

Transition lycée-prépa

Contexte.

Ce document (et les autres annexes) sert de transition entre le lycée et la classe préparatoire. Il a pour but de faciliter la rentrée, de vous permettre de combler d'éventuelles lacunes, et d'arriver déjà « échauffé », afin d'aborder dans de bonnes conditions le rythme soutenu d'une classe préparatoire.

Les rappels de cours, méthodes et exercices proposés ne couvrent pas la totalité des programmes de première et de terminale, mais sont destinés à renforcer et à compléter vos capacités calculatoires et logiques. Celles-ci sont le socle sur lequel vous devrez vous appuyer. Les attentes dans ces domaines sont en effet bien plus grandes en classe préparatoire qu'au lycée.

Les exercices sont corrigés, certains sont également accompagnés de rappels de cours, de méthodes, et de conseils :

- Il est important de bien maîtriser toutes les méthodes rappelées dans ce document.
- Il est recommandé de chercher tous les exercices, d'abord sans regarder la correction.
- Il faut ensuite bien comprendre la correction, et savoir refaire l'exercice rapidement sans la consulter.

Il sera nécessaire de se remettre au travail au moins deux semaines avant la rentrée. Il peut être pertinent d'élargir cette période de travail à 3 ou 4 semaines réparties dans l'été.

Contenu, mode d'emploi.

Le document est divisé en chapitres :

- I. Calcul algébrique.
- II. Étude de fonctions.
- III. Solutions des exercices.

et vous trouverez sur le site de la classe des documents annexes :

- Nombres complexes et matrices.
- Raisonner-rédiger.
- Outils mathématiques pour les sciences.
- Cahier de calcul.

Le premier chapitre doit être travaillé avec sérieux : bien que vous soyez convaincus que vous savez déjà très bien tout ce qui figure dans cette partie, et que c'est « facile », les points abordés sont sources d'erreurs fréquentes encore longtemps après la rentrée.

J'insiste particulièrement sur la rédaction des récurrences, et je renvoie au document « Raisonner-rédiger » en annexe pour comprendre la nécessité d'une rédaction plus rigoureuse que celle généralement enseignée au lycée.

Le second chapitre est le plus important : c'est le domaine des mathématiques où l'écart entre la formation du lycée et les attendus de la prépa est le plus grand. Nous consacrerons un chapitre aux études de fonctions mais cela sera trop court compte-tenu du manque de pratique que vous avez : *entraînez-vous dès maintenant!*

Les interrogations au premier semestre porteront essentiellement sur les notions abordées dans ce document : en particulier il est nécessaire d'être capable de tracer rapidement, correctement, et soigneusement, le graphe d'une fonction usuelle.

La dernière partie est relative aux corrigés des exercices, vous y trouverez sûrement des erreurs (plus ou moins graves) : merci des les recenser et de mes les indiquer *à la rentrée* (par retour direct ou par mail).

L'annexe «Nombres complexes, matrices» est optionnel, il n'est nécessaire que si vous n'avez pas suivi l'option maths expertes : les preuves ne sont pas données, mais les énoncés vus en maths expertes et utiles en prépa y figurent, le but étant de manipuler un peu ces nouveaux objets avant qu'il ne soient réintroduits dans le cours de sup (autrement dit vous n'avez rien manqué d'irratrappable si vous n'avez pas suivi maths expertes!).

L'annexe «Raisonner-rédiger», bien plus exigeant à lire et à assimiler, fixe les bonnes règles de rédaction et énumère les principaux types de raisonnements mathématiques : **c'est un chapitre que vous aurez intérêt à relire plusieurs fois dans l'année.**

L'annexe «Outils mathématiques pour les sciences» est à travailler, si possible dès cet été, sinon à la rentrée : on y trouve des rappels ou des définitions, *sans démonstration*, concernant les produits scalaires, les produits vectoriels, les équations différentielles et les développements limités. Ces notions seront introduites de façon plus générale dans le cours de maths, mais trop tard dans l'année, alors qu'elles sont nécessaires en physique et en SII. L'objectif est juste de savoir les manipuler pour mieux suivre les cours de physique et de SII.

L'annexe «Cahier de calcul» se travaille tout au long de l'année, en complément des fiches d'exercices, mais certaines fiches sont abordables dès maintenant.

I. Calcul algébrique

1. Règles de priorités des opérations

Dans une expression numérique comportant ou non des parenthèses, on effectue les calculs dans l'ordre suivant :

- en premier les calculs écrits entre parenthèses, en commençant par les parenthèses les plus intérieures,
- ensuite les puissances et les factorielles (même niveau de priorité), en faisant les calculs dans l'ordre de la gauche vers la droite,
- ensuite les multiplications et les divisions (même niveau de priorité), en faisant les calculs dans l'ordre de la gauche vers la droite,
- enfin les additions et les soustractions.

? Exercice 1.

Répondre par Vrai ou Faux.

- $4x - x^2 = 4x(1 - x^2)$
- $(-1)^3 + 4 - 3 \times 2 = -3$
- $(-1)^4 + 2 \times 3/2 + 1 = 3$
- $1 - (-1)^n = 2$
- $2 \times 4^2 = 64$
- $3 \times 2^2 + (3 - (-1)^2) = 14$
- $2n! = (2n)!$

⚠ Attention.

Les parenthèses ne sont pas des objets décoratifs : Écrire -1^n au lieu de $(-1)^n$ est une erreur, écrire $2n!$ au lieu de $(2n)!$ est une erreur. Soyez rigoureux!

2. Racine carrée et valeur absolue

On rappelle la définition de la racine carrée d'un réel positif ou nul :

Soit a un réel positif ou nul. Il existe un unique réel positif ou nul x tel que $x^2 = a$; on le note \sqrt{a} .

En particulier, l'équation $x^2 = a$ d'inconnue $a \in \mathbb{R}$:

- admet exactement deux solutions réelles opposées si $a > 0$, ce sont $x = \sqrt{a} > 0$ et $x = -\sqrt{a} < 0$;
- admet exactement une solution si $a = 0$, c'est $x = 0$;
- n'a pas de solution réelle si $a < 0$.

On rappelle la définition de la valeur absolue d'un réel :

Soit x un réel. La valeur absolue de x , notée $|x|$ est définie par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

En particulier, la valeur absolue d'un réel est positive ou nulle.

Le résultat de l'exercice suivant est à connaître absolument.

? Exercice 2.

Soit x un réel. Alors $\sqrt{x^2} = |x|$.

3. Trigonométrie

a) Sinus et Cosinus

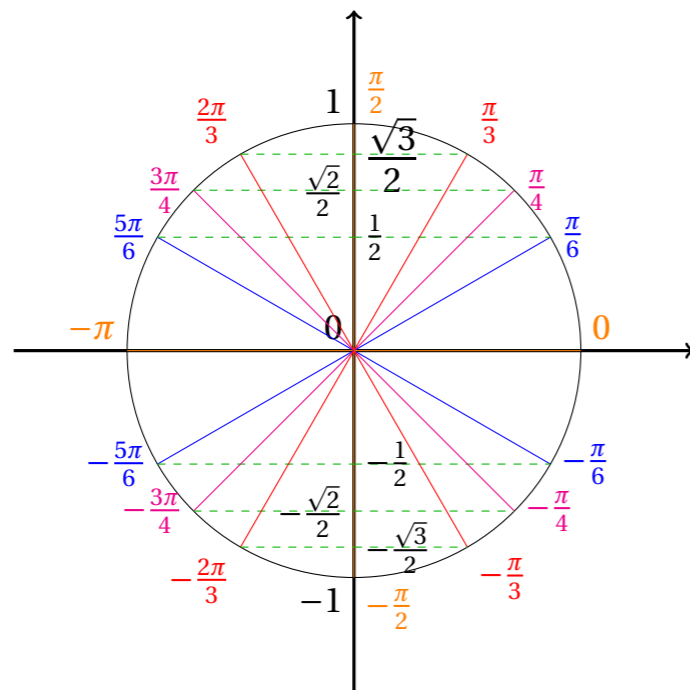
Les fonctions sinus et cosinus seront revues en première période. En attendant, on rappelle ci-dessous les principales formules trigonométriques à connaître :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + \pi) = -\cos(x), \sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\pi/2 - x) = \sin(x), \sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

Rappel des valeurs remarquables :

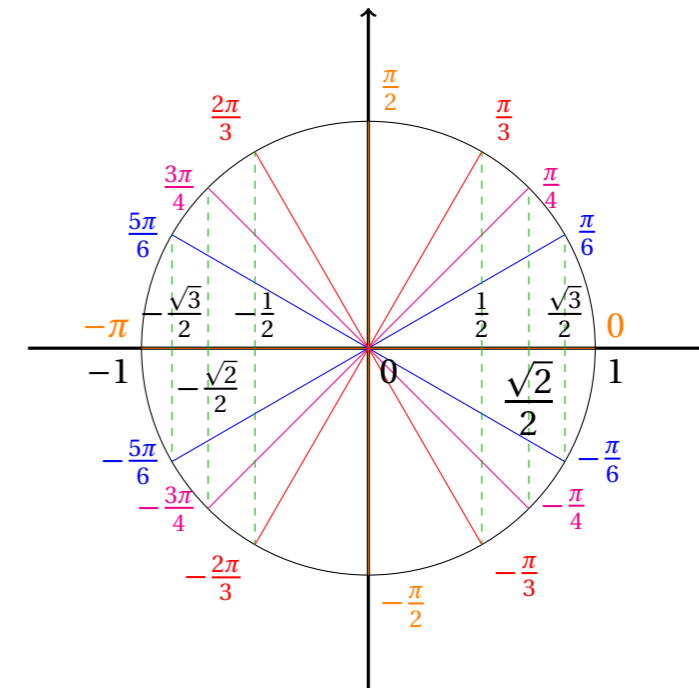
- $\sin(0) = 0, \sin(\pi/6) = 1/2, \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2, \sin(\pi/2) = 1, \sin(\pi) = 0.$

Les autres valeurs remarquables se retrouvent à l'aide d'un cercle trigonométrique ou à l'aide des symétries de sin.



- $\cos(0) = 1, \cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2, \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \cos(\pi/3) = 1/2, \cos(\pi/2) = 0, \cos(\pi) = -1.$

Les autres valeurs remarquables se retrouvent à l'aide d'un cercle trigonométrique ou à l'aide des symétries de cos.



b) Tangente

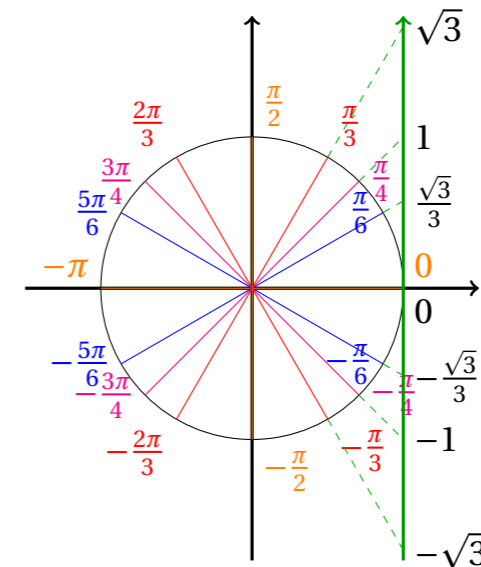
Par définition, pour tout réel x tel que $\cos(x) \neq 0$, donc tout réel x non égal à $\frac{\pi}{2}$ à un multiple de π

près, on définit $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Comme pour les autres fonctions trigonométriques, on reverra ses principales propriétés à l'occasion du chapitre sur les fonctions.

On rappelle quelques valeurs remarquables : $\tan(0) = 0, \tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3, \tan(\pi/4) = 1, \tan(\pi/3) = \sqrt{3}.$

Les autres valeurs remarquables se retrouvent à l'aide des symétries de tan.



? Exercice 3.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\cos(a + b)$ et $\cos(a - b)$ ne soient pas nuls. Démontrer que :

1. $\tan(a + b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$;
2. $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$.

4. Exponentielle et logarithme

On rappelle les principales propriétés des fonctions exponentielles et logarithme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x} \quad \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b), \quad \ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b), \quad \ln(1/a) = -\ln(a)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(a^n) = n \ln(a), \quad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \ln(e^a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \quad e^{\ln(a)} = a$$

La fonction logarithme est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Attention, bien retenir que $\ln(x)$ n'existe que si $x > 0$, mais $\ln(x)$ peut prendre des valeurs négatives! Par exemple $\ln(1/2) < 0$.

🚫 Attention.

Il faut bien respecter les notations sur les fonctions (voir le document «Raisonner-rédiger») : une fonction f se note $x \mapsto f(x)$ ou f , mais pas $f(x)$ tout seul (ce dernier est un réel, pas une fonction, ce n'est pas la même chose!). La dérivée de la fonction f est la fonction que l'on note f' , en tant que fonction on la note $x \mapsto f'(x)$ ou f' , mais pas $f'(x)$ tout seul. Il arrive que l'on souhaite dériver une *expression* qui dépend de x , dans ce cas si l'expression s'écrit sous la forme $g(x)$, on écrit $\frac{d}{dx}(g(x)) = \dots$ l'expression dérivée, mais surtout pas $(g(x))' = \dots$. Cette pratique (éventuelle) du lycée n'est pas rigoureuse, il faut la bannir immédia-

tement et définitivement.

? Exercice 4.

Simplifier les expressions suivantes.

1. $\ln(4)$;
2. $\ln(8e)$;
3. $\ln(\sqrt{2})$;
4. $\ln(1/2) + \ln(2/3) + \ln(3/4) + \ln(4/5) + \ln(5/6)$;
5. $\ln((3 + 2\sqrt{2})^{2026}) + \ln((3 - 2\sqrt{2})^{2026})$.

? Exercice 5.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout réel strictement positif x , on définit « x puissance α », noté x^α , par :

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

1. Vérifier que cette définition «prolonge» la définition des puissances entières, c'est-à-dire que si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $x^\alpha = \underbrace{x \times \dots \times x}_{\alpha \text{ facteurs}}$, et si $\alpha \in \mathbb{Z}_-^*$, alors $x^\alpha = \frac{1}{x^{-\alpha}}$.
2. Démontrer la généralisation de la formule rappelée en début de paragraphe :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, \quad \ln(a^b) = b \ln(a)$$

3. Démontrer les formules :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b, c \in \mathbb{R}, \quad a^b a^c = a^{b+c}, \quad \frac{a^b}{a^c} = a^{b-c}, \quad (a^b)^c = a^{bc}$$

4. Déterminer les limites de x^α en 0^+ et en $+\infty$, en distinguant les cas $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ et $\alpha > 0$.
5. Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$.

5. Établir une inégalité

a) **Rappels**

• On rappelle les règles de signes suivantes :

Signe de a	Signe de b	Signe de $a \times b$	Signe de a/b	Signe de $a + b$
+	+	+	+	+
+	-	-	-	indéterminé
-	+	-	-	indéterminé
-	-	+	+	-

- Les 3 identités remarquables usuelles sont à connaître. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad ; \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

- Les opérations suivantes conservent le sens des inégalités :
 - Ajouter un réel quelconque α : si $x \leq y$, alors $x + \alpha \leq y + \alpha$.
 - Multiplier par un réel positif α : si $x \leq y$ et $\alpha \geq 0$, alors $\alpha \times x \leq \alpha \times y$.
 - Ajouter des inégalités : si $x \leq y$ et $a \leq b$, alors $x + a \leq y + b$.
 - Multiplier des inégalités de nombres positifs : si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq a \leq b$, alors $x \times a \leq y \times b$.
 - Appliquer de chaque côté une fonction croissante : si f est croissante sur un intervalle I et si $x, y \in I$ sont tels que $x \leq y$, alors $f(x) \leq f(y)$.
Fonctions croissantes de référence : \exp sur \mathbb{R} , \ln sur \mathbb{R}_+^* , $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}_+ , $x \mapsto x^3$ sur \mathbb{R} , $x \mapsto \sqrt{x}$ sur \mathbb{R}_+ .
- Les opérations suivantes renversent le sens des inégalités :
 - Multiplier par un réel négatif α : si $x \leq y$ et $\alpha \leq 0$, alors $\alpha \times x \geq \alpha \times y$.
 - Passer à l'inverse dans des inégalités de nombres de même signe : si $0 < x \leq y$, alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$; si $x \leq y < 0$, alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.
Attention, si x et y sont de signes opposés alors on ne peut pas passer à l'inverse dans l'inégalité $x \leq y$.
Par ailleurs on ne peut pas diviser des inégalités (même de nombres positifs) : si nécessaire il faut procéder en deux temps avec passage à l'inverse puis multiplication (voir la question 3. de l'exercice 6).
 - Appliquer de chaque côté une fonction décroissante : si f est décroissante sur un intervalle I et si $x, y \in I$ sont tels que $x \leq y$, alors $f(x) \geq f(y)$.
Fonction décroissante de référence : $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}_- .
- On retiendra qu'il faut toujours être prudent lorsque l'on passe au carré dans une inégalité :
 - Si $0 \leq x \leq y$, alors $x^2 \leq y^2$.
 - Si $x \leq y \leq 0$, alors $x^2 \geq y^2$.
 - Si $x \leq 0 \leq y$, alors il n'est pas possible de prendre le carré dans l'inégalité.

b) Méthode

Pour comparer deux nombres A et B :

- Dans de nombreux cas, on étudie le signe de la différence $A - B$. Pour cela :
 - Il arrive que le signe de $A - B$ s'obtienne par une étude directe en factorisant l'expression ou en la réduisant au même dénominateur (il est toujours plus simple d'étudier le signe d'un produit ou d'un quotient que d'une somme ou d'une différence). Les identités remarquables rappelées dans la partie précédente peuvent être utiles!
 - Si l'on doit comparer deux nombres $A(x)$ et $B(x)$ avec x un réel appartenant à un certain intervalle I , on peut aussi tenter d'étudier la fonction $f : x \mapsto A(x) - B(x)$, le signe de f sur I pouvant souvent se déduire de son tableau de variations. Ce point de vue est un peu plus développé dans le chapitre sur les fonctions.
- Toujours dans le cas où l'on doit prouver que $A(x) \leq B(x)$ avec x un réel appartenant à un certain intervalle I , on peut aussi partir de l'information connue sur x (par exemple $x \geq 0$ si $I = [0, +\infty[$, ou $1 \leq x \leq 2$ si $I = [1, 2]$) pour établir de proche en proche par opérations successives l'inégalité $A(x) \leq B(x)$.

c) Conseils

- Les valeurs approchées suivantes sont utiles : $e \approx 2,7$; $\ln(2) \approx 0,7$; $\sqrt{2} \approx 1,4$.
- Il faut aussi connaître les inégalités suivantes (justifiées par la monotonie des fonctions utilisées) :

$$\forall x \geq 1, x^n \geq 1 \quad \forall x \in [0, 1], 0 \leq x^n \leq 1$$

$$\forall x \geq 0, e^x \geq 1 \quad \forall x \leq 0, 0 < e^x \leq 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$$
- Il existe d'autres méthodes plus sophistiquées permettant d'établir des inégalités, par exemple à partir de la convexité d'une fonction ou à l'aide de formules de Taylor, on les rencontrera dans le cours dans l'année.

d) Exercices

? Exercice 6.

1. Comparer les nombres $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, (1 + x)^2 \geq 4x$.
3. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{3} \leq \frac{2 + \cos(x)}{2 + \sin(x)} \leq 3$.
4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 2\ln(x) < x$.

? Exercice 7.

1. Comparer les nombres $\frac{1}{\ln(2)}$ et $\frac{2}{\ln(3)}$, ainsi que les nombres $\frac{e-1}{2e-3}$ et 1.
2. Encadrer les réels $\sqrt{29}$ et $\frac{16 - \sqrt{73}}{3}$ par deux entiers consécutifs.

? Exercice 8.

1. Prouver que : $\forall x \in]3, +\infty[, \frac{7x-18}{2x-5} > 3$.
2. Prouver que : $\forall x \in [0, +\infty[, x \leq \ln(1 + e^x) \leq x + \ln(2)$.
3. Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 - e^{-x} \leq x$.

? Exercice 9.

Soit f la fonction définie par : $\forall t \in [1, +\infty[, f(t) = \frac{t^2 - 1}{2t}$.
Prouver que : $\forall t \in [1, +\infty[, 2f(\sqrt{t}) \leq f(t)$.

6. Résoudre une équation simple

a) Rappels

— On dispose d'une part des propriétés importantes suivantes :

Un produit de nombres est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a :

$$a \times b = 0 \iff a = 0 \text{ ou } b = 0$$

Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul.
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{a}{b} = 0 \iff a = 0$$

Deux fractions sont égales si et seulement si leurs « produits en croix » sont égaux.
Soit $a, c \in \mathbb{R}$ et $b, d \in \mathbb{R}^*$. On a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = c \times b$$

— La notion de fonction bijective sert souvent.

Définition (bijection).

On dit qu'une fonction f de I dans J est bijective si tout élément de J admet un unique antécédent dans I par f .

En particulier :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .
Si f est bijective sur I et si $x, y \in I$, alors :

$$f(x) = f(y) \iff x = y$$

Fonctions bijectives de référence : \exp de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^* , \ln de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R} , $x \mapsto x^2$ de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ ,
 $x \mapsto x^2$ de \mathbb{R}_- dans \mathbb{R}_+ , $x \mapsto x^3$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $x \mapsto \sqrt{x}$ de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R}_+ .
Les deux sens de l'équivalence sont utiles, par exemple :

— Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $x = y \iff \ln(x) = \ln(y)$.

— Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a : $x^3 = y^3 \iff x = y$.

— La fonction $x \mapsto x^2$ n'étant pas bijective sur \mathbb{R} , le résultat suivant (déjà mentionné) est utile :

Soit a un réel positif et soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^2 = a \iff x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Par ailleurs si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.

b) Méthode

Pour résoudre une équation d'inconnue un réel x :

— On détermine l'ensemble de définition \mathcal{D} de l'équation, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que l'équation ait un sens.

Exemple.

— L'ensemble de définition de $(E) : x + 2 = 3 - x$ est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ puisque l'équation (E) a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— L'ensemble de définition de $(E') : \sqrt{x-1} = \sqrt{2x}$ est $\mathcal{D} = [1 + \infty[$ puisque l'équation (E') a un sens si et seulement si $x - 1 \geq 0$ et $2x \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geq 1$.

— Pour $x \in \mathcal{D}$, on utilise les propriétés de la partie précédente pour modifier l'équation par des équivalences successives jusqu'à arriver à isoler x . Il est souvent utile à un moment donné de mettre les termes en x d'un côté de l'égalité et les termes constants de l'autre.

