme général puis l'expression de  $A^n$  en fonction de  $n$ .

**? Exercice 7.**

Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . On note  $\text{tr}(A) = a + d$  sa *trace* et  $\det(A) = ad - bc$  son déterminant.

Démontrer que  $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$  (la matrice nulle).

**? Exercice 8.**

1. Trouver deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  non nulles telles que  $AB = O_2$  (matrices que l'on choisira différentes des exemples de la partie cours).
2. Trouver trois matrices  $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  non nulles telles que  $AB = AC$  mais  $B \neq C$  (matrices que l'on choisira différentes des exemples de la partie cours).
3. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices non nulles. On suppose que  $AB = O_n$ . Montrer que ni  $A$  ni  $B$  ne peuvent être inversibles.
4. Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$  tels que  $a_0 \neq 0$ . On suppose que  $\sum_{k=0}^d a_k A^k = 0$ . Montrer que  $A$  est inversible et déterminer l'inverse de  $A$ .
5. Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On suppose que  $AA^T = O_n$ . En regardant les coefficients diagonaux de  $AA^T$ , montrer que  $A = 0$ .
6. Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ . On suppose que  $A\bar{A}^T = O_n$ . Montrer que  $A = 0$ .  
(par définition, la matrice  $\bar{A}$  est la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coefficients de  $A$ , ainsi  $\bar{A}^T$  est la «transconjuguée», obtenue à partir de  $A$  en la conjuguant et en la transposant.)

### III. Solutions des exercices

#### Solution de 1.

1.  $-6 + 17i$
2.  $\frac{4+7i}{13}$
3.  $\frac{-8+15i}{18}$
4.  $2i$
5.  $2+2i$
6.  $\frac{5}{12}i$
7.  $-119 - 120i$
8.  $2(-7+19i)$
9.  $1+i$
10.  $5+i3\sqrt{3}$

#### Solution de 2.

1.  $4\sqrt{2}e^{i\pi/4}$
2.  $2e^{i\pi}$
3.  $2e^{i\pi/2}$
4.  $2e^{-i\pi/6}$
5.  $2\sqrt{3}e^{i\pi/6}$

#### Solution de 3.

1.  $z_1 = 10e^{-i5\pi/6}$  donc  $|z_1| = 10$  et  $\arg(z_1) \equiv -5\pi/6 [2\pi]$ .
2.  $z_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\pi/3}}{e^{-i\pi/4}}\right)^{188} = 2^{94} e^{i1316\pi/12} = 2^{94} e^{i \frac{24 \times 54 + 20}{24} \times 2\pi} = 2^{94} e^{i54 \times 2\pi} e^{i5\pi/3} = \underbrace{2^{94}}_{>0} e^{i5\pi/3}$ .  
Ainsi  $|z_2| = 2^{94}$  et  $\arg(z_2) \equiv 5\pi/3 [2\pi]$ .
3.  $z_3 = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2})}{e^{-i\theta/2}(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})} = e^{i\theta} \frac{2\cos(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)} = \frac{1}{\tan(\theta/2)} e^{i(\theta-\pi/2)}$ .  
Ainsi si  $\theta \in ]-\pi, 0[$ ,  $\tan(\theta/2) < 0$  donc  $|z_3| = \frac{-1}{\tan(\theta/2)}$  et  $\arg(z_3) \equiv \theta + \pi/2 [2\pi]$ ; si  $\theta \in ]0, \pi[$ ,  $\tan(\theta/2) > 0$  donc  $|z_3| = \frac{1}{\tan(\theta/2)}$  et  $\arg(z_3) \equiv \theta - \pi/2 [2\pi]$ .
4.  $z_4 = \frac{1}{\cos^n(\alpha)} e^{in\alpha}$ .  
Comme  $\alpha \in ]-\pi/2, \pi/2[$ ,  $\cos^n(\alpha) > 0$  donc  $|z_4| = \frac{1}{\cos^n(\alpha)}$  et  $\arg \equiv n\alpha [2\pi]$ .
5.  $z_5 = 2\operatorname{Re}((1+i)^n) = 2\operatorname{Re}((\sqrt{2}e^{i\pi/4})^n) = 2\operatorname{Re}(2^{n/2}e^{in\pi/4})$ .  
Ainsi
  - si  $n \equiv 0 [8]$ ,  $|z_5| = 2^{n/2}$  et  $\arg z_5 \equiv 0 [2\pi]$
  - si  $n \equiv \pm 1 [8]$ ,  $|z_5| = 2^{(n-1)/2}$  et  $\arg(z_5) \equiv 0 [2\pi]$
  - si  $n \equiv \pm 2 [8]$ ,  $z_5 = 0$
  - si  $n \equiv \pm 3 [8]$ ,  $|z_5| = 2^{(n-1)/2}$  et  $\arg(z_5) \equiv \pi [2\pi]$
  - si  $n \equiv 4 [8]$ ,  $|z_5| = 2^{n/2}$  et  $\arg(z_5) \equiv \pi [2\pi]$ .