Exemple.

— Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x + 2 = 3 - x \iff x + x = 3 - 2 \iff 2x = 1 \iff x = \frac{1}{2}$$

— Soit $x \in [1, +\infty[$. Comme $t \mapsto \sqrt{t}$ est bijective sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$\sqrt{x-1} = \sqrt{2x} \iff x-1 = 2x \iff -1 = 2x-x \iff x = -1$$

— Pour conclure, il faut enfin vérifier que les solutions trouvées à l'issue des équivalences appartiennent bien à l'ensemble de définition de l'équation.

Exemple.

— L'ensemble de définition de $(E) : x + 2 = 3 - x$ étant $\mathcal{D} = \mathbb{R}$, on déduit du calcul précédent que (E) admet une unique solution : $\frac{1}{2}$.

— L'ensemble de définition de $(E') : \sqrt{x-1} = \sqrt{2x}$ étant $\mathcal{D} = [1 + \infty[$, la solution -1 obtenue par le calcul précédent est à rejeter. On en déduit que (E') n'admet pas de solution.

Attention.

Lorsque l'on résout une équation, on procède par équivalences successives (sauf

cas de force majeur), en utilisant le symbole \iff et en *justifiant* les équivalences non évidentes (argument de bijectivité par exemple). C'est ce qui a été fait dans l'exemple précédent.

Il est hors de question d'écrire des lignes à la suite sans symbole logique entre elles!

Si l'on ne peut pas justifier une équivalence, on écrira «donc» à la place du symbole « \iff », mais comme l'équivalence sera perdue, il sera nécessaire à la fin de la résolution de vérifier si les valeurs trouvées sont bien solutions de l'équation.

On renvoie au document «raisonner-rédiger» pour mieux comprendre les raisonnements par implications et par équivalences.

c) **Conseils**

— Attention, pour pouvoir passer au carré dans une égalité - tout en conservant l'équivalence - il faut impérativement que les deux membres de l'égalité soient de même signe :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, a = b \iff a^2 = b^2 \quad ; \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_-, a = b \iff a^2 = b^2$$

Si a et b sont de signes opposés ou si leurs signes ne sont pas connus, il n'est alors pas possible de passer au carré dans l'égalité.

— Attention à bien lire la question posée : parfois on doit prouver qu'une équation admet une unique solution sans qu'il ne soit demandé de *calculer* cette solution. Dans ce cas il n'est souvent pas possible de résoudre l'équation considérée avec les méthodes vues dans ce chapitre mais il faut utiliser le théorème de la bijection (voir le chapitre sur les fonctions dans l'année).

d) **Exercices**

? Exercice 10.

Résoudre les équations suivantes :

- $(E_1) : \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} = 0.$
- $(E_2) : \ln(x) + \ln(x+1) = \ln(x+2).$
- $(E_3) : 2e^{-x} - e^{-2x} = 0.$

? Exercice 11.

Résoudre les équations suivantes :

- 1. $(x+2)^2 = 1.$
- 2. $(x+2)^3 = 1.$
- 3. $x^5 - 4x = 0.$
- 4. $x^5 + 4x = 0.$

? Exercice 12.

Résoudre les équations suivantes :

- 1. $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}.$
- 2. $\ln(x) + \ln(2x) + \ln(4x) = 3.$
- 3. $\sqrt{2x-1} = x.$
- 4. $\sqrt{\ln(x)} = (\ln(x))^2.$

7. Résoudre une inéquation simple

a) **Rappels**

— On rappelle les règles de signes suivantes :

Signe de a	Signe de b	Signe de $a \times b$	Signe de a/b
+	+	+	+
+	-	-	-
-	+	-	-
-	-	+	+

— La notion de fonction strictement croissante sert souvent :

📖 Définition.

Une fonction f définie sur un intervalle I est strictement croissante sur I si :

$$\forall x, y \in I, x < y \implies f(x) < f(y)$$

On dispose de définitions analogues pour une fonction croissante (l'inégalité de droite est large), une fonction strictement décroissante et une fonction décroissante.

En utilisant la contraposée de cette définition on dispose des équivalences suivantes.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I strictement croissante sur I .

Alors :

$$\forall x, y \in I, (x < y \iff f(x) < f(y))$$

et

$$\forall x, y \in I, (x \leq y \iff f(x) \leq f(y))$$

Fonctions strictement croissantes de référence : \exp sur \mathbb{R} , \ln sur \mathbb{R}_+^* , $x \mapsto x^2$ sur \mathbb{R}_+ , $x \mapsto x^3$ sur \mathbb{R} , $x \mapsto \sqrt{x}$ sur \mathbb{R}_+ .

Les deux sens de l'équivalence sont utiles, par exemple :

— Soit $x, y \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $x < y \iff \ln(x) < \ln(y)$.

— Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On a : $x^3 \geq y^3 \iff x \geq y$.

On peut aussi appliquer aux deux membres d'une inégalité une fonction strictement décroissante, ce qui a pour conséquence de renverser le sens de l'inégalité. Ce cas intervient en particulier lors du passage à l'inverse dans une inégalité dont les membres sont de même signe.

— La fonction $x \mapsto x^2$ n'étant pas strictement croissante sur \mathbb{R} , le résultat suivant est utile :

Soit a un réel positif et soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$$

et :

$$x^2 \geq a \iff x \geq \sqrt{a} \text{ ou } x \leq -\sqrt{a}$$

Ces équivalences sont aussi valables avec des inégalités strictes.

b) Méthode

Pour résoudre une inéquation d'inconnue un réel x :

- On détermine l'ensemble de définition \mathcal{D} de l'inéquation, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que l'inéquation ait un sens.

Exemple.

- L'ensemble de définition de $(I) : \ln(x) \leq \ln(1-x)$ est $\mathcal{D} =]0, 1[$ puisque l'inéquation (I) a un sens si et seulement si $x > 0$ et $1-x > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$ et $x < 1$.
- L'ensemble de définition de $(I') : x^4 > x^3$ est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- Pour $x \in \mathcal{D}$, on utilise les propriétés de la partie précédente pour modifier l'inéquation par des équivalences successives jusqu'à arriver à l'une ou l'autre des situations suivantes :

- On réussit à isoler x , souvent en mettant à un moment donné les termes en x d'un côté de l'inégalité et les termes constants de l'autre.
- On aboutit à l'étude du signe d'un produit ou d'une fraction, en général en factorisant l'expression ou en réduisant au même dénominateur les fractions qui apparaissent. On en déduit les réels x solutions à l'aide d'un tableau de signes, écrit pour $x \in \mathcal{D}$.

Exemple.

- Cas de (I) . Soit $x \in]0, 1[$. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ étant strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , on a :

$$\ln(x) \leq \ln(1-x) \iff x \leq 1-x \iff 2x \leq 1 \iff x \leq \frac{1}{2}$$

- Cas de (I') . Soit $x \in \mathbb{R}$. Il ne faut surtout pas diviser par x^3 dans l'inégalité $x^4 > x^3$, puisque le signe de x^3 n'est pas connu ! La bonne méthode consiste à tout mettre à gauche puis à factoriser :

$$x^4 > x^3 \iff x^4 - x^3 > 0 \iff x^3(x-1) > 0$$

On s'aide alors d'un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$
$x-1$		$-$	0	$+$
$x^3(x-1)$		$+$	0	$+$

Ainsi : $x^4 > x^3 \iff x < 0$ ou $x > 1$.

- Pour conclure, il faut enfin vérifier que les solutions trouvées à l'issue de l'étape précédente appartiennent bien à l'ensemble de définition de l'inéquation.

Exemple.

- L'ensemble de définition de $(I) : \ln(x) \leq \ln(1-x)$ est $\mathcal{D} =]0, 1[$. On déduit alors du calcul précédent que (I) admet pour ensemble de solutions : $]0, \frac{1}{2}]$.
- L'ensemble de définition de $(I') : x^4 > x^3$ est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. On déduit alors du calcul précédent que (I') admet pour ensemble de solutions : $] -\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.

Attention.

Lorsque l'on résout une inéquation, on procède par équivalences successives (sauf cas de force majeure), en utilisant le symbole \iff et en *justifiant* les équivalences non évidentes (argument de stricte monotonie par exemple). C'est ce qui a été fait dans un exemple précédent.

Il est hors de question d'écrire des lignes à la suite sans symbole logique entre elles !

Si l'on ne peut pas justifier une équivalence, on écrira «donc» à la place du symbole « \iff », mais comme l'équivalence sera perdue, il sera nécessaire à la fin de la résolution de vérifier si les valeurs trouvées sont bien solutions de l'inéquation.

On renvoie au document «raisonner-rédiger» pour mieux comprendre les raisonnements par implications et par équivalences.

c) Conseils

Il faut souvent faire preuve de prudence lorsque l'on manipule des inégalités :

- Si l'on multiplie ou divise les deux côtés de l'inégalité par un réel α , le signe de ce réel doit être maîtrisé, notamment lorsqu'il dépend de l'inconnue x :
 - Si le réel α est strictement positif, alors l'inégalité ne change pas de sens.
 - Si le réel α est strictement négatif, alors l'inégalité change de sens.
- Pour passer à l'inverse dans une inégalité, il faut que les deux membres de l'inégalité soient de même signe, et dans ce cas le passage à l'inverse renverse le sens de l'inégalité.
- Pour passer au carré dans une inégalité, il faut que les deux membres de l'inégalité soient positifs, et dans ce cas le passage au carré conserve le sens de l'inégalité. On peut aussi éventuellement passer au carré dans une inégalité de nombres négatifs, mais dans ce cas le passage au carré renverse le sens de l'inégalité puisque la fonction $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_- .

Dans le cas où les signes ne sont pas maîtrisés, la méthode la plus simple consiste à ramener tous les termes dans le même membre de l'inégalité, puis factoriser ou réduire au même dénominateur pour pouvoir conclure à l'aide d'un tableau de signes.

d) Exercices

? Exercice 13.

Résoudre les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \frac{x+1}{x} \leq \frac{x}{x+1} \quad ; \quad (I_2) : 2e^{-x} - e^{-2x} > 0$$

? Exercice 14.

Résoudre les équations suivantes :

1. $(x+2)^2 \leq 1$.
2. $(x+2)^3 \leq 1$.
3. $\sqrt{2x-1} > x$.
4. $\sqrt{2x-1} < x$.

? Exercice 15.

Résoudre les équations suivantes :

1. $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \geq \frac{1}{2}$.
2. $\ln(x) + \ln(2x) + \ln(4x) \leq 3$.
3. $\sqrt{x^2 - x} > \sqrt{2 - x}$.

8. Résoudre une équation se ramenant à une équation du second degré

a) Rappels

Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.

On considère l'équation du second degré suivante :

$$(E) : ax^2 + bx + c = 0$$

Pour résoudre l'équation (E), dans le cas général, on calcule dans un premier temps son discriminant, généralement noté Δ :

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$$

On discute ensuite selon le signe du discriminant Δ :

— Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \times a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \times a}$$

— Si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2 \times a}$.

— Si $\Delta < 0$, alors l'équation (E) n'admet pas de solution.

En pratique, si l'on peut éviter de calculer le discriminant, en utilisant par exemple une identité remarquable, on le fera sans hésiter!

⚠ Attention.

Généralement on n'introduit pas les notations a, b, c , ce sont des valeurs explicites sans nom : ainsi n'écrivez pas bêtement $\Delta = b^2 - 4ac$ sur votre copie! mais calculez explicitement la valeur du discriminant (il n'est d'ailleurs par toujours nécessaire de l'appeler Δ dans la rédaction).

b) Méthode

- La méthode de résolution d'équations vue précédemment s'applique aussi dans ce paragraphe, à ceci-près qu'ici on rencontrera une équation du second degré à un certain moment du raisonnement. Il reste important de déterminer l'ensemble de définition de l'équation avant de commencer sa résolution.
- Il arrive que l'on puisse se ramener à une équation du second degré à l'aide d'un changement d'inconnue. Cela ne pose pas de problème particulier si l'on n'oublie pas de revenir à l'inconnue initiale à la fin de la résolution.
- Parfois on peut rencontrer une équation faisant apparaître une racine carrée. Dans ce cas isoler la racine carrée d'un côté de l'égalité puis passer au carré est en général une bonne idée. Mais attention, pour conserver l'équivalence en passant au carré dans une égalité il faut vérifier que les deux membres de l'égalité sont de même signe!

c) Conseils

Le calcul du discriminant n'est pas toujours nécessaire (*on l'évite autant que possible!*) :

- Soit $a \geq 0$ fixé. L'équation $x^2 = a$ admet pour solutions $-\sqrt{a}$ et \sqrt{a} .
- Il est parfois possible de factoriser l'expression grâce à une identité remarquable.

Exemple.

On a : $x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1$.

d) Exercices

? Exercice 16.

Résoudre l'équation suivante : $-2x^4 + 3x^2 + 2 = 0$.

? Exercice 17.

Résoudre les équations suivantes :

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1. $2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 = 0$. | 4. $1 - 2e^x = \frac{e^{-x}}{3}$. |
| 2. $\ln(x) + \ln(x+1) = 0$. | 5. $x = \sqrt{2-x}$. |
| 3. $e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 = 0$. | 6. $x - \sqrt{x} = \frac{3}{2}$. |

9. Résoudre une inéquation se ramenant à une inéquation du second degré

a) Rappels

Soit a, b et c trois réels tels que $a \neq 0$.

Soit P le polynôme du second degré défini par : $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + bx + c$.

Pour déterminer le signe de P , en général, on calcule dans un premier temps son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \times a \times c$$

On discute ensuite selon le signe du discriminant Δ :

- Si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines distinctes x_1 et x_2 où $x_1 < x_2$. Dans ce cas P est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle $[x_1, x_2]$ délimité par les racines, et du signe de $-a$ dans l'intervalle $[x_1, x_2]$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$P(x)$	signe de a		0	signe de $-a$

- Si $\Delta = 0$, alors P admet une unique racine x_0 . Dans ce cas P est du signe de a :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	signe de a		0

- Si $\Delta < 0$, alors P n'admet pas de racine. Dans ce cas P est du signe de a :

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	

En pratique, si l'on peut éviter de calculer le discriminant, en utilisant par exemple une identité remarquable, on le fera sans hésiter!

b) Méthode

- Résoudre une inéquation du second degré revient à étudier le signe d'un polynôme du second degré, ce qui impose de connaître ses racines éventuelles. La résolution d'une inéquation du second degré nécessite donc en général la résolution de l'équation du second degré associé.
- La méthode de résolution d'inéquations vue précédemment s'applique aussi dans ce paragraphe, à ceci-près qu'ici on rencontrera une inéquation du second degré à un certain moment du raisonnement. Il reste important de déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation avant de commencer sa résolution.
- Il arrive que l'on puisse se ramener à une inéquation du second degré à l'aide d'un changement d'inconnue. Cela ne pose pas de problème particulier si l'on n'oublie pas de revenir à l'inconnue initiale à la fin de la résolution.
- Parfois on peut rencontrer une inéquation faisant apparaître une racine carrée. Dans ce cas isoler la racine carrée d'un côté de l'inégalité puis passer au carré est en général une bonne idée. Mais attention, pour conserver l'équivalence lors du passage au carré dans une inégalité il faut vérifier que les deux membres de l'inégalité sont de même signe!

c) Conseils

Les cas classiques suivants sont à connaître :

- Soit $a \geq 0$ fixé. On a l'équivalence : $x^2 \leq a \iff -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{a}$.
- Soit $a \geq 0$ fixé. On a l'équivalence : $x^2 \geq a \iff x \geq \sqrt{a}$ ou $x \leq -\sqrt{a}$.

Ces équivalences sont aussi valables avec des inégalités strictes.

d) Exercices

? Exercice 18.

Résoudre l'inéquation suivante : $-2x^4 + 3x^2 + 2 \geq 0$.

? Exercice 19.

Résoudre les inéquations suivantes :

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 1. $2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 > 0$. | 4. $1 - 2e^x \geq \frac{e^{-x}}{3}$. |
| 2. $\ln(x) + \ln(x+1) \leq 0$. | 5. $x > \sqrt{2-x}$. |
| 3. $e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 > 0$. | 6. $x - \sqrt{x} = \frac{3}{2}$. |

10. Rédiger des récurrences

Un raisonnement par récurrence comprend une ou plusieurs initialisations (selon si la récurrence est simple ou multiple), et une étape d'hérédité. Au lycée selon vos professeurs vous avez adopté une

méthode de rédaction systématique à laquelle vous avez dû vous habituer (parfois dans la douleur) : malheureusement la plupart de ces façons de rédiger sont incorrectes d'un point de vue logique. Je renvoie au document «Raisonner-rédiger» pour les détails du pourquoi votre rédaction est, éventuellement, incorrecte.

On va donc prendre de (nouvelles?) bonnes habitudes dès maintenant :

- ▷ On définit la propriété à démontrer, qui dépend d'un entier, généralement noté n , appartenant à un ensemble A , généralement \mathbb{N} .
Pour cela on écrit «**pour tout** $n \in A$, **on note** $\mathcal{H}_n : \dots$ ».
Il est essentiel de commencer par introduire n , puis de donner un nom à la propriété que l'on souhaite démontrer (ici \mathcal{H}_n mais on peut la noter autrement du moment que la dépendance en n soit indiquée).
- ▷ Initialisation(s) : on démontre \mathcal{H}_n pour les premières valeurs de $n \in A$, selon si la récurrence est simple ou multiple. On note pour la suite n_1 le dernier rang pour lequel l'initialisation a été démontrée.
- ▷ Hérité. On rédigera **toujours** de la façon suivante : «**Soit** $n \in A$, $n \geq n_1$. **On suppose que** \mathcal{H}_n **est vraie.**» (éventuellement on suppose aussi \mathcal{H}_{n-1} et les précédentes si la récurrence est multiple). Inutile d'en faire plus avec des tournures de phrases inutiles qui risquent d'ajouter à la confusion (comme « n fixé» ou «un certain n »).
Puis on introduit les éventuelles hypothèses nécessaires à la démonstration de \mathcal{H}_{n+1} . Jamais il ne faudra «faire varier» n , autrement dit il n'y aura pas de « $\forall n$ » dans cette partie de la rédaction puisque n est «fixé».
On démontre \mathcal{H}_{n+1} , en utilisant \mathcal{H}_n a priori sinon c'est qu'il est inutile de raisonner par récurrence.
- ▷ Conclusion : terminer l'hérité par «...ce qui montre \mathcal{H}_{n+1} et achève la récurrence.» est largement suffisant pour conclure, il n'est pas utile de rédiger un paragraphe de blabla sur le principe de récurrence.

Les trois exemples suivants doivent servir des modèles de rédaction (plus que le paragraphe qui précède).

Exemple.

Récurrence simple.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de $u_0 = 1$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

Solution.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n : u_n$ existe et $u_n > 0$.

- ▷ $n = 0$. L'énoncé donne $u_0 = 1$, donc u_0 existe et $u_0 > 0$, donc \mathcal{H}_0 est vraie.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que \mathcal{H}_n est vraie.
Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$, donc $1 + u_n > 1 \geq 0$, donc il est possible de considérer $\sqrt{1+u_n}$, ce qui montre que u_{n+1} existe. Par ailleurs, par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur \mathbb{R}_+ , l'inégalité $1 + u_n > 1$ donne $\sqrt{1+u_n} > \sqrt{1}$, donc $u_{n+1} > 1 > 0$.
Ainsi \mathcal{H}_{n+1} est vraie, ce qui achève la récurrence.

Exemple.

Récurrence double.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de $u_0 = 0, u_1 = 1$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

Solution.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n : u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$.

- ▷ $n = 0$. On calcule $\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0}{\sqrt{5}} = 0 = u_0$, donc \mathcal{H}_0 est vraie.
- ▷ $n = 1$. On calcule $\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1}{\sqrt{5}} = 1 = u_1$, donc \mathcal{H}_1 est vraie.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que \mathcal{H}_n et \mathcal{H}_{n+1} sont vraies. (ce qui est équivalent, mais plus confortable, à considérer $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, et supposer que \mathcal{H}_{n-1} et \mathcal{H}_n sont vraies).
Par définition : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ (surtout pas de «pour tout n » ici!).
Par hypothèse de récurrence on peut calculer :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1\right) \right)$$

Or $\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2}{2^2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$, et de même $\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$.

Ainsi :

$$u_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} \right)$$

si bien que \mathcal{H}_{n+2} est vraie, ce qui achève la récurrence.

Exemple.

Récurrence forte.

Démontrer que tout entier naturel non nul n s'écrit sous la forme $n = 2^p(2q+1)$ où $p, q \in \mathbb{N}$.

Solution.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{H}_n : \exists p, q \in \mathbb{N}, n = 2^p(2q+1)$.

- ▷ $n = 1$. On écrit $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$ donc avec $p = q = 0 \in \mathbb{N}$, on a montré \mathcal{H}_1 .
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, \mathcal{H}_k est vraie. On distingue deux cas :
 - Si $n+1$ est impair, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n+1 = 2q+1$ et comme $n \geq 1, 2q+1 \geq 1$ donc $2q \geq 0$ donc $q \geq 0$, donc finalement $q \in \mathbb{N}$. On a donc écrit $n = 2^0(2q+1)$ où $0, q \in \mathbb{N}$.
 - Sinon, $n+1$ est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n+1 = 2k$, mais comme $n \geq 1, k \geq 0$ et de plus $k \leq \frac{n+1}{2} \leq \frac{n+n}{2} = n$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence (forte) à k : il existe $p', q \in \mathbb{N}$ tels que $k = 2^{p'}(2q+1)$. Ainsi $n+1 = 2^{p'+1}(2q+1)$ où $p = p'+1 \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$.
 Dans tous les cas, on a montré \mathcal{H}_{n+1} , ce qui achève la récurrence.

? Exercice 20.

Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{n-1} \leq n!$.

? Exercice 21.

Soit (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 3$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.
 Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 1$.

? Exercice 22.

On rappelle qu'un entier $p \in \mathbb{N}$ est premier s'il a possède exactement deux diviseurs positifs, en l'occurrence 1 et p . En particulier 1 n'est pas premier.
 Démontrer que tout entier $n \geq 2$ s'écrit comme un produit de nombres premiers.

11. Sommes et produits : symboles \sum et \prod

Soient u_1, \dots, u_n des nombres, où n est un entier naturel. On note $\sum_{k=1}^n u_k$ leur somme et $\prod_{k=1}^n u_k$ leur produit. Cela signifie, en écrivant en extension :

$$\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n u_k = u_1 \times u_2 \times \dots \times u_n$$

Le formalisme rigoureux et la manipulation systématique de ces concepts fera l'objet d'un chapitre du cours de début d'année.

En attendant, voici trois exercices pour vous familiariser avec leur manipulation.

? Exercice 23 (somme arithmétique).

Déterminer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ la valeur de $S_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n$.

Indication : on pourra sommer S_n une fois «dans l'ordre» et une fois «à l'envers» pour obtenir la valeur de $2S_n$.

? Exercice 24 (somme géométrique).

Déterminer en fonction de $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$ la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$.

Indication : on pourra calculer $(1 - q)S_n$ en développant le produit et en écrivant la somme en extension.

? Exercice 25 (coefficients binomiaux).

On «rappelle» que si $n, p \in \mathbb{N}$ sont tels que $p \leq n$, alors $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Montrer que : $\binom{n}{p} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$.

II. Étude de fonctions

1. Calculs de dérivées

📖 Définition (dérivée en un point, dérivée sur un intervalle).

Soit I un intervalle non vide ni réduit à un point (on dit aussi que I est *non trivial*).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$.

— On dit que f est *dérivable* en a si le taux d'accroissement $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a .

Dans ce cas, cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en a et on la note $f'(a)$.

— On dit que f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout point de I .

On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans \mathbb{R} . Si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, la fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est bien définie sur I et est appelée la *dérivée* de f .

Remarque.

La définition précédente s'étend à une fonction définie sur un ensemble qui est réunion d'intervalles non triviaux. Les énoncés suivants, donnés pour des fonctions définies sur un intervalle non trivial, s'étendent de la même façon.

⚠ Attention.

Comme cela a déjà été signalé, le nombre dérivé de f en a se note $f'(a)$ et non pas $f(a)'$. Cette dernière notation n'a pas de sens! (même si l'on peut comprendre l'intention de celui ou celle qui l'écrit).

De même, la fonction dérivée de f est $x \mapsto f'(x)$, et non $x \mapsto f(x)'$.

Cependant, s'il s'agit de dériver une expression dépendant de x mais qui n'a pas forcément été nommée, on pourra utiliser la notation $\frac{d}{dx}(f(x))$.

Par exemple, si $f : x \mapsto x^2$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

On veillera cependant à ne pas abuser de cette notation.

On suppose connues les dérivées des fonctions usuelles.

On admet à la suite quelques résultats, qui pour la plupart ont été vus au lycée. Les preuves de ces résultats feront l'objet d'un chapitre ultérieur, pour l'instant seule leur manipulation est un objectif.

🎓 Proposition (tangente).

Soit I un intervalle non trivial. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $a \in I$.

Si f est dérivable en a , alors la droite d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ est la tangente au graphe de f en a .

Exemple.

La fonction $f : x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x$$

La tangente au graphe de f au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) \quad \text{i.e.} \quad y = x + 1$$

🎓 Proposition (linéarité de la dérivation).

Soit I un intervalle non trivial. Soient f, g deux fonctions de I vers \mathbb{R} . Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$.

On suppose que f et g sont dérivables en x_0 . Alors :

- $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.

En d'autres termes la dérivation est linéaire :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Proposition (multiplication, inverse, quotient).

Soit I un intervalle non trivial. Soient f, g deux fonctions de I vers \mathbb{R} . Soit $x_0 \in I$.
On suppose que f et g sont dérivables en x_0 .
Alors :

- $h = f \times g$ est dérivable en x_0 et

$$h'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$$

- Si l'on suppose de plus que $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

- Si l'on suppose encore $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Attention.

On évitera de dériver une fonction de la forme $\frac{1}{g}$ comme une fonction de la forme $\frac{f}{g}$ (avec f constante égale à 1), ceci afin d'éviter les erreurs de calculs.

Exemple.

1. Soit $f : x \mapsto \frac{3}{x \ln(x)}$.

On peut considérer $u : x \mapsto x \ln(x)$, si bien que $f = 3 \times \frac{1}{u}$ se dérive comme l'inverse d'une fonction et non comme le quotient de deux fonctions.

Par ailleurs, u est le produit de $x \mapsto x$ dérivable sur \mathbb{R} et $x \mapsto \ln(x)$ dérivable sur \mathbb{R}_+^* , si bien que u est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad u'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$$

Enfin, par quotient f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad f'(x) = 3 \left(\frac{1}{u}\right)'(x) = 3 \frac{-\ln(x) - 1}{(x \ln(x))^2}$$

2. Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x-1}$. On peut considérer $u : x \mapsto \ln(x)$ et $v : x \mapsto x-1$. u est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et v est dérivable sur \mathbb{R} et ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Par quotient $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times (x-1) - 1 \times \ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{x-1-\ln(x)}{x(x-1)^2}$$

Proposition (composition).

Soient I et J deux intervalles non triviaux. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$ (pour que la composition soit possible). Soit $x_0 \in I$.
On suppose que f est dérivable en x_0 et que g est dérivable en $f(x_0)$.
Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$$

Exemple.

1. Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$. f est la composée de $u : x \mapsto -x^2$ qui est dérivable sur \mathbb{R} et de $v : x \mapsto e^x$ qui est dérivable sur \mathbb{R} .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{u} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2 \\ & & \mathbb{R} \xrightarrow{v} \mathbb{R} \\ & & x \mapsto e^x \\ \hline \mathbb{R} & \xrightarrow{f=v \circ u} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x^2} \end{array}$$

La composition est possible, f est dérivable sur \mathbb{R} et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

2. Soit $f : (x, t) \mapsto x^2 \sin(2xt)$. C'est une fonction de deux variables x et t , définie sur \mathbb{R}^2 .
— Si x est fixé, et que l'on considère la fonction $g : t \mapsto x^2 \sin(2xt)$, cette dernière est dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt}(x^2 \sin(2xt)) = 2x^3 \cos(2xt)$$

- Si t est fixé, et que l'on considère la fonction $h : x \mapsto x^2 \sin(2xt)$, cette dernière est dérivable sur \mathbb{R} et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dx}(x^2 \sin(2xt)) = 2x \sin(2xt) + 2tx^2 \cos(2xt) = 2x(\sin(2xt) + tx \cos(2xt))$$

2. Calculs de limites

Soit f une fonction, si a, ℓ sont des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$, si f a pour limite ℓ en a , on peut noter $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ à la place de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

La définition de la limite sera vue en fin de premier semestre, on se contente pour l'instant de la perception intuitive vue au lycée. Notons que dans la notation précédente et dans les énoncés à venir, pour étudier la limite en a , il faut que la fonction soit définie sur un intervalle non trivial dont a est un point ou une extrémité : on dira que la fonction est définie «au voisinage de a » pour indiquer que cette condition est remplie.

Attention.

On prendra bien soin de ne **jamais** noter \lim (ni la notation avec la flèche) tant que l'**existence** de la limite n'a pas été **démontrée**.
En pratique, on fait des calculs avec l'expression de $f(x)$, et ce n'est qu'à la fin, pour conclure, que l'on utilise \lim (ou la flèche).

On suppose connue les limites des fonctions usuelles.

Souvent, les calculs de limites se heurtent à des formes indéterminées. Une grande partie de ces indéterminations peuvent être levées grâce à l'utilisation des croissances comparées : soient α, β des entiers naturels non nuls, soit γ un réel strictement positif, alors :

$$\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad x^\alpha \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

En particulier :

$$\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \frac{e^x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

Toutes les indéterminations ne peuvent être levées à partir de ces méthodes. Nous verrons plus loin comment utiliser les taux d'accroissement pour calculer des limites, mais surtout au deuxième semestre (ou en avant première dans l'annexe «Outils mathématiques pour les sciences»), les développements limités.

Voilà les principales méthodes à retenir.

Utilisation des opérations usuelles (combinaison linéaire, produit, quotient, composition).

Exemple.

- Soit f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \ln x + x\sqrt{x} + e^x$. Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et en 0^+ ?
Les opérations usuelles s'appliquent directement sans formes indéterminées (E.I. en abrégé), on obtient directement (existence des limites garantie par les opérations usuelles) :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$$

Il n'est pas nécessaire, en l'absence de E.I., de détailler les calculs.

- Soit g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = e^{\sin x} - \cos x$. Quelles sont les limites de g en 0 et en $\frac{\pi}{2}$?

On a :

$$\sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad e^t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

donc par composition $e^{\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$. Par ailleurs $\cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc finalement : $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par différence.

De même :

$$\sin x \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} 1 \quad \text{et} \quad e^t \xrightarrow{t \rightarrow 1} e$$

donc par composition $e^{\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} e$. Par ailleurs $\cos x \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} 0$ donc finalement : $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} e$

Ici tout les calculs sont détaillés, mais comme pour l'exemple précédent, en l'absence de E.I. les détails ne sont pas obligatoires, vous pouvez donner le résultat directement.

Factorisation par le terme «le plus fort».

face à des indéterminations du type « $\pm\infty + \pm\infty$ » ou « $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ », on factorise par le terme «le plus fort» au sens des croissances comparées.

Grossièrement, en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur les puissances positives qui elles mêmes l'emportent sur le logarithme.

Exemple.

- Soit f_1 définie sur \mathbb{R} par $f_1(x) = x^5 - 3x^4 + x^2 + 1$. Quelle est la limite de f en $-\infty$?
Il s'agit a priori d'une forme indéterminée (du type « $-\infty - \infty + \infty + 1$ »). On factorise par le terme le plus fort qui est x^5 :

$$f_1(x) = x^5 \left(1 - 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} \right)$$

Or le terme de la parenthèse tend vers 1 et $x^5 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$, donc par produit $f_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$.

On retrouve ici le résultat utilisé au lycée «la limite d'une fonction polynômiale en $\pm\infty$ est la limite de son terme de plus haut degré». On n'utilisera plus ce résultat de lycée mais cette factorisation pour lever les indéterminations, c'est une méthode bien plus générale.

Pour la rédaction, il est nécessaire de faire apparaître la dernière factorisation, car c'est elle qui lève l'indétermination.

- Soit f_2 définie sur $]1 + \sqrt{2}, +\infty[$ (sur un tel intervalle le dénominateur ne s'annule pas, vous êtes invités à le vérifier) par $f_2(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 - x}$. Quelle est la limite de f_2 en 0 ?

Le dénominateur tend vers 0 en 0, mais il faut connaître son signe pour conclure. On factorise le dénominateur par le terme le plus fort, mais attention, en 0 c'est la plus petite puissance qui l'emporte. On calcule :

$$f_2(x) = \frac{1}{x^3 - 2x^2 - x} = \frac{1}{x(x^2 - 2x - 1)}$$

Or $x^2 - 2x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$ donc $x(x^2 - 2x - 1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^-$ et $x(x^2 - 2x - 1) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0^+$. Par quotient on obtient alors :

$$f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \quad \text{et} \quad f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty$$

- Soit f_3 définie sur \mathbb{R}_+^* par $f_3(x) = e^x - x^n + \ln x$ (avec $n \in \mathbb{N}$). Quelle est la limite de f_3 en $+\infty$?
Le terme le plus fort est l'exponentielle, on calcule donc :

$$f_3(x) = e^x - x^n + \ln x = e^x \left(1 - \frac{x^n}{e^x} + \frac{\ln x}{e^x} \right)$$

Par croissances comparées (CC en abrégé) on a

$$\frac{x^n}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\ln x}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Finalement $f_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Pour la rédaction, il est indispensable de citer les croissances comparées lorsque vous les utilisez (à la manière de ce qui précède).

4. Soit f_4 définie sur \mathbb{R}_+^* par $f_4(x) = \ln x + \frac{1}{x}$. Quelle est la limite de f_4 en 0^+ ?

Il s'agit d'une forme indéterminée du type « $-\infty + \infty$ ».

Le terme le plus fort sera $1/x$ (en fait on compare $\ln(x) = -\ln(1/x)$ et $1/x$ en 0^+ , ce qui revient à comparer $\ln t$ et t en $+\infty$). On calcule alors :

$$f_4(x) = \ln x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (x \ln x + 1)$$

Comme $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ (croissances comparées) on a finalement (par produit) : $f_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$

5. Soit f_5 définie sur \mathbb{R} par $f_5(x) = e^{x^2} - e^{2x} - xe^{4x}$. Quelle est la limite de f_5 en $+\infty$?

C'est une FI. encore une fois. Le terme le plus fort est l'exponentielle de la plus forte fonction possible. En l'occurrence ce sera e^{x^2} .

On calcule :

$$f_5(x) = e^{x^2} - e^{2x} - xe^{4x} = e^{x^2} (1 - e^{2x-x^2} - xe^{4x-x^2}) = e^{x^2} (1 - e^{x(2-x)} - xe^{x(4-x)})$$

Or :

$$e^{x(2-x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad e^{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

et

$$xe^{x(4-x)} = \frac{x}{x(4-x)} (x(4-x)) e^{x(4-x)} \quad (\text{on force une CC à apparaître})$$

avec

$$\frac{x}{x(4-x)} = \frac{1}{4-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad te^t \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0 \quad (\text{CC})$$

et comme $x(4-x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ par composition $(x(4-x)) e^{x(4-x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Ainsi, la parenthèse tend vers 1.

Finalement il vient : $f_5(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

6. Soit f_6 définie sur \mathbb{R}_+^* par $f_6(x) = \frac{e^x - \ln x + x^2}{x^5 + x \ln x}$. Quelle est la limite de f_6 en $+\infty$?

Il s'agit (encore) d'une FI. (évidemment). On factorise numérateur et dénominateur par le terme le plus fort :

$$f_6(x) = \frac{e^x - \ln x + x^2}{x^5 + x \ln x} = \frac{e^x \left(1 - \frac{\ln x}{e^x} + \frac{x^2}{e^x}\right)}{x^5 \left(1 + \frac{\ln x}{x^4}\right)} = \underbrace{\frac{e^x}{x^5}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ (CC)}} \cdot \frac{\overbrace{1 - \frac{\ln x}{e^x} + \frac{x^2}{e^x}}^{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \text{ (CC)}}}{\underbrace{1 + \frac{\ln x}{x^4}}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \text{ (CC)}}}$$

donc finalement $f_6(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

Remarque : avec cette méthode, si on se «trompe» dans le choix du terme le plus fort, alors la parenthèse ne tendra pas vers une constante.

Parfois cela suffit quand même pour conclure, sinon il faut revenir en arrière et choisir un autre «terme le plus fort».

Cette méthode sera formalisée différemment en milieu de sup par l'utilisation d'équivalents.

Utilisation de l'expression conjuguée : on utilise cette méthode dans le cadre de FI. de la forme « $+\infty - \infty$ » ou « $\frac{1}{a-a}$ » faisant apparaître des radicaux (des racines carrées).

Exemple.

1. Soit h_1 la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}$. Quelle est la limite de h_1 en $+\infty$?

On a une forme indéterminée du type « $\frac{1}{+\infty - \infty}$ », on multiplie le dénominateur par l'expression conjuguée (l'expression conjuguée de $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} + \sqrt{b}$).

On calcule :

$$h_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}{x - (x+1)} = -\sqrt{x} - \sqrt{x+1}$$

identité remarquable!

Par somme $h_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$

2. Soit h_2 la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $h_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}}$. Quelle est la limite de h_2 en 0 ?

On a une forme indéterminée au dénominateur du type « $a-a$ », on multiplie le dénominateur par l'expression conjuguée.

On calcule :

$$h_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2}} = \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})}{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})} = \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})}{1+x-1+x^2} = \frac{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2})}{x(1+x)} = \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x^2}}{1+x}$$

Ainsi $h_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2$

3. Soit h_3 la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $h_3(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{1+1/x} - \sqrt{1-1/x}}$. Quelle est la limite de h_3 en $+\infty$?

Il y a des indéterminations au numérateur et au dénominateur. On va donc multiplier numérateur et dénominateur par les expressions conjuguées.

On calcule :

$$h_3(x) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{1+1/x} - \sqrt{1-1/x}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{(\sqrt{1+1/x} + \sqrt{1-1/x})(\sqrt{1+1/x} - \sqrt{1-1/x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \frac{(x-x-1)(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{(1+1/x+1-1/x)(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \frac{-1(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})}{(2+2\sqrt{1+1/x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})} = \frac{-1}{2(\sqrt{1+1/x})} = \frac{-1}{2\sqrt{1+1/x}}$$

Or $-\sqrt{1+1/x} - \sqrt{1-1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -2$ mais le quotient reste une forme indéterminée.

On utilise la méthode de factorisation par le terme le plus fort (dans les racines) :

$$\frac{-1}{2(\sqrt{1+1/x})} = \frac{-1}{2(\sqrt{x} + \sqrt{x}\sqrt{1+1/x})} = \frac{-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2+2\sqrt{1+1/x}} = \frac{-1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi $h_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$

Utilisation de taux d'accroissement

On rappelle :

Théorème (taux d'accroissement usuels).

- (i) $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$
- (ii) $\frac{\ln(x+1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$
- (iii) $\frac{\ln x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1$
- (iv) $\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \alpha$
- (v) $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

Toutes ces limites sont des nombres dérivés des fonctions de référence (détails laissés au lecteur) :

- (i) $x \mapsto e^x$ en 0,
- (ii) $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0,
- (iii) $x \mapsto \ln x$ en 1,
- (iv) $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en 0,
- (v) $x \mapsto \sin x$ en 0.

On dispose, en utilisant les taux d'accroissements, d'une méthode pour calculer des limites.

Exemple.

- Soit g_1 la fonction définie sur \mathbb{R}_+ par $g_1(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x}$. Quelle est la limite de g_1 en 0^+ ?
Il s'agit d'une forme indéterminée. On «voit» un taux d'accroissement (TA en abrégé), précisément :

$$\frac{e^t - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$$

On transforme donc l'expression :

$$g_1(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{x} = \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Ainsi, comme $t = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par composition $\frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ puis par produit on a : $g_1(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$

Pour la rédaction, comme pour les CC, on doit citer les taux d'accroissement quand on les utilise.

- Soit g_2 la fonction définie sur $[-\pi/4, \pi/4]$ par $g_2(x) = \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x}$. Quelle est la limite de g_2 en 0?

On a :

$$\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1 \text{ (TA)} \quad \text{et} \quad t = \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

par composition il vient : $g_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

- Soit g_3 la fonction définie sur $[-\pi/4, \pi/4]$ par $g_3(x) = \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos x}$. Quelle est la limite de g_3 en 0?

On a :

$$\frac{\ln(t)}{t-1} \xrightarrow{t \rightarrow 1} 1 \text{ (TA)} \quad \text{et} \quad t = \cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

En écrivant $g_3(x) = \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos x} = -\frac{\ln(\cos x)}{\cos x - 1}$ par composition il vient : $g_3(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -1$

- Soit g_4 la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $g_4(x) = \frac{\sqrt{1+x \ln x} - 1}{x \ln x}$. Quelle est la limite de g_4 en 0^+ ?

Notons pour commencer que $h : x \mapsto 1 + x \ln x$ est dérivable par produit sur \mathbb{R}_+^* et que sa dérivée est $x \mapsto \ln x + 1$. On résout :

$$\ln x + 1 > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1}$$

d'où les variations

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+
h	↘ $1 + e^{-1} \ln(e^{-1})$ ↗		

Or $1 + e^{-1} \ln(e^{-1}) = 1 - \frac{1}{e}$ avec $e = e^1 > e^0 = 1$ (croissance de l'exponentielle sur \mathbb{R}), donc $1 + e^{-1} \ln(e^{-1}) > 0$, ce qui montre, d'après les variations, que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h(x) > 0$ et cela justifie la bonne définition de g_4 sur \mathbb{R}_+^* .

On a ensuite :

$$\frac{\sqrt{1+t} - 1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \text{ (TA)} \quad \text{et} \quad t = x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

Par composition il vient : $g_4(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$

- Soit g_5 la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $g_5(x) = \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}$. Quelle est la limite de g_5 en 0?

On a :

$$\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \underbrace{\frac{e^x - 1}{x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \text{ (TA)}} \times \underbrace{\frac{x}{\ln(1+x)}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \text{ (TA «à l'envers»)}}$$

par produit il vient : $g_5(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$

Cette méthode sera avantageusement remplacée au milieu de sup par l'utilisation de développement limités.

Théorèmes d'encadrement et de comparaison.

Les deux théorèmes suivants sont souvent utiles :

Théorème (encadrement).

Soient f, g, h trois fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, soit $\ell \in \mathbb{R}$.
 On suppose qu'au voisinage de a , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.
 Alors $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

En particulier, si au voisinage de a , $0 \leq |g(x)| \leq h(x)$ et $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, alors $|g(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ donc $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Théorème (comparaison).

Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
 On suppose qu'au voisinage de a , $f(x) \leq g(x)$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.
 Alors $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.

Produit d'une fonction bornée et d'une fonction qui tend vers 0

Le produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0 tend vers 0.
 En effet, dire qu'une fonction f est bornée sur un ensemble D est équivalent à l'existence d'une constante K (positive) telle que pour tout $x \in D$, $|f(x)| \leq K$. Ainsi si f est bornée et g tend vers 0 en a , alors on a

$$\forall x \in D, |f(x)g(x)| \leq |f(x)| |g(x)| \leq K |g(x)|$$

et comme $K |g(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, par *encadrement*, $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Exemple.

$x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ puisque $x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée.

3. Tracés : méthode générale

On rappelle, et on admet, le résultat essentiel suivant :

Théorème (dérivée et variations).

Soit I un intervalle non trivial. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que f est dérivable sur I . Alors :

- f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I .
- f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si $f' \geq 0$ (respectivement $f' \leq 0$) sur I .
- f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si $f' > 0$ (resp. < 0) sur I et l'ensemble des points où f' s'annule ne contient aucun intervalle non trivial.

En particulier, si $f' > 0$ (respectivement $f' < 0$) sur I , alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I .

Remarque.

- Il est essentiel de se placer sur un intervalle non trivial I (et cette fois le résultat ne s'étend pas à une réunion d'intervalles non triviaux).
- Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sur I sauf en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).
 En effet les seuls intervalles contenus dans un ensemble fini de points sont des intervalles réduits à un point, donc triviaux. Ainsi $f' \geq 0$ (resp. $f' \leq 0$) sur I et n'est nulle sur aucun intervalle non trivial.
 C'est la situation que l'on rencontrera en pratique.

Exemple.

Soit $f : x \mapsto x^3$. f est dérivable sur \mathbb{R} et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2$$

Ainsi $f' > 0$ sauf en 0, donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

On rappelle aussi la définition d'une asymptote au graphe d'une fonction.

Définition (Asymptotes à une représentation graphique).

Soit f une fonction.

- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $x_0 \in \mathbb{R}$ ouvert en x_0 et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, alors la droite d'équation $x = x_0$ est appelée *asymptote verticale* au graphe de f .
- Si la fonction f est définie sur un intervalle d'extrémité $\pm\infty$ et si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = y_0 \in \mathbb{R}$, alors la droite d'équation $y = y_0$ est appelée *asymptote horizontale* au graphe de f .

On peut aussi étudier la convexité d'un graphe.

Définition (interprétation géométrique des variations de la dérivée).

Si f est une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I non trivial, les variations de f' (données par le signe de f'') s'interprètent géométriquement.

- Si $f'' \geq 0$ sur I , alors la dérivée est croissante et on dit que f est *convexe* sur I .
- Si $f'' \leq 0$ sur I , alors la dérivée est décroissante et on dit que f est *concave* sur I .
- Si f concave (respectivement convexe) sur $I_1 =]a - \delta, a[$ et convexe (respectivement concave) sur $I_2 =]a, a + \delta[$, où $\delta > 0$ et $a \in I$, alors on dit que a est un *point d'inflexion* du graphe de f .

Remarque.

- Cette définition sera réintroduite dans un contexte plus général dans un chapitre ultérieur.
- Pour tracer la courbe représentative d'une fonction f , il est utile de compléter l'étude de f par celle du signe de f'' .

Nous sommes maintenant «équipés» pour étudier les variations d'une fonction.

Étude et représentation graphique d'une fonction f .

1. On commence, s'il n'est pas donné, par déterminer l'ensemble de définition D de f .
2. On cherche les symétries (parité, périodicité, ...) et on réduit en conséquence l'intervalle d'étude.
3. On cherche l'ensemble de dérivabilité de f (l'ensemble sur lequel f' existe).
4. On étudie le signe de $f'(x)$ puis on dresse le tableau de variations de f : sur la première ligne, les valeurs particulières de x obtenues aux étapes précédentes; sur la seconde, le signe de $f'(x)$ et sur la troisième, les variations de f .
5. On complète le tableau de variations par les images et les limites éventuelles de f .
6. On étudie la convexité du graphe en étudiant le signe de $f''(x)$, on complète le tableau de variations de f en ajoutant une nouvelle ligne.
7. On construit la représentation graphique et on y place :
 - les points où la dérivée s'annule pour lesquels la tangente à la courbe est horizontale;
 - les asymptotes;
 - éventuellement quelques tangentes, notamment lorsque l'on connaît en un point la valeur de la fonction et la valeur ou la limite de la dérivée;
 - on respecte la convexité lorsqu'elle a été étudiée.

Exemple.

Étudier et représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto x \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$ (étude de la convexité non demandée).

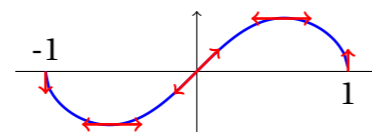
Solution.

Le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} , mais pour que la racine carrée existe, il faut prendre $x \in [-1, 1]$. On a donc $D = [-1, 1]$. On remarque que f est impaire et donc on étudie la fonction sur l'intervalle $I = [0, 1]$. f est dérivable sur $[0, 1[$ et $\forall x \in [0, 1[, f'(x) = \frac{1-3x^2}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)^2}$.

On a le tableau de variations suivant :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1		
$f'(x)$	1	+	0	-	$-\infty$
f	0	\nearrow	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	\searrow	0

et la courbe suivante :



On observe que f admet un maximum global $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ atteint en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et un minimum global 0 atteint en 0 et en 1.

Exemple.

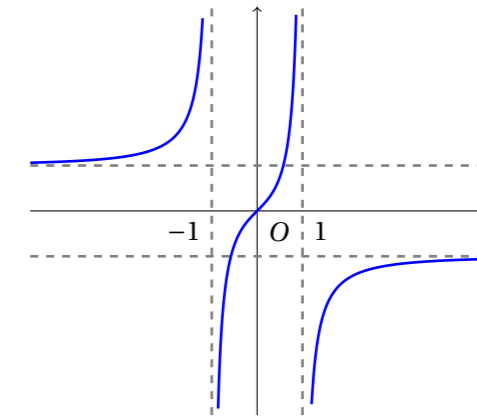
Étudier et représenter graphiquement la fonction $g : x \mapsto x \frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2}$ (étude de la convexité non demandée).

Solution.

Le dénominateur s'annule en ± 1 et la quantité sous la racine est toujours strictement positive. On a donc $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. g est impaire. On étudie la fonction sur $D' = [0; 1[\cup]1; +\infty[$. g est dérivable sur son ensemble de définition et $\forall x \neq \pm 1, g'(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{1+x^2}(1-x^2)^2}$.

On a le tableau de variations suivant : On obtient la courbe suivante :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	1	+	+
g	0	\nearrow	$+\infty$
		$-\infty$	\searrow
		-1	



Les droites d'équations $x = \pm 1$ sont asymptotes verticales et les droites d'équation $y = -1$ et $y = 1$ sont asymptotes horizontales en respectivement $+\infty$ et $-\infty$. On observe que g n'a pas d'extremum global, ni d'extremum local.

Exemple.

Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$. Tracer le graphe de f .

Solution.

f est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. $x \mapsto e^x$ (référence) et $x \mapsto 1+x$ (affine) sont dérivables sur D et comme $x \mapsto 1+x$ ne s'annule pas sur D , par quotient, f est dérivable sur D . On calcule :

$$\forall x \in D, f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{x e^x}{(1+x)^2}$$

ce qui montre que la dérivée est du signe de x .

On calcule les limites :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0^-, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} -\infty, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

et $f(0) = 1$.

Enfin, f' est dérivable sur D (quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur D). On calcule :

$$\forall x \in D, f''(x) = \frac{(1+x)e^x(1+x)^2 - 2(1+x)xe^x}{(1+x)^4} = \frac{(1+x^2)e^x}{(1+x)^3}$$

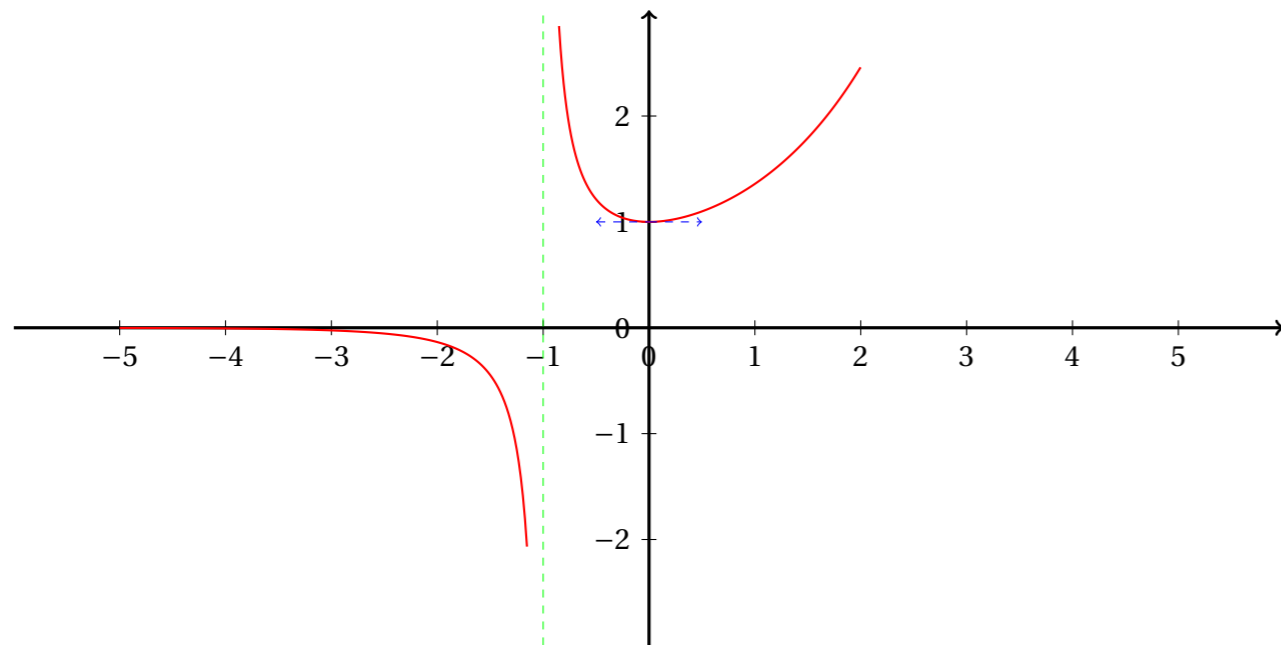
et donc

$$f''(x) > 0 \iff 1+x > 0 \iff x > -1$$

On peut alors dresser le tableau complet des variations :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		- 0 +	
f	0 \searrow $-\infty$	$+\infty \searrow$	1 \nearrow $+\infty$	
$f''(x)$	-		+	
f	concave		convexe	

Le graphe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$ et une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.



4. Tracés : fonctions usuelles

Les variations et tracés des fonctions de référence sont à connaître par cœur : vous devez pouvoir tracer les graphes de ces fonctions et leurs éléments remarquables sans hésiter!

a) Trinôme du second degré

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, on suppose que $a \neq 0$. Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = a \left(x - \frac{-b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \quad \text{(forme canonique)}$$

$$\stackrel{\text{si } \Delta = b^2 - 4ac \geq 0}{=} a \left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \quad \text{(forme factorisée)}$$

On en déduit les variations de f dans les 4 cas suivants (le cas $\Delta = 0$ est inclus dans les premiers tableaux, dans ce cas $\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$) :

$\Delta \geq 0$ et $a > 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\frac{-b}{2a}$	$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$+\infty$
f	$+\infty \searrow$	0 \searrow $-\frac{\Delta}{4a}$	\nearrow 0	\nearrow 0	$+\infty \nearrow$

$\Delta \geq 0$ et $a < 0$

x	$-\infty$	$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$\frac{-b}{2a}$	$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$+\infty$
f	$-\infty \nearrow$	0 \nearrow $-\frac{\Delta}{4a}$	\searrow 0	\searrow 0	$-\infty \searrow$

$\Delta < 0$ et $a > 0$

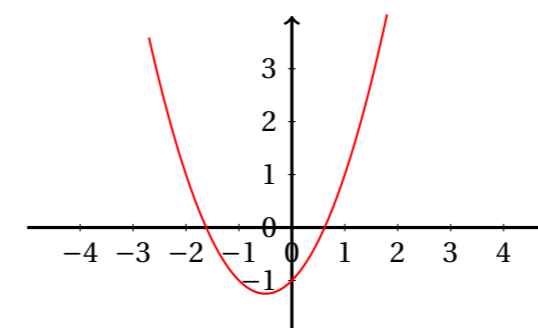
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	$+\infty \searrow$	$-\frac{\Delta}{4a} > 0$	$\nearrow +\infty$

$\Delta < 0$ et $a < 0$

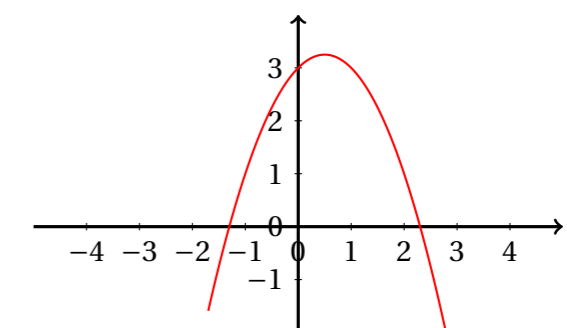
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	$-\infty \nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a} < 0$	$\searrow -\infty$

De plus, f est convexe si $a \geq 0$ et concave sinon. On dispose alors des tracés correspondants :

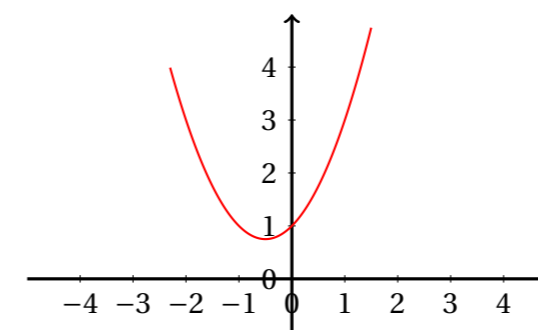
$\Delta \geq 0$ et $a > 0$



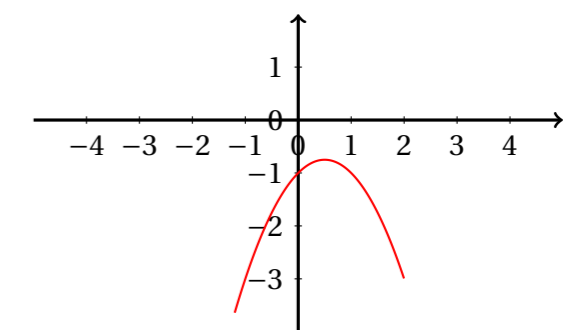
$\Delta \geq 0$ et $a < 0$



$\Delta < 0$ et $a > 0$



$\Delta < 0$ et $a < 0$



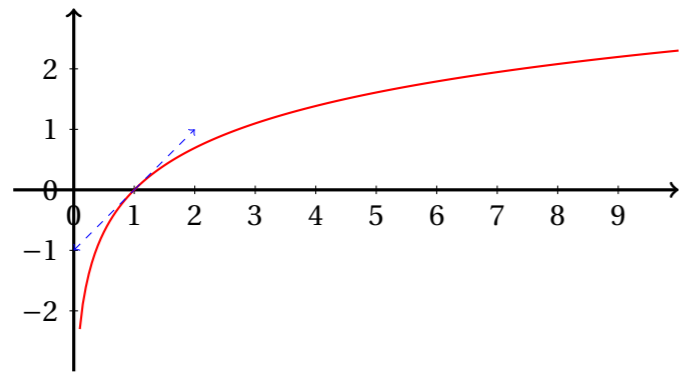
b) Logarithme

\ln est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* , $\ln' : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $\ln'' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$. Ainsi \ln est (strictement) croissante et concave sur \mathbb{R}_+^* .

Par ailleurs : $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ et $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Enfin, le graphe de \ln admet une tangente au point d'abscisse $x = 1$ d'équation $y = x - 1$.

On en déduit le tracé :



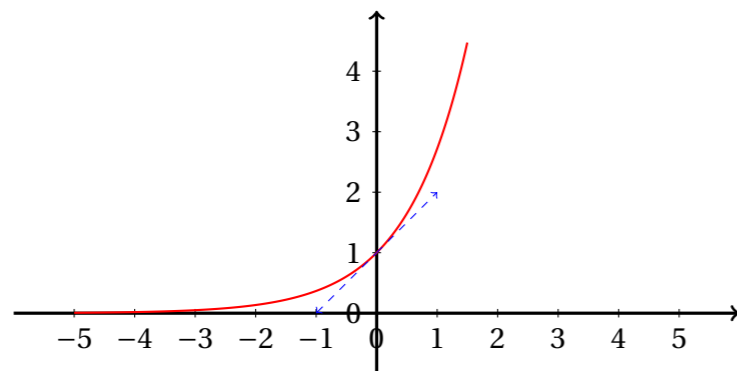
c) Exponentielle

\exp est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , $\exp' : x \mapsto e^x$ et $\exp'' : x \mapsto e^x$. Ainsi \exp est (strictement) croissante et convexe sur \mathbb{R} .

Par ailleurs : $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ et $e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Enfin, le graphe de \exp admet une tangente au point d'abscisse $x = 0$ d'équation $y = x + 1$.

On en déduit le tracé :



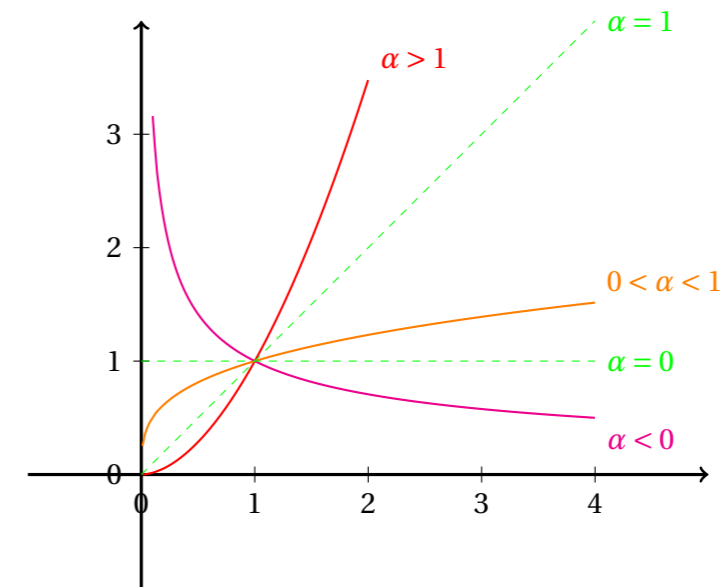
d) Puissances réelles

Par définition, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

Comme vu précédemment dans un exercice, cela permet de prolonger la définition des puissances entières (éventuellement négatives) au cas de puissances réelles, mais seulement pour les valeurs de $x > 0$.

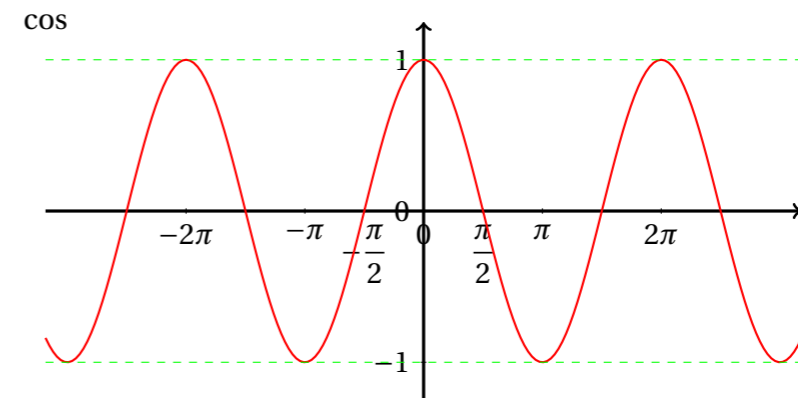
Si $f : x \mapsto x^\alpha$, alors $f' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$ est du signe de α , et $f'' : x \mapsto \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, du signe de $\alpha(\alpha-1)$. Ainsi f a sa monotonie déterminée par le signe de α et est concave si et seulement si $\alpha \in [0, 1]$, et convexe sinon.

On dispose des tracés (3 cas principaux : $\alpha < 0$, $\alpha \in]0, 1[$, $\alpha > 1$, et deux cas «dégénérés» : $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$).

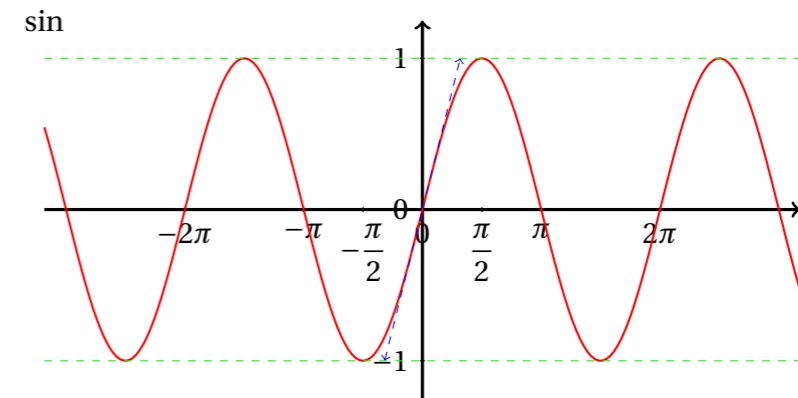


e) Fonctions trigonométriques

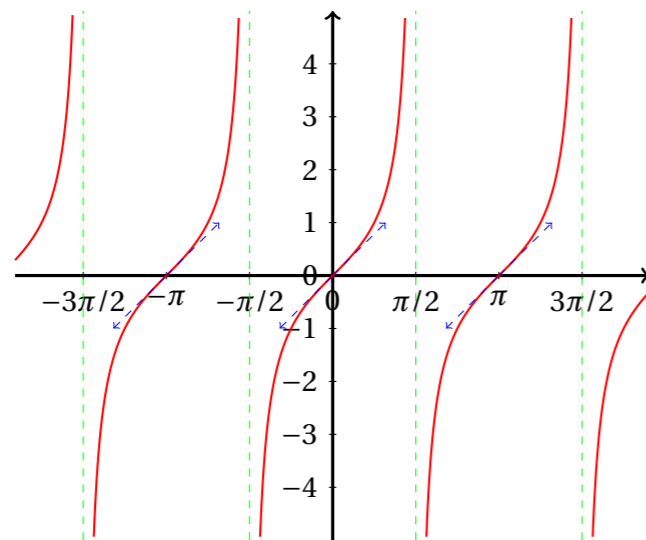
On rappelle que \cos et \sin sont dérivables sur \mathbb{R} , et $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$. Les propriétés de 2π -périodicité et les signes de ces fonctions étant connus (revu précédemment) on donne à la suite les tracés à connaître :



et



Enfin, $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est deux fois dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et est π -périodique. On calcule $\tan' : x \mapsto 1 + \frac{1}{\cos^2(x)}$ et $\tan'' : x \mapsto 2(1 + \tan^2(x)) \tan(x)$, donc elle est strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$, convexe sur $[0, \pi/2[$ et concave sur $]-\pi/2, 0]$. On dispose du tracé :



5. Inégalités

On peut utiliser les fonctions pour démontrer des inégalités.

Exemple.

Démontrer :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1.$
2. $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leq x.$

Solution.

1. La fonction $f : x \mapsto e^x - x - 1$ est dérivable sur \mathbb{R} et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$$

On résout :

$$f'(x) > 0 \iff e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

On en déduit les variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
f	↘ 0 ↗		

D'après les variations : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

2. La fonction $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$ est dérivable sur $] -1, +\infty[$ (composition de $x \mapsto 1+x$ dérivable sur $] -1, +\infty[$ et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* avec $x \mapsto \ln x$ dérivable sur \mathbb{R}_+^*) et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{x}{1+x}$$

On en déduit les variations :

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		$+ \quad 0 \quad -$	
g	↗ 0 ↘		

D'après les variations : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g(x) \leq 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$$

3. La fonction $h : x \mapsto \sin x - x$ est dérivable sur \mathbb{R}_+ et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, h'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0$$

On en déduit les variations :

x	0	$+\infty$
$h'(x)$		$-$
h	↘ 0 ↘	

D'après les variations : $\forall x \in \mathbb{R}_+, h(x) \leq 0$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sin(x) \leq x$$

Remarque.

Ces inégalités sont exigibles : il faut pouvoir les énoncer, les utiliser, et les démontrer si on le demande.