6. On reconnaît  $z_6 = 2\cos(\pi/8) + 2\sin(\pi/8)$  donc  $|z_6| = 2$  et  $\arg(z_6) \equiv \pi/8 [2\pi]$ .

#### Solution de 4.

Méthode : pour calculer  $z^n$  avec  $z$  un complexe et  $n$  un entier, on détermine le module de  $z$ , que l'on note  $r > 0$  et on recherche l'argument de  $z/r$  en reconnaissant des valeurs particulières de trigonométrie.

1. Soit  $z = \sqrt{3} + i$ . Alors  $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1} = 2$  puis  $z/2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = e^{i\pi/6}$ .

Enfin :

$$(\sqrt{3} + i)^{2021} = 2^{2021} e^{i(\pi/6) \times 2021}$$

Il s'agit de déterminer la valeur  $\pi \times 2021/6$  modulo  $2\pi$ . On écrit :  $\pi \times 2021/6 = 2\pi \times 2021/12$  et on effectue la division euclidienne de 2021 par 12 (comme en primaire). On obtient :  $2021 = 12 \times 168 + 5$  donc finalement :

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + i)^{2021} &= 2^{2021} \underbrace{e^{i2\pi \times 168}}_{=1} \underbrace{e^{i2\pi \times 5/12}}_{e^{i5\pi/6} = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}} \\ &= \boxed{2^{2021} e^{i5\pi/6}} \quad (\text{forme exponentielle}) \\ &= \boxed{-\sqrt{3} \times 2^{2020} + i \times 2^{2020}} \quad (\text{forme algébrique}) \end{aligned}$$

2. On peut calculer module et argument du dénominateur et du numérateur, puis considérer le quotient de ces complexes sous forme trigonométrique, mais on voit assez vite que les arguments de ces complexes ne sont pas simples à calculer.

On va donc d'abord écrire  $z = \frac{9+i}{5-4i}$  sous forme algébrique en multipliant son dénominateur par l'expression conjuguée :

$$\frac{9+i}{5-4i} = \frac{(9+i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)} = \frac{(45-4) + i(36+5)}{25+16} = 1+i$$

On calcule :  $|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$  puis  $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4) = e^{i\pi/4}$

Donc :

$$\begin{aligned} \left(\frac{9+i}{5-4i}\right)^5 &= (1+i)^5 = \sqrt{2}^5 e^{i\pi/4 \times 5} \\ &= \boxed{4\sqrt{2}e^{i5\pi/4}} \quad (\text{forme exponentielle}) \\ &= \boxed{-4-4i} \quad (\text{forme algébrique}) \end{aligned}$$

(en remarquant que  $\cos(5\pi/4) = -1/\sqrt{2}$  et  $\sin(5\pi/4) = -1/\sqrt{2}$ .)