6. À propos du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

On rappelle la notion de continuité :

Définition (continuité).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, où I est un intervalle non trivial. Soit $a \in I$. On dit que f est *continue* en a si : $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a)$.

Si f est continue en tout point de I , on dit qu'elle est *continue sur I*.

Un résultat utile : si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Au lycée on utilise beaucoup le «corollaire du théorème des valeurs intermédiaires» alors que les hypothèses de ce théorème ne sont pas explicitées par le programme officiel, faisant de ce théorème un résultat «fourre-tout» qui sera assez mal accueilli en prépa.

Vous allez donc vous «déshabituer» de son usage, et lui substituer la combinaison «théorème de la bijection» et application à la résolution d'équation.

On considère une équation de la forme $f(x) = a$, où f est une fonction définie sur un intervalle I et a un réel. On suppose que f est continue (première hypothèse à citer, en général justifié car elle

est dérivable) et strictement monotone sur I (deuxième hypothèse à citer, justifiée à l'aide du signe de la dérivée), alors f est une bijection de I vers $J = f(I)$ (qui est un intervalle dont les extrémités sont calculées à l'aide des limites de f aux extrémités de I , à faire explicitement). Or $a \in J$ (à vérifier), donc il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = a$. Si besoin pour montrer que x est compris entre deux réels α et β , on compare $f(\alpha)$, $f(x)$ et $f(\beta)$ et on conclut par la monotonie de f sur I .

Exemple.

On veut montrer que l'équation : $x + \ln(x) = 2$ admet une unique solution sur \mathbb{R}_+^* , notée x_0 , puis montrer que $1 < x_0 < 2$.

Pour cela on introduit $f : x \mapsto x + \ln(x)$, c'est une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+^* par somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* (fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(x)$, de référence).

On calcule : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$. Ainsi f est continue (car dérivable) et strictement croissante (car de dérivée > 0) sur \mathbb{R}_+^* . Comme de plus $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, on en déduit que f est une bijection de \mathbb{R}_+^* vers \mathbb{R} .

Or $2 \in \mathbb{R}$, donc il existe un unique $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x_0) = 2$, c'est-à-dire $x_0 + \ln(x_0) = 2$.

Enfin, on calcule : $f(1) = 1 < 2 = f(x_0)$ et $f(2) = 2 + \ln(2) > 2 = f(x_0)$, donc par croissance de f sur \mathbb{R}_+^* , il vient $1 < x_0 < 2$.

7. Exercices

? Exercice 26.

Étudier la dérivabilité et préciser l'expression de la dérivée des fonctions suivantes :

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|--|
| 1. $f(x) = \frac{2x^2 - 2}{5x - 1}$ | 2. $f(x) = \frac{e^x - 1}{3e^x + 5}$ | 3. $f(x) = \ln(3x^2 + 2)$ |
| 4. $f(x) = (\ln(2x + 1))^5$ | 5. $f(x) = e^{\sqrt{2x + 1}}$ | 6. $f(x) = \ln\left(\frac{2x + 1}{x - 1}\right)$ |
| 7. $f(x) = \sin(x^2 + \ln(x))$ | 8. $f(x) = \tan(3x + 1)$ | 9. $f(x) = \frac{\ln(1 + \sin(x))}{x^2 + x + 1}$ |

? Exercice 27.

Étudier l'ensemble de définition, de dérivabilité et la dérivée des fonctions suivantes :

- | | |
|---|--|
| 1. $f : x \mapsto \sqrt{x} \ln x$ | 2. $f : x \mapsto (1 + 2x)^\alpha \ln(3x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) |
| 3. $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ | 4. $f : x \mapsto xe^{x^2}$ |
| 5. $f : x \mapsto (x^2 + 1)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) | 6. $f : x \mapsto x^x$ |
| 7. $f : x \mapsto (1 + x)^{x^2}$ | 8. $f : x \mapsto \frac{5x^2 + 1}{(x + 1)^2}$ |
| 9. $f : x \mapsto \frac{5x^2 + 1}{(x^2 + 1)^3}$ | 10. $f : x \mapsto (3x + 1)^{\ln x}$ |
| 11. $f : x \mapsto \ln(1 + \sqrt{x^2 + 1})$ | 12. $f : x \mapsto \ln(e^x + e^{-x})$ |
| 13. $f : x \mapsto \ln(\cos^2(x) + 1)$ | 14. $f : x \mapsto \ln \tan x$ |

? Exercice 28.

Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|---|---|--|
| 1. $e^x + 4x + 1$ en $+\infty$ | 2. $x + \sqrt{x}$ en $+\infty$ et en 1 | 3. $\frac{x^4 + x + 1}{x^3 - x}$ en $-\infty$ |
| 4. $\frac{5x^7 + 2x^3 - \sqrt{2}}{x^3 + 1}$ en $+\infty$ | 5. $\frac{6x^6 - 1}{x^3 - 1}$ en $-\infty$ | 6. $\frac{2x^5 - 4x + 1}{x^5 - 4}$ en $+\infty$ |
| 7. $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ en 1 | 8. $\frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$ en 0 | 9. $\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}}$ en $+\infty$ |
| 10. $\frac{1}{x}(\sqrt{x + 1} - x - 1)$ en $+\infty$ | 11. $x \ln x - x$ en 0 | 12. $e^x - x$ en $+\infty$ |
| 13. $(x^5 + \ln x)e^{-x}$ en $+\infty$ | 14. $\frac{e^x}{3x + 2}$ en $+\infty$ | 15. $e^{2x} - 3e^{x+6} + \frac{12}{e^{x/2}}$ en $-\infty$ et $+\infty$ |
| 16. $\frac{e^{3x} - e^{x^2}}{((\ln x)^3 + x)^2}$ en $+\infty$ | 17. $\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}$ en $+\infty$ | 18. $\frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1}$ en 1 |
| 19. $\frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ en 9 | 20. $\sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1 + x}\right)$ en 0^+ | 21. $e^{\sqrt{x}} - 2 \ln x - x^2$ en $+\infty$ |
| 22. $\frac{1 - x^2}{x} e^{1/x}$ en 0 | 23. $(x - 2) \ln(x^2 - x - 2)$ en 2^+ | 24. $x^2 e^{-e^x}$ en $+\infty$ |
| 25. $e^{-1/x} \ln x$ en 0^+ | 26. $e^x \ln(x^2 + x)$ en $-\infty$ | 27. $\frac{\sin(e^x - 1)}{x}$ en 0 |

? Exercice 29.

Pour tout réel y , on note $\lfloor y \rfloor$ sa partie entière : c'est le plus grand entier naturel non nul inférieur ou égal à y . Ainsi, si $n \in \mathbb{Z}$, alors $\lfloor y \rfloor = n \iff n \leq y < n + 1$.

Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x + \ln x}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3 + x}{2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 2x}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} -xe^{\frac{1}{x}}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} -xe^{\frac{1}{x}}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x/3} - e^{2x}}{x^5 + \ln x + \cos x}$ |
| 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{1}{x}}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos x}{x + \frac{1}{x}}$ | 9. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ |
| 10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2}}$ | 11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-x}}{1-x}$ | 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ |
| 13. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ | 14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ | 15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ |

? Exercice 30.

Calculer les limites suivantes :

- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \ln x - 2 \ln 2}{x - 2}$ | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$ | 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$ |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(2x))}{\sin^2(x)}$ | 5. $\lim_{x \rightarrow +\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\cos x}$ | 6. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x^4 - a^4}$ (avec $a > 1$) |

? Exercice 31.

Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

? Exercice 32.

Étudier la convexité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition et rechercher les éventuels points d'inflexion de leurs courbes représentatives. Tracer le graphe de f .

- | | |
|-----------------------|---|
| 1. $f(x) = (\ln x)^2$ | 2. $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x + 1$ |
|-----------------------|---|

? Exercice 33.

Soit f la fonction définie par la formule : $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Étudier la parité de f .
- Étudier les variations (limites comprises) de f .
- Étudier la convexité de f , préciser les éventuels points d'inflexion.
- Préciser les équations des tangentes au graphe de f aux points d'abscisses $x = -1$ et $x = 1$.
- Étudier le signe et la limite en $+\infty$ de $f(x) - 2\ln(x)$ sur \mathbb{R}_+^* .
- Tracer dans un même repère :
 - le graphe de f ,
 - les tangentes au graphe aux points d'abscisses $x = -1$ et $x = 1$,
 - le graphe de la fonction $x \mapsto 2\ln(x)$.

? Exercice 34.

Soit f la fonction définie par la formule : $f(t) = 4t^2 - 2t \ln(t) - 1$

Soit \mathcal{C}_f la courbe de f dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On donne aussi $\ln 2 \approx 0,7$ à $0,02$ près.

- Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .
- Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, puis calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ pour tout $t > 0$.
- En déduire le tableau des variations (avec les limites en 0^+ et $+\infty$) de f' sur $]0, +\infty[$.
- Déduire de la question précédente le signe de $f'(t)$ pour tout $t > 0$.
Dresser le tableau conjoint des variations et de convexité de f (avec les limites en 0^+ et $+\infty$).
Préciser les éventuels points d'inflexion, en étudiant le signe de leur(s) ordonnée(s).
- Déterminer l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $1/4$, et préciser la position de \mathcal{C}_f par rapport à cette tangente.
- On pose $f(0) = -1$.
 - Montrer que f est continue à droite en 0 (c'est-à-dire que $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -1$).
 - Étudier la dérivabilité de f en 0 . Interprétation géométrique?
- Tracer la courbe représentative de f sur $]0, 1]$.
On fera apparaître les propriétés étudiées dans les questions précédentes (convexité, tangentes, positions relatives des courbes...).
- Montrer que l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$.
 - Montrer que $0 < \alpha < 1$.
 - Montrer que $\ln(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{2\alpha}$.

? Exercice 35 (plus difficile...).

On considère, pour a réel non nul, la fonction h_a définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$h_a(x) = x^{1-x^a} = e^{(1-x^a)\ln x}$$

et on note \mathcal{C}_a la courbe représentative de h_a dans un repère orthonormé.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto x^a$? Quelle est sa dérivée?
2. La fonction h_a a-t-elle une limite en 0? Si oui laquelle? (on distinguera deux cas.)
3. Lorsque cela est possible, on prolonge la fonction h_a par continuité en 0 (c'est-à-dire que si h_a a une limite finie ℓ en 0, on pose $h_a(0) = \ell$).

Préciser, quand elle existe, la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

4. (a) Étudier le comportement de $h_a(x)$ quand x tend vers $+\infty$. (on distinguera deux cas.)

(b) Pour $a < 0$, on pose : $g_a(x) = \frac{h_a(x) - x}{x^{a+1} \ln x}$

Montrer que $g_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1$

- (c) En déduire pour quelles valeurs de a la droite d'équation $y = x$ est asymptote à \mathcal{C}_a . (on "rappelle" que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote au graphe de f si et seulement si $f(x) - ax - b \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.)

5. (a) Pour a et b réels non nuls, calculer le rapport $\frac{h_a(x)}{h_b(x)}$.

(b) Préciser les points communs à \mathcal{C}_a et \mathcal{C}_b pour $a \neq b$.

(c) Montrer que : $\frac{h_a(x)}{h_b(x)} > 1 \iff (b > a \text{ et } x \neq 1)$

En déduire les positions relatives de \mathcal{C}_a et \mathcal{C}_b pour $a < b$.

6. (a) Donner l'ensemble de dérivabilité de h_a et déterminer sa dérivée.

(b) Montrer que $h'_a(x)$ est du signe de $\phi_a(x) = x^{-a} - a \ln x - 1$.

(c) En déduire les variations de h_a

7. Si x est un réel strictement positif fixé, on définit la fonction :

$$H_x : \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \\ a \mapsto h_a(x) \end{array}$$

Étudier les variations de la fonction H_x , y compris ses limites.

8. Soit $M(x, y)$ un point du plan tel que $x > 0$ et $y > 0$. Discuter suivant M de l'existence d'une valeur de a telle que \mathcal{C}_a passe par M . Si une telle valeur existe, donner a en fonction de x et de y .

Représenter sur un graphe la région des points M du plan tels qu'un tel a existe.

9. Représenter sur un même graphe $\mathcal{C}_a, \mathcal{C}_b$ et \mathcal{C}_c où $a = 1, b = -1/2$ et $c = -2$.

III. Solutions des exercices

Solution de 1.

Faux, Vrai, Faux, Faux, Faux, Vrai, Faux.

Solution de 2.

Par définition, $\sqrt{x^2}$ est l'unique réel positif ou nul tel que $(\sqrt{x^2})^2 = x^2$.

Or $|x|$ est positif ou nul et vérifie :

$$\begin{aligned} |x|^2 &= x^2 && \text{si } x \geq 0 \\ |x|^2 &= (-x)^2 = x^2 && \text{si } x < 0 \end{aligned}$$

Dans tous les cas, $|x|$ est un réel positif ou nul tel que $|x|^2 = x^2$.

Par unicité il vient : $\sqrt{x^2} = |x|$.

Solution de 3.

1. On calcule :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}$$

En divisant numérateur et dénominateur par $\cos(a)\cos(b) \neq 0$ il vient :

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

2. On observe que : $\tan(-b) = \frac{\sin(-b)}{\cos(-b)} = \frac{-\sin(b)}{\cos(b)} = -\tan(b)$.

Ainsi en remplaçant b par $-b$ dans la relation précédente il vient :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a) + \tan(-b)}{1 - \tan(a)\tan(-b)} = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

Solution de 4.

1. $\ln(4) = \ln(2 \times 2) = 2\ln(2)$.

2. $\ln(8e) = \ln(2^3) + \ln(e) = 3\ln(2) + 1$.

3. $\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$.

4. $\ln(1/2) + \ln(2/3) + \ln(3/4) + \ln(4/5) + \ln(5/6) = \ln(1) - \ln(2) + \ln(2) - \ln(3) + \ln(3) - \ln(4) + \ln(4) - \ln(5) + \ln(5) - \ln(6) = -\ln(6)$.

5. $\ln((3+2\sqrt{2})^{2026}) + \ln((3-2\sqrt{2})^{2026}) = \ln(((3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2}))^{2026}) = \ln((3^2 - (2\sqrt{2})^2)^{2026}) = \ln((9-8)^{2026}) = \ln(1^{2026}) = \ln(1) = 0$.

Solution de 5.

1. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, notons pour simplifier $n = \alpha$.

D'après le rappel de cours : $\ln(x^\alpha) = \ln(x^n) = n\ln(x)$. Ainsi $e^{n\ln(x)} = e^{\ln(x^n)} = x^n = \underbrace{x \times \dots \times x}_{n=\alpha \in \mathbb{N} \text{ facteurs}}$ (on utilise le

fait que pour tout réel $y > 0$, $e^{\ln(y)} = y$, avec ici $y = x^n$).

Si $\alpha \in \mathbb{Z}_*$, alors $x^\alpha = e^{\alpha\ln(x)} = e^{-(-\alpha\ln(x))} = \frac{1}{e^{-\alpha\ln(x)}} = \frac{1}{x^{-\alpha}}$.

2. On calcule directement :

$$\ln(a^b) \underset{\text{déf. de } a^b}{=} \ln(e^{b\ln(a)}) \underset{\text{car } \ln(e^y)=y}{=} b\ln(a)$$

3. On calcule en exploitant les propriétés de l'exponentielle :

$$a^b a^c = e^{b\ln(a)} e^{c\ln(a)} = e^{b\ln(a)+c\ln(a)} = e^{(b+c)\ln(a)} = a^{b+c}$$

puis

$$\frac{a^b}{a^c} = \frac{e^{b\ln(a)}}{e^{c\ln(a)}} = e^{b\ln(a)-c\ln(a)} = e^{(b-c)\ln(a)} = a^{b-c}$$

La relation de la question précédente donne enfin :

$$(a^b)^c = e^{c\ln(a^b)} = e^{cb\ln(a)} = a^{bc}$$

4. — Si $\alpha < 0$.

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha \ln(x) = +\infty$ puis par composition des limites avec l'exponentielle il vient $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = +\infty$.

D'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln(x) = -\infty$ puis par composition des limites avec l'exponentielle il vient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0.$$

— Si $\alpha = 0$, alors $x^\alpha = x^0 = 1$, donc en tant que fonction constante égale à 1 sur \mathbb{R}_* , les limites en 0^+ et $+\infty$ de $x \mapsto x^\alpha$ sont égales à 1.

— Si $\alpha > 0$.

Alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha \ln(x) = -\infty$ puis par composition des limites avec l'exponentielle il vient $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha = 0$.

D'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha \ln(x) = +\infty$ puis par composition des limites avec l'exponentielle il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty$.

5. $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* par composition.

La formule de dérivation composée pour l'exponentielle donne alors :

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha \ln(x)}) = \frac{d}{dx}(\alpha \ln(x)) \times e^{\alpha \ln(x)} = \alpha \frac{1}{x} x^\alpha = \alpha x^{-1} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

Solution de 6.

1. On étudie le signe de la différence :

$$\frac{2}{7} - \frac{3}{8} = \frac{2 \times 8}{7 \times 8} - \frac{3 \times 7}{8 \times 7} = \frac{16-21}{56} = -\frac{5}{56} \leq 0 \quad \text{d'où : } \frac{2}{7} \leq \frac{3}{8}$$

2. On étudie le signe de la différence. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$(1+x)^2 - 4x = (1+2x+x^2) - 4x = 1-2x+x^2 = (1-x)^2 \geq 0$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, (1+x)^2 \geq 4x$.

3. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 \leq 2 + \cos(x) \leq 3$.

De même : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, 0 < 1 \leq 2 + \sin(x) \leq 3$.

Par inverse de nombres strictement positifs, il vient : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{1} \geq \frac{1}{2 + \sin(x)} \geq \frac{1}{3}$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, 1 \leq 2 + \cos(x) \leq 3$ et $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin(x)} \leq 1$.

En multipliant ces inégalités de nombres positifs, on obtient le résultat demandé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{3} \leq \frac{2 + \cos(x)}{2 + \sin(x)} \leq 3$$

4. On étudie les variations de la fonction $f : x \mapsto 2 \ln(x) - x$ pour en déduire son signe.

f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{2}{x} - 1 = \frac{2-x}{x}$$

Ainsi $f'(x)$ est du signe de $2-x$ sur \mathbb{R}_+^* et on a :

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$2(\ln(2) - 1)$ 		

$$f(2) = 2 \ln(2) - 2 = 2(\ln(2) - 1)$$

Or $\ln(2) \approx 0,7$ donc : $2(\ln(2) - 1) < 0$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leq 2(\ln(2) - 2) < 0$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 2 \ln(x) - x < 0$, et finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 2 \ln(x) < x$.

Notons qu'il n'a pas été nécessaire de calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Solution de 7.

$$1. \text{ — On calcule : } \frac{1}{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(3)} = \frac{\ln(3) - 2\ln(2)}{\ln(2) \times \ln(3)} = \frac{\ln(3) - \ln(2^2)}{\ln(2) \times \ln(3)} = \frac{\ln(3) - \ln(4)}{\ln(2) \times \ln(3)}$$

Comme $2 > 1$ et $3 > 1$, on a $\ln(2) > 0$ et $\ln(3) > 0$.

De plus comme \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , on a : $\ln(3) < \ln(4)$.

On en déduit que : $\frac{1}{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(3)} = \frac{\ln(3) - \ln(4)}{\ln(2) \times \ln(3)} < 0$, d'où : $\frac{1}{\ln(2)} < \frac{2}{\ln(3)}$.

$$\text{— On calcule : } \frac{e-1}{2e-3} - 1 = \frac{(e-1) - (2e-3)}{2e-3} = \frac{2-e}{2e-3}$$

Comme $e \approx 2,7$, on a aussi $2e > 4$, donc $2-e < 0$ et $2e-3 > 0$.

On en déduit que : $\frac{e-1}{2e-3} - 1 = \frac{2-e}{2e-3} < 0$, d'où : $\frac{e-1}{2e-3} < 1$.

2. — On a : $25 < 29 < 36$.

Par stricte croissance de $t \mapsto t^2$ sur \mathbb{R}_+ , il vient : $\sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36}$.

Ainsi : $5 < \sqrt{29} < 6$.

— De même on a : $64 < 73 < 81$, donc : $8 = \sqrt{64} < \sqrt{73} < \sqrt{81} = 9$.

En multipliant par -1 (< 0), il vient : $-8 > -\sqrt{73} > -9$.

On ajoute 16 dans chaque membre de l'inégalité : $8 > 16 - \sqrt{73} > 7$.

En multipliant par $\frac{1}{3}$ (> 0), il vient : $\frac{8}{3} > \frac{16 - \sqrt{73}}{3} > \frac{7}{3}$.

En particulier : $\frac{9}{3} > \frac{8}{3} > \frac{16 - \sqrt{73}}{3} > \frac{7}{3} > \frac{6}{3}$, d'où : $3 > \frac{16 - \sqrt{73}}{3} > 2$.

Solution de 8.

$$1. \text{ On a pour tout } x \in]3, +\infty[: \frac{7x-18}{2x-5} - 3 = \frac{(7x-18) - 3(2x-5)}{2x-5} = \frac{x-3}{2x-5} > 0.$$

D'où : $\forall x \in]3, +\infty[, \frac{7x-18}{2x-5} > 3$.

2. On a : $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq 1 \leq e^x$.

En ajoutant e^x , il vient : $\forall x \in [0, +\infty[, e^x \leq 1 + e^x \leq 2e^x$.

Par croissance de \ln sur \mathbb{R}_+^* , on obtient : $\forall x \in [0, +\infty[, \ln(e^x) \leq \ln(1 + e^x) \leq \ln(2e^x)$.

Or $\ln(e^x) = x$ et $\ln(2e^x) = \ln(2) + \ln(e^x) = \ln(2) + x$.

On a donc bien : $\forall x \in [0, +\infty[, x \leq \ln(1 + e^x) \leq x + \ln(2)$.

3. On étudie les variations de la fonction $f : x \mapsto x - 1 + e^{-x}$ pour en déduire son signe.

f est dérivable sur \mathbb{R} et on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 - e^{-x}$.

Par stricte croissance de \ln sur \mathbb{R}_+^* , on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) > 0 \iff 1 > e^{-x} \iff \ln(1) > \ln(e^{-x}) \iff 0 > -x \iff 0 < x$$

Ainsi :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f			

$$f(0) = 0 - 1 + e^0 = -1 + 1 = 0$$

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 + e^{-x} \geq 0$, et finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 - e^{-x}$.

Solution de 9.

On étudie le signe de la différence (comme $t \geq 1$, on a $t = (\sqrt{t})^2$) :

$$2f(\sqrt{t}) - f(t) = \frac{t-1}{\sqrt{t}} - \frac{t^2-1}{2t} = \frac{2(t-1)\sqrt{t}}{2t} - \frac{(t-1)(t+1)}{2t} = \frac{t-1}{2t}(2\sqrt{t} - t - 1)$$

$$= -\frac{t-1}{2t}(\sqrt{t}-1)^2 \leq 0$$

puisque $t \geq 1$, donc $t-1 \geq 0$.

Finalement on a bien démontré que : $\forall t \geq 1, 2f(\sqrt{t}) \leq f(t)$

Solution de 10.

— L'ensemble de définition de (E_1) est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, puisque les dénominateurs doivent être non nuls.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. On a :

$$(E_1) \iff \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x+1} \iff (x+1) \times (x+1) = x \times x \iff (x+1)^2 = x^2$$

Ainsi :

$$(E_1) \iff x^2 + 2x + 1 = x^2 \iff 2x = -1 \iff x = -\frac{1}{2}$$

Comme $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, l'équation (E_1) admet une unique solution : $-\frac{1}{2}$.

— L'ensemble de définition de (E_2) est $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+^*$, puisqu'on doit avoir $x > 0$ et $x+1 > 0$ et $x+2 > 0$ pour que les logarithmes soient définis.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $t \mapsto \ln(t)$ est bijective sur \mathbb{R}_+^* , on a :

$$(E_2) \iff \ln(x \times (x+1)) = \ln(x+2) \iff x \times (x+1) = x+2$$

Ainsi :

$$(E_2) \iff x^2 + x = x+2 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Comme $\sqrt{2} \in \mathbb{R}_+^*$ et $-\sqrt{2} \notin \mathbb{R}_+^*$, l'équation (E_2) admet une unique solution : $\sqrt{2}$.

— L'ensemble de définition de (E_3) est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $t \mapsto \ln(t)$ est bijective sur \mathbb{R}_+^* , on a :

$$(E_3) \iff 2e^{-x} = e^{-2x} \iff \ln(2e^{-x}) = \ln(e^{-2x})$$

Avec les propriétés du logarithme, il vient :

$$(E_3) \iff \ln(2) + \ln(e^{-x}) = \ln(e^{-2x}) \iff \ln(2) - x = -2x$$

Finalement :

$$(E_3) \iff -x + 2x = -\ln(2) \iff x = -\ln(2)$$

Ainsi l'équation (E_3) admet une unique solution : $-\ln(2)$.

Solution de 11.

Dans cet exercice, l'ensemble de définition des équations est \mathbb{R} .

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a d'après le rappel :

$$(x+2)^2 = 1 \iff x+2 = 1 \text{ ou } x+2 = -1 \iff x = -1 \text{ ou } x = -3$$

Ainsi l'équation $(x+2)^2 = 1$ admet deux solutions : -1 et -3 .

Remarque : on pouvait aussi développer, passer tout du même côté et factoriser, mais c'est maladroit ; on pouvait aussi tout mettre du même côté et utiliser une identité remarquable, mais c'est aussi un peu plus long.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $t \mapsto t^3$ est bijective sur \mathbb{R} , on a :

$$(x+2)^3 = 1 \iff (x+2)^3 = 1^3 \iff x+2 = 1 \iff x = -1$$

Ainsi l'équation $(x+2)^3 = 1$ admet une unique solution : -1 .

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^5 - 4x = 0 \iff x \times (x^4 - 4) = 0 \iff x \times ((x^2)^2 - 2^2) = 0$$

On peut factoriser avec l'identité remarquable :

$$x^5 - 4x = 0 \iff x \times (x^2 - 2) \times (x^2 + 2) = 0$$

Comme un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, il vient :

$$x^5 - 4x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x^2 = 2 \text{ ou } x^2 = -2$$

Il n'est pas possible d'avoir $x^2 = -2$. Finalement :

$$x^5 - 4x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2}$$

Ainsi l'équation $x^5 - 4x = 0$ admet trois solutions : $0, \sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$x^5 + 4x = 0 \iff x \times (x^4 + 4) = 0$$

Or : $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 \geq 0$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 + 4 > 0$.

Le facteur $x^4 + 4$ étant non nul, il vient :

$$x^5 + 4x = 0 \iff x = 0$$

Ainsi l'équation $x^5 + 4x = 0$ admet une unique solution : 0 .

Solution de 12.

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 \neq 0$.

L'ensemble de définition de l'équation est \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \iff (e^x - 1) \times 2 = 1 \times (e^x + 1) \iff 2e^x - 2 = e^x + 1$$

On met les termes en e^x d'un côté et les termes constants de l'autre :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \iff 2e^x - e^x = 1 + 2 \iff e^x = 3$$

Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est bijective sur \mathbb{R}_+^* , il vient enfin :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \iff \ln(e^x) = \ln(3) \iff x = \ln(3)$$

Ainsi l'équation $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{1}{2}$ admet une unique solution : $\ln(3)$.

2. L'équation $\ln(x) + \ln(2x) + \ln(4x) = 3$ est bien définie si et seulement si $x > 0$ et $2x > 0$ et $3x > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\ln(x) + \ln(2x) + \ln(4x) = 3 \iff \ln(x \times 2x \times 4x) = 3 \iff \ln(8x^3) = 3$$

Comme la fonction $t \mapsto e^t$ est bijective sur \mathbb{R} , on obtient :

$$\ln(x) + \ln(2x) + \ln(4x) = 3 \iff e^{\ln(8x^3)} = e^3 \iff 8x^3 = e^3 \iff x^3 = \frac{e^3}{8}$$

Comme la fonction $t \mapsto t^3$ est bijective sur \mathbb{R} , il vient enfin :

$$\ln(x) + \ln(2x) + \ln(4x) = 3 \iff x^3 = \left(\frac{e}{2}\right)^3 \iff x = \frac{e}{2}$$

On vérifie que $\frac{e}{2} \in \mathbb{R}_+^*$.

Ainsi l'équation $\ln(x) + \ln(2x) + \ln(4x) = 3$ admet une unique solution : $\frac{e}{2}$.

3. L'équation $\sqrt{2x-1} = x$ est bien définie si et seulement si $2x-1 \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geq \frac{1}{2}$.

Soit $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$. Comme $t \mapsto t^2$ est bijective sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$\sqrt{2x-1} = x \iff (\sqrt{2x-1})^2 = x^2 \iff 2x-1 = x^2 \iff x^2 - 2x + 1 = 0$$

En reconnaissant une identité remarquable, il vient :

$$\sqrt{2x-1} = x \iff (x-1)^2 = 0 \iff x-1 = 0 \iff x = 1$$

Comme $1 \in [\frac{1}{2}, +\infty[$, l'équation $\sqrt{2x-1} = x$ admet une unique solution : 1.

4. L'équation $\sqrt{\ln(x)} = (\ln(x))^2$ a un sens si et seulement si $x > 0$ et $\ln(x) \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geq 1$.

Soit $x \in [1, +\infty[$. Comme $t \mapsto t^2$ est bijective sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$\sqrt{\ln(x)} = (\ln(x))^2 \iff (\sqrt{\ln(x)})^2 = ((\ln(x))^2)^2 \iff \ln(x) = (\ln(x))^4$$

On ramène tout à gauche et on factorise :

$$\sqrt{\ln(x)} = (\ln(x))^2 \iff \ln(x) - (\ln(x))^4 = 0 \iff \ln(x) \times (1 - (\ln(x))^3) = 0$$

Comme un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, on obtient :

$$\sqrt{\ln(x)} = (\ln(x))^2 \iff \ln(x) = 0 \text{ ou } 1 - (\ln(x))^3 = 0$$

Autrement dit :

$$\sqrt{\ln(x)} = (\ln(x))^2 \iff x = 1 \text{ ou } (\ln(x))^3 = 1^3$$

Comme la fonction $t \mapsto t^3$ est bijective sur \mathbb{R} , on a finalement :

$$\sqrt{\ln(x)} = (\ln(x))^2 \iff x = 1 \text{ ou } \ln(x) = 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = e$$

On vérifie que $1 \in [1, +\infty[$ et $e \in [1, +\infty[$.

Ainsi l'équation $\sqrt{\ln(x)} = (\ln(x))^2$ admet deux solutions : 1 et e.

Solution de 13.

— L'ensemble de définition de (I_1) est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, puisque les dénominateurs doivent être non nuls. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$. Il ne faut surtout pas multiplier par x et par $x+1$ dans l'inégalité, puisque les signes de x et de $x+1$ ne sont pas connus! La bonne méthode consiste à tout mettre à gauche puis à réduire au même dénominateur :

$$(I_1) \iff \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} \leq 0 \iff \frac{(x+1) \times (x+1) - x \times x}{x \times (x+1)} \leq 0$$

Ainsi :

$$(I_1) \iff \frac{(x+1)^2 - x^2}{x(x+1)} \leq 0 \iff \frac{2x+1}{x(x+1)} \leq 0$$

On s'aide d'un tableau de signes, construit pour x dans l'ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$:

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
x	-		-		+
$x+1$	-		+		+
$2x+1$	-		0		+
$\frac{2x+1}{x(x+1)}$	-		+		+

Ainsi : $(I_1) \iff \frac{2x+1}{x(x+1)} \leq 0 \iff x < -1$ ou $-\frac{1}{2} \leq x < 0$.

L'inéquation (I_1) admet donc pour ensemble de solutions : $] -\infty, -1[\cup] -\frac{1}{2}, 0[$.

— L'ensemble de définition de (I_2) est $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $t \mapsto \ln(t)$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , on a :

$$(I_2) \iff 2e^{-x} > e^{-2x} \iff \ln(2e^{-x}) > \ln(e^{-2x})$$

Avec les propriétés du logarithme, il vient :

$$(I_2) \iff \ln(2) + \ln(e^{-x}) > \ln(e^{-2x}) \iff \ln(2) - x > -2x$$

Finalement :

$$(I_2) \iff -x + 2x > -\ln(2) \iff x > -\ln(2)$$

Ainsi l'inéquation (I_2) admet pour ensemble de solutions : $] -\ln(2), +\infty[$.

Solution de 14.

1. L'inéquation $(x+2)^2 \leq 1$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $t^2 \leq 1 \iff -1 \leq t \leq 1$, on a :

$$(x+2)^2 \leq 1 \iff -1 \leq x+2 \leq 1 \iff -3 \leq x \leq -1$$

Ainsi l'inéquation $(x+2)^2 \leq 1$ admet pour ensemble de solutions : $[-3, -1]$.

2. L'inéquation $(x+2)^3 \leq 1$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $t \mapsto t^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , on a :

$$(x+2)^3 \leq 1 \iff (x+2)^3 \leq 1^3 \iff x+2 \leq 1 \iff x \leq -1$$

Ainsi l'inéquation $(x+2)^3 \leq 1$ admet pour ensemble de solutions : $] -\infty, -1]$.

3. L'inéquation $\sqrt{2x-1} > x$ a un sens si et seulement si $2x-1 \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \geq \frac{1}{2}$.

Soit $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$. Comme $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$\sqrt{2x-1} > x \iff (\sqrt{2x-1})^2 > x^2 \iff 2x-1 > x^2 \iff 0 > x^2 - 2x + 1$$

En reconnaissant une identité remarquable, il vient :

$$\sqrt{2x-1} > x \iff 0 > (x-1)^2$$

Or un carré est toujours positif, donc cette dernière inégalité n'est jamais vérifiée.

Ainsi l'inéquation $\sqrt{2x-1} > x$ n'admet pas de solution.

4. Comme dans la question précédente, on a pour $x \in [\frac{1}{2}, +\infty[$:

$$\sqrt{2x-1} < x \iff 0 < (x-1)^2$$

Or un carré est toujours positif, donc $(x-1)^2$ est strictement positif si et seulement si $(x-1)^2 \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \neq 1$.

Ainsi l'inéquation $\sqrt{2x-1} < x$ admet pour ensemble de solutions : $[\frac{1}{2}, 1[\cup]1, +\infty[$.

Solution de 15.

1. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, donc : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x + 1 > 0$.

Ainsi l'inéquation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^x + 1 > 0$ et comme $2 > 0$, on peut multiplier par ces quantités dans l'inégalité :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \geq \frac{1}{2} \iff (e^x - 1) \times 2 \geq 1 \times (e^x + 1) \iff 2e^x - 2 \geq e^x + 1$$

On met les termes en e^x d'un côté et les termes constants de l'autre :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \geq \frac{1}{2} \iff 2e^x - e^x \geq 1 + 2 \iff e^x \geq 3$$

Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , il vient enfin :

$$\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \geq \frac{1}{2} \iff \ln(e^x) \geq \ln(3) \iff x \geq \ln(3)$$

Ainsi l'inéquation $\frac{e^x - 1}{e^x + 1} \geq \frac{1}{2}$ admet pour ensemble de solutions : $[\ln(3), +\infty[$.

2. L'inéquation $\ln(x) + \ln(2x) + \ln(4x) \leq 3$ a un sens si et seulement si $x > 0$ et $2x > 0$ et $4x > 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\ln(x) + \ln(2x) + \ln(4x) \leq 3 \iff \ln(x \times 2x \times 4x) \leq 3 \iff \ln(8x^3) \leq 3$$

Comme la fonction $t \mapsto e^t$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , on obtient :

$$\ln(x) + \ln(2x) + \ln(4x) \leq 3 \iff e^{\ln(8x^3)} \leq e^3 \iff 8x^3 \leq e^3 \iff x^3 \leq \frac{e^3}{8}$$

Comme la fonction $t \mapsto t^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , il vient enfin :

$$\ln(x) + \ln(2x) + \ln(4x) \leq 3 \iff x^3 \leq \left(\frac{e}{2}\right)^3 \iff x \leq \frac{e}{2}$$

Or, on a pris x dans \mathbb{R}_+^* au départ.

Ainsi l'inéquation considérée admet pour ensemble de solutions : $]0, \frac{e}{2}]$.

3. L'inéquation $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x}$ a un sens si et seulement si $x^2-x \geq 0$ et $2-x \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x(x-1) \geq 0$ et $x \leq 2$.

Pour déterminer le signe de $x(x-1)$, on peut construire un tableau de signes :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x		-	0	+
$x-1$		-		-
$x(x-1)$		+	0	-

Il vient : $x(x-1) \geq 0 \iff x \leq 0$ ou $x \geq 1$.

Ainsi l'inéquation $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x}$ a un sens si et seulement si $x \in]-\infty, 0] \cup [1, 2]$.

Soit $x \in]-\infty, 0] \cup [1, 2]$. Comme $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x} \iff (\sqrt{x^2-x})^2 > (\sqrt{2-x})^2 \iff x^2-x > 2-x$$

Avec les propriétés de la fonction $t \mapsto t^2$, il vient :

$$\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x} \iff x^2 > 2 \iff x > \sqrt{2} \text{ ou } x < -\sqrt{2}$$

Or, on a pris x dans $]-\infty, 0] \cup [1, 2]$ au départ.

On rappelle de plus que $\sqrt{2} \approx 1,4$.

On en déduit que l'inéquation $\sqrt{x^2-x} > \sqrt{2-x}$ admet pour ensemble de solutions :

$$]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, 2]$$

Solution de 17.

1. L'équation a un sens si et seulement si $x > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En posant $t = \ln(x)$, il vient :

$$2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 = 0 \iff 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

Après calcul, les solutions de l'équation $2t^2 - 3t + 1 = 0$ sont : $\frac{1}{2}$ et 1.

On reprend les équivalences précédentes :

$$2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 = 0 \iff 2t^2 - 3t + 1 = 0 \iff \left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 1 \right)$$

Or que $t = \ln(x)$:

$$2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 = 0 \iff \left(\ln(x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \ln(x) = 1 \right)$$

Comme la fonction $t \mapsto e^t$ est bijective sur \mathbb{R} , il vient finalement :

$$2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 = 0 \iff (x = e^{1/2} \text{ ou } x = e^1)$$

Les deux solutions obtenues appartiennent bien à \mathbb{R}_+^* .

Ainsi l'équation $2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 = 0$ admet deux solutions : \sqrt{e} et e .

2. L'équation a un sens, si et seulement si $x > 0$ et $x+1 > 0$, si et seulement si $x > 0$ (car dans ce cas on a aussi $x+1 > 0$).

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est bijective sur \mathbb{R}_+^* , on a :

$$\ln(x) + \ln(x+1) = 0 \iff \ln(x \times (x+1)) = \ln(1) \iff x \times (x+1) = 1$$

Ainsi :

$$\ln(x) + \ln(x+1) = 0 \iff x^2 + x - 1 = 0$$

Après calcul, l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans \mathbb{R}_+^* .

Or $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, donc $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$.

On en déduit que l'équation $\ln(x) + \ln(x+1) = 0$ admet une unique solution : $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

3. L'équation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a en posant $t = e^x$:

$$\begin{aligned} e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 &= 0 \iff e^{2x} \times e^{\ln(2)} + e^x \times e^{\ln(5)} - 3 = 0 \\ &\iff 2(e^x)^2 + 5e^x - 3 = 0 \\ &\iff 2t^2 + 5t - 3 = 0 \end{aligned}$$

Après calcul, l'équation $2t^2 + 5t - 3 = 0$ admet deux solutions : -3 et $\frac{1}{2}$.

On reprend les équivalences précédentes :

$$\begin{aligned} e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 &= 0 \iff 2t^2 + 5t - 3 = 0 \\ &\iff t = -3 \text{ ou } t = \frac{1}{2} \\ &\iff \underbrace{e^x = -3}_{\text{impossible}} \text{ ou } e^x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est bijective sur \mathbb{R}_+^* , il vient finalement :

$$e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 = 0 \iff x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ainsi l'équation $e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 = 0$ admet une unique solution : $-\ln(2)$.

Solution de 16.

L'équation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on observe que $x^4 = (x^2)^2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = x^2$:

$$-2x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \iff -2(x^2)^2 + 3x^2 + 2 = 0 \iff -2t^2 + 3t + 2 = 0$$

Discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0$.

L'équation $-2t^2 + 3t + 2 = 0$ admet donc deux solutions :

$$t_1 = \frac{-3-5}{2 \times (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \text{ et } t_2 = \frac{-3+5}{2 \times (-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

On reprend les équivalences précédentes :

$$-2x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \iff -2t^2 + 3t + 2 = 0 \iff \left(t = 2 \text{ ou } t = -\frac{1}{2} \right)$$

Or $t = x^2$:

$$-2x^4 + 3x^2 + 2 = 0 \iff \left(x^2 = 2 \text{ ou } \underbrace{x^2 = -\frac{1}{2}}_{\text{impossible}} \right) \iff (x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2})$$

Ainsi l'équation $-2x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ admet deux solutions : $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

4. L'équation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^x \neq 0$, on peut multiplier par e^x et on a :

$$1 - 2e^x = \frac{e^{-x}}{3} \iff e^x \times (1 - 2e^x) = e^x \times \frac{e^{-x}}{3} \iff e^x - 2(e^x)^2 = \frac{1}{3}$$

En posant $t = e^x$, il vient :

$$1 - 2e^x = \frac{e^{-x}}{3} \iff -2t^2 + t - \frac{1}{3} = 0$$

Discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times (-\frac{1}{3}) = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3} < 0$.

On en déduit que l'équation $-2t^2 + t - \frac{1}{3} = 0$ n'admet pas de solution.

Ainsi l'équation $1 - 2e^x = \frac{e^{-x}}{3}$ n'admet pas de solution.

5. L'équation a un sens si et seulement si $2 - x \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \leq 2$.

Soit $x \in]-\infty, 2]$.

On souhaite passer au carré dans l'égalité : pour conserver l'équivalence, il faut pour cela que les deux membres de l'égalité soient de même signe, ici positifs.

On note d'une part que si $x < 0$, alors l'égalité $x = \sqrt{2-x}$ ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif ou nul.

On suppose donc pour la suite que $x \in [0, 2]$.

Comme la fonction $t \mapsto t^2$ est bijective sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$x = \sqrt{2-x} \iff x^2 = (\sqrt{2-x})^2 \iff x^2 = 2-x \iff x^2 + x - 2 = 0$$

Après calcul, l'équation $x^2 + x - 2 = 0$ admet deux solutions : -2 et 1 .

Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans $[0, 2]$.

On en déduit que l'équation $x = \sqrt{2-x}$ admet une unique solution : 1 .

6. L'équation a un sens si et seulement si $x \geq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$x - \sqrt{x} = \frac{3}{2} \iff x - \frac{3}{2} = \sqrt{x}$$

Si $x < \frac{3}{2}$, alors l'égalité $x - \frac{3}{2} = \sqrt{x}$ ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif ou nul.

On suppose donc pour la suite que $x \in [\frac{3}{2}, +\infty[$.

Comme la fonction $t \mapsto t^2$ est bijective sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$x - \sqrt{x} = \frac{3}{2} \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = (\sqrt{x})^2 \iff x^2 - 3x + \frac{9}{4} = x$$

Ainsi :

$$x - \sqrt{x} = \frac{3}{2} \iff x^2 - 4x + \frac{9}{4} = 0$$

Après calcul, l'équation $x^2 - 4x + \frac{9}{4} = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = 2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

Or $\sqrt{7} > \sqrt{4} = 2$, donc $\frac{\sqrt{7}}{2} > 1$.

Il vient : $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2} < 2 - 1 = 1 < \frac{3}{2}$ et : $x_2 = 2 + \frac{\sqrt{7}}{2} > 2 + 1 = 3 \geq \frac{3}{2}$.

On en déduit que l'équation $x - \sqrt{x} = \frac{3}{2}$ admet une unique solution : $2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Solution de 18.

L'inéquation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$ et on observe que $x^4 = (x^2)^2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = x^2$:

$$-2x^4 + 3x^2 + 2 \geq 0 \iff -2(x^2)^2 + 3x^2 + 2 \geq 0 \iff -2t^2 + 3t + 2 \geq 0$$

Discriminant : $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times 2 = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0$.

Le polynôme $t \mapsto -2t^2 + 3t + 2$ admet donc deux racines :

$$t_1 = \frac{-3-5}{2 \times (-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-3+5}{2 \times (-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

Comme $a = -2 < 0$, on obtient le tableau de signes suivant :

t	$-\infty$	$-1/2$	2	$+\infty$
$-2t^2 + 3t + 2$		$-$	$+$	$-$

On reprend les équivalences précédentes :

$$-2x^4 + 3x^2 + 2 \geq 0 \iff -2t^2 + 3t + 2 \geq 0 \iff -\frac{1}{2} \leq t \leq 2$$

Or $t = x^2$:

$$-2x^4 + 3x^2 + 2 \geq 0 \iff -\frac{1}{2} \leq x^2 \leq 2 \iff x^2 \leq 2 \iff -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

On a pu supprimer l'inégalité $-\frac{1}{2} \leq x^2$ puisqu'elle est toujours vraie.