3. Ici c'est le contraire, les modules et arguments des numérateurs et dénominateurs sont plus simples à calculer. Soit on applique la méthode précédente (calculs des modules/arguments), soit on transforme directement les complexes concernés (c'est plus rapide mais nécessite du recul) :

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}$$

et

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

Ainsi :

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30} = \left(\frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}\right)^{30} = \left(\sqrt{2}e^{i7\pi/12}\right)^{30} = 2^{15} e^{i2\pi \times 105/12}$$

On effectue la division euclidienne de 105 par 12 :  $105 = 8 * 12 + 9$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30} &= 2^{15} \underbrace{e^{i2\pi \times 8}}_{=1} \underbrace{e^{i2\pi \times 9/12}}_{=e^{i3\pi/2}=-i} \\ &= \boxed{2^{15} e^{i3\pi/2}} \quad (\text{forme exponentielle}) \\ &= \boxed{-i2^{15}} \quad (\text{forme algébrique}) \end{aligned}$$

4. Ici, c'est plutôt la technique de l'angle moitié qui est attendue :

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (1 + e^{i\theta})^n &= (2 \cos(\theta/2) e^{i\theta/2})^n = 2^n \cos^n(\theta/2) e^{in\theta/2} \\ &= \boxed{2^n \cos^n(\theta/2) \cos(n\theta/2) + i2^n \cos^n(\theta/2) \sin(n\theta/2)} \quad (\text{forme algébrique}) \end{aligned}$$

On ne donne pas la forme exponentielle car le signe de  $2^n \cos^n(\theta/2)$  dépend de la parité de  $n$  et de  $\theta$  modulo  $\pi$ , la distinction de cas est lourde et peu intéressante.

**Solution de 5.**

$$\begin{array}{l} 1. \quad \left| \begin{array}{l} AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ AC = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 19 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ AD = \begin{pmatrix} 1-3i & 9 & -2 & 3+i \\ -1-2i & 6 & 2 & 2-i \end{pmatrix} \end{array} \right. \\ 2. \quad \left| \begin{array}{l} AB = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -3 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ AC = \begin{pmatrix} -7 & 7 & 0 & 9 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\ AD = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 1 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \right. \\ 3. \quad \left| \begin{array}{l} AB = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 2 \\ 0 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \\ AC = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ AD = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 & -16 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \end{array}$$

4. (a)

$$AB \text{ impossible} \quad BA = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 2 \\ 23 & -16 \end{pmatrix}$$

(b)

$$AB = (33) \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -10 & 5 & 35 \end{pmatrix}$$

(c)

$$AB = \begin{pmatrix} 26 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 26 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(d)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e)

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(f)

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & -3+i & -1+i \\ -3-i & 6 & 3+i \\ -1-i & 3-i & 6 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} 6 & -2-i & 1+3i \\ -2+i & 5 & -3i \\ 1-3i & 3i & 4 \end{pmatrix}$$

**Solution de 6.**

1. On procède par récurrence. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{H}_n$  : il existe  $a_n \in \mathbb{R}$  tel que  $A^n =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}.$$

• Pour  $n=0$ , avec  $a_0=0$  il vient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_0 & 1-2a_0 & 2a_0 \\ a_0 & -a_0 & a_0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = A^0$$

donc  $\mathcal{H}_0$  est démontrée.

• Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $\mathcal{H}_n$  est vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe  $a_n \in \mathbb{R}$  tel que  $A^n =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}, \text{ ainsi :}$$

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ a_3 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4a_n+6 & 4a_n-5 & -4a_n+6 \\ -2a_n+3 & 2a_n-3 & -2a_n+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(-2a_n+3) & 1-2(-2a_n+3) & 2(-2a_n+3) \\ -2a_n+3 & -(-2a_n+3) & (-2a_n+3)+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

si bien qu'en posant  $a_{n+1} = -2a_n + 3 \in \mathbb{R}$ , on a montré  $\mathcal{H}_{n+1}$ , ce qui achève la récurrence.