Ainsi l'inéquation $-2x^4 + 3x^2 + 2 \geq 0$ admet pour ensemble de solutions : $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

Solution de 19.

1. L'inéquation a un sens si et seulement si $x > 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En posant $t = \ln(x)$, il vient :

$$2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 > 0 \iff 2t^2 - 3t + 1 > 0$$

Après calcul, le signe du polynôme $t \mapsto 2t^2 - 3t + 1$ est donné par :

t	$-\infty$	$1/2$	1	$+\infty$
$2t^2 - 3t + 1$		$+$	$-$	$+$

On reprend les équivalences précédentes :

$$2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 > 0 \iff 2t^2 - 3t + 1 > 0 \iff \left(t < \frac{1}{2} \text{ ou } t > 1\right)$$

Or $t = \ln(x)$:

$$2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 > 0 \iff \left(\ln(x) < \frac{1}{2} \text{ ou } \ln(x) > 1\right)$$

Comme la fonction $t \mapsto e^t$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , il vient finalement :

$$2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 > 0 \iff (x < e^{1/2} \text{ ou } x > e^1)$$

On rappelle que les solutions de l'inéquation sont à chercher dans \mathbb{R}_+^* .

Ainsi l'inéquation $2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 > 0$ admet pour ensemble de solutions :

$$]0, \sqrt{e}[\cup]e, +\infty[$$

2. L'inéquation a un sens si et seulement si $x > 0$ (dans ce cas on a aussi $x + 1 > 0$).

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , on a :

$$\ln(x) + \ln(x+1) \leq 0 \iff \ln(x \times (x+1)) \leq \ln(1) \iff x \times (x+1) \leq 1$$

Ainsi :

$$\ln(x) + \ln(x+1) \leq 0 \iff x^2 + x - 1 \leq 0$$

Après calcul, le signe du polynôme $x \mapsto x^2 + x - 1$ est donné par :

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$	
$x^2 + x - 1$	+	0	-	0	+

On reprend les équivalences précédentes :

$$\ln(x) + \ln(x+1) \leq 0 \iff x^2 + x - 1 \leq 0 \iff \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

On rappelle que les solutions de l'inéquation sont à chercher dans \mathbb{R}_+^* .

Or $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$, donc : $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$.

Ainsi l'inéquation $\ln(x) + \ln(x+1) \leq 0$ admet pour ensemble de solutions : $]0, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$.

3. L'inéquation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a en posant $t = e^x$:

$$\begin{aligned} e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 > 0 &\iff e^{2x} \times e^{\ln(2)} + e^x \times e^{\ln(5)} - 3 > 0 \\ &\iff 2(e^x)^2 + 5e^x - 3 > 0 \\ &\iff 2t^2 + 5t - 3 > 0 \end{aligned}$$

Après calcul, le signe du polynôme $t \mapsto 2t^2 + 5t - 3$ est donné par :

t	$-\infty$	-3	$1/2$	$+\infty$	
$2t^2 + 5t - 3$	+	0	-	0	+

On reprend les équivalences précédentes :

$$e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 > 0 \iff 2t^2 + 5t - 3 > 0 \iff \left(t < -3 \text{ ou } t > \frac{1}{2} \right)$$

Or que $t = e^x$:

$$e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 > 0 \iff \left(\underbrace{e^x < -3}_{\text{impossible}} \text{ ou } e^x > \frac{1}{2} \right) \iff e^x > \frac{1}{2}$$

Comme la fonction $t \mapsto \ln(t)$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* , il vient finalement :

$$e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 > 0 \iff x > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Ainsi l'inéquation $e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 > 0$ admet pour ensemble de solutions :

$$]-\ln(2), +\infty[$$

4. L'inéquation a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $e^x > 0$, on peut multiplier par e^x et on a :

$$1 - 2e^x \geq \frac{e^{-x}}{3} \iff e^x \times (1 - 2e^x) \geq e^x \times \frac{e^{-x}}{3} \iff e^x - 2(e^x)^2 \geq \frac{1}{3}$$

En posant $t = e^x$, il vient :

$$1 - 2e^x \geq \frac{e^{-x}}{3} \iff -2t^2 + t - \frac{1}{3} \geq 0$$

Discriminant : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times (-\frac{1}{3}) = 1 - \frac{8}{3} = -\frac{5}{3} < 0$.

On en déduit que le polynôme $t \mapsto -2t^2 + t - \frac{1}{3}$ n'admet pas de racine.

Comme $a = -2 < 0$, on a alors : $\forall t \in \mathbb{R}, -2t^2 + t - \frac{1}{3} < 0$.

Ainsi l'inéquation $1 - 2e^x \geq \frac{e^{-x}}{3}$ n'admet pas de solution.

5. L'inéquation a un sens si et seulement si $2 - x \geq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \leq 2$.

Soit $x \in]-\infty, 2]$.

On souhaite passer au carré dans l'inégalité : il faut pour cela que les deux membres de l'inégalité soient de même signe, ici positifs.

On note d'une part que si $x < 0$, alors l'inégalité $x > \sqrt{2-x}$ ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif.

On suppose donc pour la suite que $x \in [0, 2]$.

Comme la fonction $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$x > \sqrt{2-x} \iff x^2 > (\sqrt{2-x})^2 \iff x^2 > 2-x \iff x^2 + x - 2 > 0$$

Après calcul, le signe du polynôme $x \mapsto x^2 + x - 2$ est donné par :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$x^2 + x - 2$	+	0	-	0	+

On reprend les équivalences précédentes :

$$x > \sqrt{2-x} \iff x^2 + x - 2 > 0 \iff (x < -2 \text{ ou } x > 1)$$

On rappelle que les solutions de l'inéquation sont à chercher dans $[0, 2]$.

Ainsi l'inéquation $x > \sqrt{2-x}$ admet pour ensemble de solutions : $]1, 2]$.

6. L'équation a un sens si et seulement si $x \geq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$x - \sqrt{x} = \frac{3}{2} \iff x - \frac{3}{2} = \sqrt{x}$$

Si $x < \frac{3}{2}$, alors l'égalité $x - \frac{3}{2} = \sqrt{x}$ ne peut pas être vérifiée puisqu'une racine carrée est un nombre positif.

On suppose donc pour la suite que $x \in [\frac{3}{2}, +\infty[$.

Comme la fonction $t \mapsto t^2$ est bijective sur \mathbb{R}_+ , on a :

$$x - \sqrt{x} = \frac{3}{2} \iff \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 = (\sqrt{x})^2 \iff x^2 - 3x + \frac{9}{4} = x$$

Ainsi :

$$x - \sqrt{x} = \frac{3}{2} \iff x^2 - 4x + \frac{9}{4} = 0$$

Après calcul, l'équation $x^2 - 4x + \frac{9}{4} = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ et } x_2 = 2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Pour conclure, il reste à voir si ces solutions sont dans $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

Or $\sqrt{7} > \sqrt{4} = 2$, donc $\frac{\sqrt{7}}{2} > 1$.

Il vient : $x_1 = 2 - \frac{\sqrt{7}}{2} < 2 - 1 = 1 < \frac{3}{2}$ et : $x_2 = 2 + \frac{\sqrt{7}}{2} > 2 + 1 = 3 \geq \frac{3}{2}$.

On en déduit que l'équation $x - \sqrt{x} = \frac{3}{2}$ admet une unique solution : $2 + \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Solution de 20.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n : 2^{n-1} \leq n!$.

▷ On calcule $2^{0-1} = \frac{1}{2} \leq 1 = 0!$, donc \mathcal{H}_0 est vraie.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que \mathcal{H}_n est vraie. Par hypothèse de récurrence, on a : $2^{n-1} \leq n!$. Comme $(n+1)! = n! \times (n+1)$, on multiplie par $n+1 > 0$ pour obtenir : $2^{n-1}(n+1) \leq (n+1)!$.

Il suffit de justifier maintenant que $2^n \leq 2^{n-1}(n+1)$, c'est-à-dire en divisant par $2^{n-1} > 0$, que $2 \leq n+1$, ou encore $1 \leq n$. On rencontre ici une difficulté car pour l'hérédité on a seulement pu supposer que $n \in \mathbb{N}$.

On va donc supposer que $n \geq 1$, mais il faudra démontrer à part que \mathcal{H}_1 est vraie pour que la récurrence soit complète.

Si $n \geq 1$, alors $n+1 \geq 2$ puis $2^{n-1}(n+1) \geq 2^n$ donc comme $(n+1)! \geq 2^{n-1}(n+1)$ d'après ce qui précède, on a bien démontré que $(n+1)! \geq 2^n$.

Ainsi \mathcal{H}_{n+1} est vraie.

▷ $n = 1$. On calcule $2^{1-1} = 2^0 = 1$ et $1! = 1$, donc \mathcal{H}_1 est vraie.

Bilan : on a démontré que \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 sont vraies, et que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_n \implies \mathcal{H}_{n+1}$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n-1} \leq n!$.

Remarque : si l'on veut une preuve «parfaitement lisse», on démontre d'abord \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_1 , puis on considère $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on suppose que \mathcal{H}_n est vraie et on démontre \mathcal{H}_{n+1} . La correction proposée ici est naturelle, il n'y a pas de raison a priori de démontrer \mathcal{H}_1 dans une récurrence simple, c'est en travaillant sur l'hérédité qu'on rencontre une difficulté.

Solution de 21.

Comme u_{n+3} dépend des 3 termes qui le précèdent, on fait une récurrence triple.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}_n : u_n = 2^n - 1$.

▷ On calcule $2^0 - 1 = 0 = u_0$, $2^1 - 1 = 1 = u_1$ et $2^2 - 1 = 3 = u_2$, donc \mathcal{H}_0 , \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 sont vraies.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que \mathcal{H}_n , \mathcal{H}_{n+1} et \mathcal{H}_{n+2} sont vraies. On calcule :

$$u_{n+3} \stackrel{\text{déf.}}{=} 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \stackrel{\text{H.R.}}{=} 2 \times 2^{n+2} - 2 + 2^{n+1} - 1 - 2 \times 2^n + 2 = 2^n \times (2^3 + 2 - 2) - 1 = 2^{n+3} - 1$$

donc \mathcal{H}_{n+3} est vraie, ce qui achève la récurrence.

Solution de 22.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note $\mathcal{H}_n : n$ est produit de nombres premiers.

▷ $n = 2$. 2 est premier, donc il est produit de nombres premiers.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On suppose que pour tout $k \in [2, n]$, \mathcal{H}_k est vraie.

— Si $n+1$ est premier, alors il est produit de nombres premiers.

— Sinon, il existe $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $n+1 = ab$ et ni a ni b n'est égal à 1 ou à $n+1$. Autrement dit, $a, b \in [2, n]$, donc par hypothèse ils sont produits de nombres premiers, donc par produit $n+1 = ab$ est produit de nombres premiers.

Ainsi \mathcal{H}_{n+1} est vraie, ce qui achève la récurrence.

Solution de 23.

On calcule en extension :

$$\begin{aligned} 2S_n &= S_n + S_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n \\ &\quad + n + (n-1) + \dots + 2 + 1 \\ &= n \times (n+1) \end{aligned}$$

en observant qu'en regroupant les termes par deux (par colonnes ici) on obtient $n+1$, et qu'il y a alors n paquets de deux termes.

Ainsi $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Solution de 24.

Si $q = 1$, alors $S_n = \sum_{k=0}^n 1^k = \sum_{k=0}^n 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n+1 \text{ termes}} = n+1$.

Sinon, on calcule

$$\begin{aligned} (1-q)S_n &= \sum_{k=0}^n q^k - q \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ &\quad - q - q^2 - \dots - q^n - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

et ainsi $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Solution de 25.

On calcule :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{1 \times \dots \times (n-p) \times (n-p+1) \times \dots \times n}{1 \times 2 \times \dots \times p \times 1 \times \dots \times (n-p)} = \frac{(n-p+1) \times \dots \times n}{1 \times 2 \times \dots \times p} = \frac{n(n-1) \dots (n-(p-1))}{p(p-1) \dots (p-(p-1))} = \prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}$$

Solution de 26.

1. $x \mapsto 2x^2 - 2$ et $x \mapsto 5x - 1$ sont dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{1/5\}$ (polynômes) et le dénominateur ne s'annule pas sur cet ensemble, donc par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1/5\}$ et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1/5\}, \quad f'(x) = \dots = \frac{10x^2 - 4x + 10}{(5x - 1)^2}$$

2. $x \mapsto e^x - 1$ et $x \mapsto 3e^x + 5$ sont dérivables sur \mathbb{R} (combinaisons linéaires de fonctions de référence), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3e^x + 5 \neq 0$ donc par quotient, f est dérivable sur \mathbb{R} . On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dots = \frac{8e^x}{(3e^x + 5)^2}$$

3. $x \mapsto 3x^2 + 2$ est dérivable sur \mathbb{R} (polynôme) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $3x^2 + 2 > 0$, $t \mapsto \ln t$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , donc par composition f est dérivable sur \mathbb{R} . On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 2}$$

4. $x \mapsto 2x + 1 = t$ est dérivable (affine) et strictement positif sur $] -1/2, +\infty[$, $t \mapsto \ln t$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* (référence), donc $x \mapsto \ln(2x + 1)$ est dérivable sur $] -1/2, +\infty[$ par composition. Par ailleurs, $X \mapsto X^5$ est dérivable sur \mathbb{R} (polynôme), donc par composition f est dérivable sur $] -1/2, +\infty[$. On calcule :

$$\forall x > -1/2, \quad f'(x) = \frac{10}{2x+1} (\ln(2x+1))^4$$

5. $x \mapsto 2x + 1 = t$ est dérivable (affine) et strictement positif sur $] -1/2, +\infty[$, $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* (référence, attention, ce n'est pas dérivable en 0!) donc par composition, $x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est dérivable sur $] -1/2, +\infty[$.

Par ailleurs, $X \mapsto e^X$ est dérivable (référence) sur \mathbb{R} , donc par composition f est dérivable sur $] -1/2, +\infty[$. On calcule :

$$\forall x > -1/2, \quad f'(x) = \frac{e^{\sqrt{2x+1}}}{\sqrt{2x+1}}$$

6. $x \mapsto \frac{2x+1}{x-1} = t$ est dérivable et strictement positif sur $] -\infty, -1/2[\cup] 1, +\infty[$ (quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas et tableau de signes) et $t \mapsto \ln t$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* (référence) donc par composition f est dérivable sur $] -\infty, -1/2[\cup] 1, +\infty[$.

On calcule alors pour tout $x \in] 1, +\infty[$:

$f(x) = \ln(2x + 1) - \ln(x - 1)$ ce qui permet de calculer simplement la dérivée :

$$f'(x) = \frac{2}{2x+1} - \frac{1}{x-1} = \dots = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)}$$

Pour tout $x \in] -\infty, -1/2[$, on écrit $f(x) = \ln(-(2x + 1)) - \ln(-(x - 1))$ ce qui permet de calculer simplement la dérivée :

$$f'(x) = \frac{-2}{-(2x+1)} - \frac{-1}{-(x-1)} = \dots = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)}$$

(expressions identiques)

7. $x \mapsto x^2 + \ln x = t$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* par somme de fonctions de référence, $t \mapsto \sin t$ est dérivable sur \mathbb{R} (référence) donc par composition f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = (2x + 1/x) \cos(x^2 + \ln x)$$

8. $x \mapsto 3x + 1$ est dérivable sur \mathbb{R} (polynôme) donc sur D l'ensemble des réels tels que $3x + 1$ ne soit pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$t \mapsto \tan t$ est dérivable sur l'ensemble des réels qui ne sont pas de la forme $\pi/2 + k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ainsi par composition f est dérivable sur D .

On calcule alors :

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{3}{\cos^2(3x+1)}$$

9. Si D est l'ensemble des réels tels que $\sin x \neq -1$ alors une étude détaillée montre que f est dérivable sur D (le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R}).

On calcule :

$$\forall x \in D, \quad f'(x) = \frac{\frac{-\cos(x)}{1+\sin x} (x^2 + x + 1) - (2x + 1) \ln(1 + \sin x)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Solution de 27.

On note D_1 l'ensemble de définition et D_2 l'ensemble de dérivabilité. Le lecteur est invité à rédiger de façon détaillée les justifications de ces résultats.

- $D_1 = D_2 = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$
- $D_1 = D_2 = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 2\alpha(1+2x)^{\alpha-1} \ln 3x + \frac{(1+2x)^\alpha}{x}$
- $D_1 = [-1, 1], D_2 =] -1, 1[$, $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$
- $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $f'(x) = (1+2x^2)e^{x^2}$
- $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\alpha x(x^2+1)^{\alpha-1}$
- $D_1 = D_2 = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = (\ln x + 1)x^x$
- $D_1 = D_2 =] -1, +\infty[$, $f'(x) = (2x \ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x})(1+x)^{x^2}$
- $D_1 = D_2 = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f'(x) = \frac{10x-2}{(x+1)^3}$
- $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-20x^3+4x}{(x^2+1)^4}$
- $D_1 = D_2 = \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = (\frac{\ln(3x+1)}{x} + \frac{3 \ln x}{3x+1})(3x+1)^{\ln x}$
- $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1}$
- $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
- $D_1 = D_2 = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{-2 \sin x \cos x}{\cos^2 x + 1}$
- $D_1 = D_2 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}] k\pi, \pi/2 + k\pi[$, $f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin(2x)}$

Solution de 28.

CC signifie «croissances comparées» et TA signifie «taux d'accroissement».

- Sans indétermination : $+\infty$.
- Sans indétermination : $+\infty$ et 2.
- On factorise numérateur et dénominateur par «le terme le plus fort» : $-\infty$.
- On factorise numérateur et dénominateur par «le terme le plus fort» : $+\infty$.
- On factorise numérateur et dénominateur par «le terme le plus fort» : $-\infty$.
- On factorise numérateur et dénominateur par «le terme le plus fort» : 2.
- On simplifie :

$$\frac{x^2-1}{x^2-2x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1} \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty \\ \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty \end{cases}$$

- On simplifie :

$$\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x^2-1}{x^2-x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x} \begin{cases} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \\ \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\infty \end{cases}$$

9. On factorise par les termes «les plus forts» :

$$\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x + \sqrt{x^2} \sqrt{1 + 1/x^2}}{x^2 + \sqrt{x^2} \sqrt{1 + 1/x^2}} \stackrel{\sqrt{x^2}=|x|=x, x \geq 0}{=} \frac{x + x \sqrt{1 + 1/x^2}}{x^2 + x \sqrt{1 + 1/x^2}} = \frac{x}{x^2} \times \frac{1 + \sqrt{1 + 1/x^2}}{1 + \frac{1}{x} \sqrt{1 + 1/x^2}} = \frac{1}{x} \times \frac{1 + \sqrt{1 + 1/x^2}}{1 + \frac{1}{x} \sqrt{1 + 1/x^2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

10. On factorise par le terme «le plus fort» :

$$\frac{1}{x}(\sqrt{x+1} - x - 1) = \frac{1}{x}(\sqrt{x} \sqrt{1 + 1/x} - x - 1) = \frac{\sqrt{x}}{x} - 1 - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1$$

11. Par CC. et différence : 0.

12. On factorise par «le terme le plus fort» : $e^x - x = e^x(1 - xe^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ puisque par CC, $xe^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

13. On développe et par CC. : 0.

14. On factorise par le terme «le plus fort» : $\frac{e^x}{3x+2} = \frac{e^x}{x} (3 + 2/x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

15. On factorise par le terme «le plus fort» : e^{2x} au voisinage de $+\infty$, et $e^{-x/2}$ au voisinage de $-\infty$, et on trouve les limites $+\infty$ en $+\infty$ et $+\infty$ en $-\infty$.

16. On factorise par le terme «le plus fort» et on utilise les C.C. :

$$\frac{e^{3x} - e^{x^2}}{(\ln^3(x) + x)^2} = \frac{e^{x^2}}{x^2} \times \frac{e^{x(3-x)} - 1}{\underbrace{\left(\frac{\ln^3(x)}{x} + 1\right)^2}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

17. Par expression conjuguée :

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-1}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \stackrel{x-1 \geq 0, x+1 \geq 0}{=} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$18. \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2}} = \frac{x^2+1-2}{(x-1)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2})} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2})} =$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{2}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$19. \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = \sqrt{x}+3 \xrightarrow{x \rightarrow 9} \boxed{6}$$

$$20. \sqrt{x} \ln\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = x^{1/2} \ln x^2 - x^{1/2} \ln(1+x) = 2 \underbrace{x^{1/2} \ln x}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -0 \text{ (C.C.)}} - \underbrace{x^{1/2} \ln(1+x)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \boxed{0}$$

$$21. e^{\sqrt{x}} - 2 \ln x - x^2 = e^{\sqrt{x}} \left(1 - 2 \frac{\ln \sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}} - \frac{(\sqrt{x})^4}{e^{\sqrt{x}}}\right)$$

Or $X = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $\frac{\ln X}{e^X} = \frac{\ln X}{X} \frac{X}{e^X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ (C.C.) et $\frac{X^4}{e^X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ (C.C.) donc par composition puis produit :

$$e^{\sqrt{x}} - 2 \ln x - x^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{+\infty}$$

$$22. \frac{1-x^2}{x} e^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \boxed{+\infty} \text{ (calcul direct)}$$

$$\frac{1-x^2}{x} e^{1/x} = \frac{1}{x} e^{1/x} - \underbrace{x^2 e^{1/x}}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -0}$$

Or $X = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et $X e^X \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ (C.C.) donc par composition puis différence il vient :

$$\frac{1-x^2}{x} e^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \boxed{0}$$

$$23. (x-2) \ln(x^2 - x - 2) = (x-2) \ln((x-2)(x+1)) = (x-2) \ln(x-2) + \underbrace{(x-2) \ln(x+1)}_{\xrightarrow{x \rightarrow 2^+} -0}$$

avec $X = x-2 \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} 0^+$ et $X \ln X \xrightarrow{X \rightarrow 0^+} 0$ (C.C.). Ainsi, par composition puis somme il vient : $(x-2) \ln(x^2 - x - 2) \xrightarrow{x \rightarrow 2^+} \boxed{0}$

$$24. x^2 e^{-e^x} = \frac{x^2}{e^x} e^x e^{-e^x}$$

avec $\frac{x^2}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (C.C.), $X = e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $X e^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ (C.C.), donc par composition

$$x^2 e^{-e^x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{0}$$

$$25. e^{-1/x} \ln x = \frac{1}{x} e^{-1/x} x \ln x$$

avec $x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ (C.C.), $X = 1/x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et $X e^{-X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$ donc par composition puis produit il vient

$$e^{-1/x} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \boxed{0}$$

$$26. e^x \ln(x^2 + x) = (x^2 + x) e^x \frac{\ln(x^2 + x)}{x^2 + x} = x^2 e^x \frac{\ln(x^2 + x)}{x^2 + x} + x e^x \frac{\ln(x^2 + x)}{x^2 + x}$$

avec $x^2 e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ (C.C.), $x e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ (C.C.), $X = x^2 + x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ et $\frac{\ln X}{X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 0$, donc par composition, produit et somme il vient

$$e^x \ln(x^2 + x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \boxed{0}$$

$$27. \frac{\sin(e^x - 1)}{x} = \frac{\sin(e^x - 1)}{e^x - 1} \frac{e^x - 1}{x}$$

avec $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ (T.A.), $X = e^x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, $\frac{\sin X}{X} \xrightarrow{X \rightarrow 0} 1$ donc par composition et produit il vient :

$$\frac{\sin(e^x - 1)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{1}$$

Solution de 29.

$$1. \frac{e^{x^2}}{x + \ln x} = \frac{e^{x^2}}{(x^2)^{1/2}} \frac{1}{\underbrace{1 + \ln x/x}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ (croissances comparées)}$$

$$2. \frac{(\ln x)^3 + x}{2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 2x} = \frac{x}{2x} \frac{1 + (\ln x)^3/x}{\underbrace{\sqrt{x}/x + 1/(2x) + 1}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \text{ (croissances comparées)}$$

$$3. \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } x \mapsto \sin x \text{ est bornée et } x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

$$4. -x e^{\frac{1}{x}} \rightarrow -\infty \text{ (aucune difficulté!)}$$

5. Il faut distinguer 0^+ et 0^- .

$$-x e^{\frac{1}{x}} = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \text{ et } \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0$$

(croissances comparées)

$$6. \frac{e^{x/3} - e^{2x}}{x^5 + \ln x + \cos x} = \frac{e^{2x}}{x^5} \frac{e^{-(5/3)x} - 1}{\underbrace{1 + \ln x/x^5 + \cos x/x^5}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ (croissances comparées)}$$

7. $\sin x + \cos x$ est bornée (compris entre -2 et 2) et $x + \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc la limite est 0.