2. On reconnaît une suite arithmético-géométrique. Le plan d'étude (à connaître) est le suivant :

▷ On détermine le «point fixe» en résolvant :

$$c = -2c + 3 \iff c = 1$$

▷ On introduit une suite auxiliaire géométrique :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = -2a_n + 3 \\ 1 = -2 \times 1 + 3 \end{cases} \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, (a_{n+1} - 1) = -2(a_n - 1)$$

La suite  $(a_n - 1)$  est géométrique de raison  $-2$ , son terme général est donné par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n - 1 = (-2)^n (a_0 - 1) = -(-2)^n$$

▷ Conclusion :  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 1 - (-2)^n$ .

3. On en déduit finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 - (-2)^{n+1} & (-2)^{n+1} - 1 & 2 - (-2)^{n+1} \\ 1 - (-2)^n & (-2)^n - 1 & 2 - (-2)^n \end{pmatrix}$$

**Solution de 7.**

On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

si bien que

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc - (a+d)a + ad - bc & b(a+d) - (a+d)b \\ c(a+d) - (a+d)c & bc + d^2 - (a+d)d + ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solution de 8.**

1. On propose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et on vérifie que  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
2. On propose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ , on vérifie que  $AB = O_2$  et  $AC = O_2$  mais  $B \neq C$  : on ne peut pas simplifier par  $A$ !
3. On suppose que  $AB = O_2$ . On suppose par l'absurde que  $A$  est inversible, alors en multipliant l'égalité à gauche par  $A^{-1}$  il vient :  $A^{-1}AB = A^{-1}O_2$ , donc comme  $A^{-1}A = I_2$  et que le produit d'une matrice par la matrice nulle est la matrice nulle :  $I_2B = O_2$ , donc  $B = O_2$ , ce qui est absurde.  
On procède de même en supposant par l'absurde  $B$  inversible, il s'agit alors de multiplier par  $B^{-1}$  à droite.
4. Puisque  $a_0 \neq 0$  on peut isoler le terme  $a_0A^0 = a_0I_n$  dans la somme, le passer au second membre et diviser par  $-a_0$ , ce qui donne :

$$I_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^d a_k A^k = A \left( -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^d a_k A^{k-1} \right) = \left( -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^d a_k A^{k-1} \right) A$$

où  $B = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^d a_k A^{k-1}$  définit bien une matrice puisque pour tout  $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ ,  $k-1 \geq 0$ , ce qui donne une combinaison linéaire de puissances entières positives de la matrice  $A$ .

On a donc trouvé  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $AB = BA = I_n$  : la matrice  $A$  est inversible d'inverse  $B = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^d a_k A^{k-1}$ .

5. On note  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $A^\top = (\tilde{a}_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ , où pour tout  $(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\tilde{a}_{i,j} = a_{j,i}$  par définition de la transposée. Par définition du produit matriciel, en notant  $AA^\top = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} \tilde{a}_{k,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} a_{j,k}$$

En particulier si  $AA^\top = O_n$  on a

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 = c_{i,i} = \sum_{k=1}^p \underbrace{a_{i,k}^2}_{\geq 0}$$

Or une somme de réels positifs ou nuls est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls, si bien que l'on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, a_{i,k}^2 = 0 \text{ donc } a_{i,k} = 0$$

Ceci traduit le fait que  $A = O_{n,p}$ .

6. On note  $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$  et  $\bar{A}^\top = (\tilde{a}_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ , où pour tout  $(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\tilde{a}_{i,j} = \bar{a}_{j,i}$  par définition de la transconjugée. Par définition du produit matriciel, en notant  $A\bar{A}^\top = (c_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  :

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} \tilde{a}_{k,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} \bar{a}_{j,k}$$

En particulier si  $A\bar{A}^\top = O_n$  on a

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, 0 = c_{i,i} = \sum_{k=1}^p \underbrace{|a_{i,k}|^2}_{\geq 0}$$

Or une somme de réels positifs ou nuls est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls, si bien que l'on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, |a_{i,k}|^2 = 0 \text{ donc } a_{i,k} = 0$$

Ceci traduit le fait que  $A = O_{n,p}$ .