8. Idem.

9. !!! tend vers $1 - 1 = 0...$

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ donc $\sqrt{2+x^2} \geq \sqrt{2}$ donc $\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0^+$ donc par quotient la limite est $+\infty$.

11. On écrit, pour x au voisinage de 1 (donc $1-x > 0$):

$$\frac{\sqrt{1-x}}{1-x} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}^2} = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\geq 0}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$$

12. Pour tout $x \in [0, 1[, \lfloor x \rfloor = 0$ donc $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

Par ailleurs, pour tout $x \in]-1, 0[, \lfloor x \rfloor = -1$ donc $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty$

13. Pour tout $x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + 1$ puis multipliant par $x > 0$ on a :

$$x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + x$$

donc en échangeant les inégalités (technique classique : $1 \leq x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor + x \iff 1-x \leq x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ puis on réutilise à la suite l'inégalité $x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leq 1$) il vient :

$$1-x \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$$

et par encadrement, on a : $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$

Si $x < 0$, on obtient l'inégalité :

$$1-x \geq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 1$$

ce qui donne encore : $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 1$

14. Pour tout $x > 1, 0 < \frac{1}{x} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ et $x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$ donc la limite est nulle.

15. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1 \implies \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1 \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{x} + \frac{1}{x}$$

donc en échangeant les inégalités :

$$1 - \frac{1}{x} \leq \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$$

donc par comparaison : $\frac{\lfloor x \rfloor}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

Solution de 30.

1. On considère la fonction $f : x \mapsto x \ln x$, elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* (par produit) et de dérivée $f'(x) = \ln x + 1$.

Comme $f(2) = 2 \ln 2$ et $f'(2) = \ln 2 + 1$ il vient : $\frac{x \ln x - 2 \ln 2}{x-2} \xrightarrow{x \rightarrow 2} \ln 2 + 1$

2. On reconnaît une limite usuelle : $\frac{e^X - 1}{X} \xrightarrow{X \rightarrow 0} 1$ et comme $X = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par composition des limites ont

$$a : \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$3. \text{ On écrit : } \frac{e^{x^2} - 1}{x} = x \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

4. On utilise la formule : $\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$ donc :

$$\frac{\ln(\cos(2x))}{\sin^2(x)} = -2 \frac{\ln(1 - 2 \sin^2(x))}{-2 \sin^2(x)}$$

et comme $\frac{\ln(1+X)}{X} \xrightarrow{X \rightarrow 0} 1$ et que $X = -2 \sin^2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ par composition des limites il vient :

$$\frac{\ln(\cos(2x))}{\sin^2(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2$$

5. On a $\frac{\ln(1+X)}{X} \xrightarrow{X \rightarrow 0} 1$ et $X = \cos x \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} 0$ donc par composition il vient $\frac{\ln(1+\cos x)}{\cos x} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} 1$

6. On décompose pour faire apparaître plusieurs limites connues ou calculables facilement :

$$\frac{x^a - a^x}{x^4 - a^4} = \frac{x^a - a^a + a^a - a^x}{x-a} \frac{x-a}{x^4 - a^4} = \left(\frac{x^a - a^a}{x-a} - \frac{e^{x \ln a} - e^{a \ln a}}{x-1} \right) \frac{1}{\frac{x^4 - a^4}{x-a}}$$

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^a, g : x \mapsto e^{x \ln a}$ et $h : x \mapsto x^4$, ces fonctions sont dérivables sur \mathbb{R}_+^* (donc en a) et on calcule :

$$\forall x > 0, f'(x) = ax^{a-1}, g'(x) = \ln a e^{x \ln a}, h'(x) = 4x^3$$

Ainsi en reconnaissant des taux d'accroissements :

$$\frac{x^a - a^x}{x^4 - a^4} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{a^{a-3}(1 - \ln a)}{4}$$

Solution de 31.

on considère $\varphi : x \mapsto \sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2$, c'est une fonction dérivable sur \mathbb{R}_+ et on calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$$

et le signe de cette expression, même factorisée, n'est pas évident.

On peut encore dériver (car $x \mapsto \varphi'(x)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+) :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi''(x) = -\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}} + \frac{1}{4} \geq 0$$

puisque $1+x \geq 1$.

On en déduit le tableau :

x	0	$+\infty$
$\varphi''(x)$		+
φ'	0	↗
$\varphi'(x)$		+
φ	0	↗

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{1+x} \geq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$.

Solution de 32.

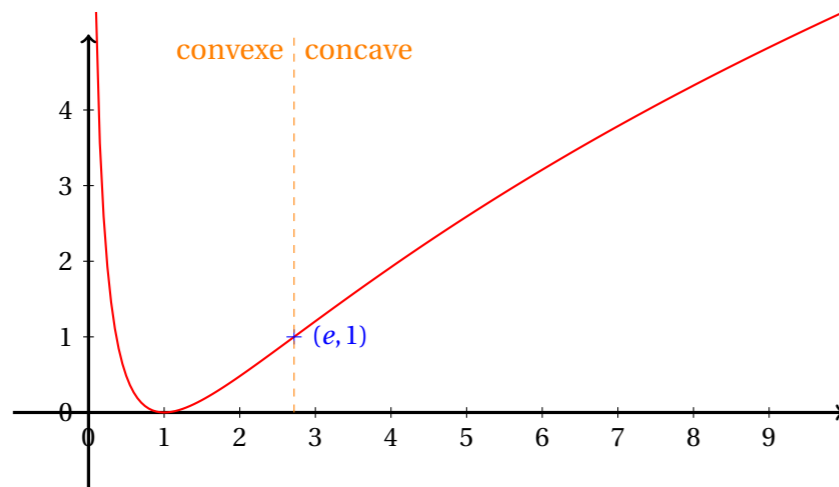
1. f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* (référence et passage au carré), on calcule pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 2\frac{1}{x}\ln(x) \quad \text{et} \quad f''(x) = 2\frac{-1}{x^2}\ln(x) + 2\frac{1}{x^2} = 2\frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

ce qui donne le tableau complet :

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +		+
f	$+\infty$	\searrow 0 \nearrow	1	\nearrow $+\infty$
$f''(x)$		+ + 0 -		
f		convexe	(inflexion) concave	

Graphe.



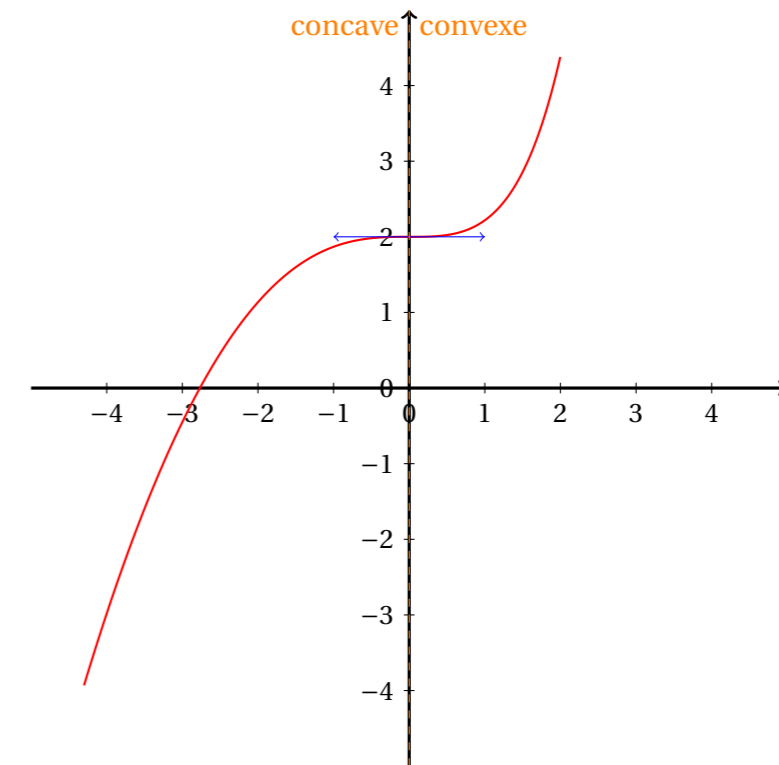
2. f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} par somme et on calcule pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = e^x - x - 1 \quad \text{et} \quad f''(x) = e^x - 1$$

ce qui donne le tableau complet :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	
f'	\searrow	0	\nearrow
$f'(x)$		+ 0 +	
f	$-\infty$	\nearrow 2 \nearrow	$+\infty$
f		concave (inflexion) convexe	

Graphe.



Solution de 33.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 \geq 1 > 0$ donc f est définie sur \mathbb{R}

2. \mathbb{R} est centré en 0. Par ailleurs :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \ln(1+(-x)^2) = \ln(1+x^2) = f(x)$$

Donc f est paire

3. $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} , $t \mapsto \ln(t)$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t = 1+x^2 \in \mathbb{R}_+^*$, donc f est dérivable sur \mathbb{R} . On calcule alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

En en déduit les variations (limite en $+\infty$ évidente et argument de parité) :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
f	$+\infty$	\searrow 0 \nearrow	$+\infty$

4. La fonction f' est deux fois dérivable sur \mathbb{R} en tant que quotient de deux fonctions polynômiales dont le dénominateur ne s'annule pas sur \mathbb{R} . On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = \frac{2 \times (1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

On en déduit le tableau complet des variations et de convexité :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+		
f	$+\infty$	\searrow	$\ln(2)$	\swarrow	$+\infty$	
$f''(x)$		-	0	+		
f		concave		convexe		concave

Il y a deux points d'inflexion : $(-1, \ln(2))$ et $(1, \ln(2))$

5. Comme f est dérivable sur \mathbb{R} , l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = -1$ a pour équation :

$$y = f'(-1)(x - (-1)) + f(-1) \iff y = -x + \ln(2) - 1$$

L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = 1$ a pour équation :

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \iff y = x + \ln(2) - 1$$

6. On calcule :

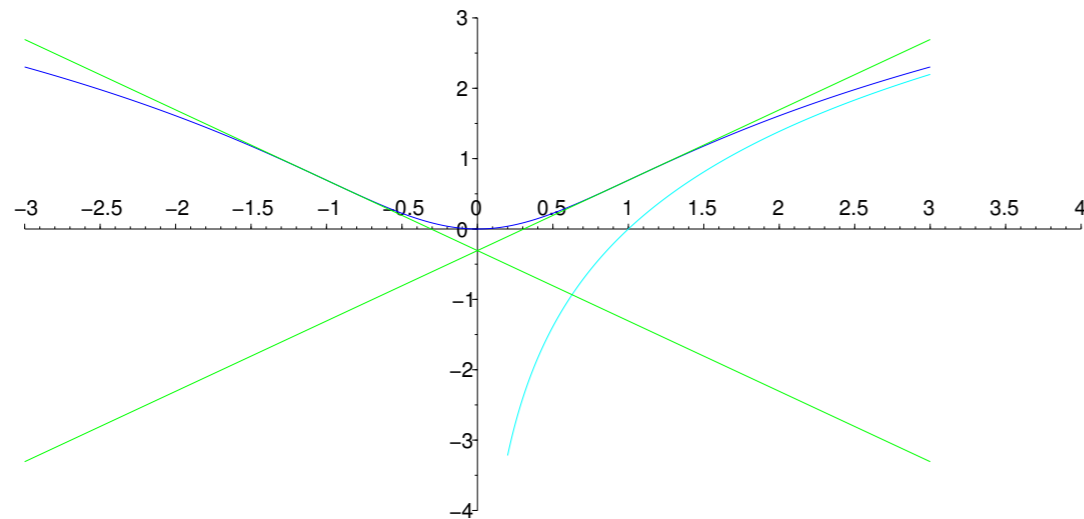
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - 2\ln(x) = \ln(1 + x^2) - \ln(x^2) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \geq 0$$

car $1 + \frac{1}{x^2} \geq 1$ implique, par croissance de \ln sur \mathbb{R}_+^* , que $\ln(1 + 1/x^2) \geq \ln(1) = 0$.

Par ailleurs : $f(x) - 2\ln(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

7. Pour effectuer ce tracé, on tient compte de la position relative du graphe de f et de celui de $x \mapsto 2\ln(x)$ (qui se trouve en dessous vu le signe trouvé à la question précédente, mais se rapproche de celui de f lorsque x grandit).

On a :



Solution de 34.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^*$

2. Les fonctions $t \mapsto 4t^2 - 1$, $t \mapsto \ln(t)$ et $t \mapsto -2t$ sont deux fois dérivables sur \mathbb{R}_+^* , donc par produit $t \mapsto -2t\ln(t)$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* et par somme $f : t \mapsto 4t^2 - 2t\ln(t) - 1$ est deux fois dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

On calcule :

$$\forall t > 0, f'(t) = 8t - 2\ln(t) - 2 \quad \text{et} \quad f''(t) = 8 - \frac{2}{t}$$

3. On étudie le signe de f'' sur \mathbb{R}_+^* :

$$f''(t) > 0 \iff 8 - \frac{2}{t} > 0 \iff 8 > \frac{2}{t} \iff \frac{1}{8} < \frac{t}{2} \quad (\text{car } 8 > 0 \text{ et } \frac{2}{t} > 0)$$

$$\iff \frac{1}{4} < t$$

On étudie aussi les limites de $f'(t)$ en 0 et $+\infty$:

$$f'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty \quad \text{et} \quad f'(t) = 8t \left(1 - \frac{1}{4} \underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ par C.C.}} - \underbrace{\frac{2}{t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0} \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

Enfin, $f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{4} - 2\ln\left(\frac{1}{4}\right) - 2 = 2\ln(2^2) = 4\ln 2$ On a donc le tableau de variations :

t	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$		
$f''(t)$		-	0	+	
f'	$+\infty$	\searrow	$4\ln 2$	\swarrow	$+\infty$

4. D'après le tableau de variations de f' : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f'(t) \geq 4\ln 2 > 0$

On calcule aussi les limite de $f(t)$ en 0^+ et $+\infty$:

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -1 \quad \text{puisque } t \ln t \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \text{ par croissances comparées}$$

et

$$f(t) = 4t^2 \left(1 - \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \text{ par C.C.}} - \underbrace{\frac{1}{4t^2}}_{\xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0} \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

On obtient le tableau de variations :

t	0	$1/4$	$+\infty$		
$f'(t)$		+	+		
f	-1	\nearrow	$-\frac{3}{4} + \ln(2)$	\swarrow	$+\infty$
$f''(t)$		-	0	+	
f		concave		convexe	

Le point $(1/4, -3/4 + \ln(2))$ est point d'inflexion du graphe de f

Par ailleurs, comme $\ln(2) \approx 0,7$ et $3/4 = 0,75$, $-\frac{3}{4} + \ln(2) < 0$

5. L'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse $1/4$ est, d'après les calculs déjà faits de $f(1/4)$ et $f'(1/4)$:

$$y = 4\ln(2)(x - 1/4) - 3/4 + \ln(2) = 4\ln(2)x - 3/4$$

S'agissant de la tangente en un point d'inflexion, d'après notre étude précédente,

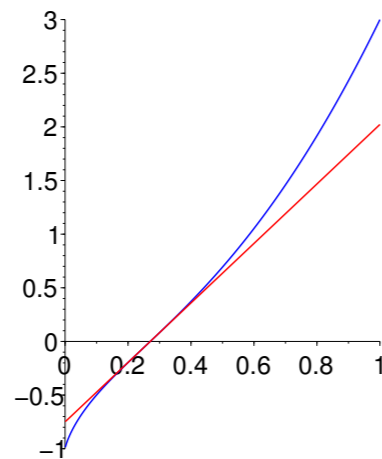
\mathcal{C}_f est en dessous de sa tangente sur $]0, 1/4[$ et au dessus sur $]1/4, +\infty[$

6. (a) On a vu que $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -1$ donc f est continue à droite en 0
 (b) On étudie le taux d'accroissement :

$$\frac{f(t) - \tilde{f}(0)}{t} = \frac{4t^2 - 2t \ln t - 1 - (-1)}{t} = \frac{4t^2 - 2t \ln t}{t} = 4t - 2 \ln t \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en 0^+ , \mathcal{C}_f admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse $t = 0$

7. Tracé :



8. (a) — f est continue sur \mathbb{R}_+^* (car dérivable)
 — f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* (déjà vu)
 — $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -1$ et $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$
 Ainsi f est une bijection de \mathbb{R}_+^* vers $] -1, +\infty[$.
 Or $0 \in] -1, +\infty[$, donc il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(\alpha) = 0$.
 (b) On a $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -1 < 0$ et $f(1) = 4 - 2\ln(1) - 1 = 3 > 0$ donc, puisque $f(\alpha) = 0$, par croissance de f , on a $0 < \alpha < 1$
 (c) On traduit le fait que $f(\alpha) = 0$ avec la formule définissant f :

$$f(\alpha) = 0 \iff 4\alpha^2 - 2\alpha \ln \alpha - 1 = 0 \iff 2\alpha - \ln \alpha - \frac{1}{2\alpha} = 0 \quad (\text{car } \alpha > 0)$$

$$\iff \ln \alpha = 2\alpha - \frac{1}{2\alpha}$$

Solution de 35.

1. Par définition, $g : x \mapsto x^a = e^{a \ln x}$ si bien que l'ensemble de définition de cette fonction est \mathbb{R}_+^* .

Elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et sa dérivée est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = ax^{a-1}$$

2. — Si $a < 0$, alors $x^a \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ donc $h_a(x) = e^{(1-x^a)\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$
 — Si $a > 0$, alors $x^a \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ donc $h_a(x) = e^{(1-x^a)\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$
 h_a est alors prolongeable par continuité en 0
 3. On se place donc dans le cas où $a > 0$ et on note encore (abusivement) h_a la fonction prolongée. On a $h_a(0) = 0$. On étudie donc la dérivabilité de h_a en 0 :

$$\forall x > 0, \quad \frac{h_a(x) - h_a(0)}{x - 0} = \frac{x^{1-x^a} - 0}{x} = x^{-x^a} = e^{-x^a \ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1 \quad (\text{par croissances comparées})$$

Donc le graphe de h_a admet une (demi)-tangente d'équation $y = x$ au point d'abscisse $x = 0$

4. (a) — Si $a < 0$, alors $x^a \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $h_a(x) = e^{(1-x^a)\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$
 — Si $a > 0$, alors $x^a \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $h_a(x) = e^{(1-x^a)\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$
 (b) Pour $a < 0$, pour tout $x > 0$:

$$g_a(x) = \frac{h_a(x) - x}{x^{a+1} \ln x} = \frac{x^{1-x^a} - x}{x^{a+1} \ln x} = \frac{x^{-x^a} - 1}{x^a \ln x} = -\frac{e^{-x^a \ln x} - 1}{-x^a \ln x}$$

Or, $x^a \ln x = -\left(\frac{1}{x}\right)^{-a} \ln \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (composition et croissance comparées) et $\frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$,

donc par composition $g_a(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -1$

(c) D'après la question précédente, il existe $\varepsilon : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ telle que :

$$\frac{h_a(x) - x}{x^a \ln x} = -1 + \varepsilon(x)$$

(concrètement : $\varepsilon(x) = \frac{h_a(x) - x}{x^a \ln x} + 1$.)

Ainsi, on a : pour tout $x > 0$,

$$h_a(x) - x = -x^a \ln x + \varepsilon(x)x^a \ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

(croissances comparées et composition comme à la question précédente.)

Ainsi la droite d'équation $y = x$ est asymptote à \mathcal{C}_a

5. (a) On calcule, pour tout $x > 0$:

$$\frac{h_a(x)}{h_b(x)} = \frac{x^{1-x^a}}{x^{1-x^b}} = x^{x^b - x^a}$$

Au passage, on observe que $h_b(x)$ ne s'annule pas sur \mathbb{R}_+^* puisque $h_b(x) = e^{(1-x^b)\ln x}$.

(b) Un point commun à \mathcal{C}_a et à \mathcal{C}_b vérifie $h_a(x) = h_b(x)$ c'est-à-dire $\frac{h_a(x)}{h_b(x)} = 1$.

On résout donc :

$$\frac{h_a(x)}{h_b(x)} = 1 \iff x^{x^b - x^a} = 1 \iff e^{(x^b - x^a)\ln x} = 1 \iff (x^b - x^a)\ln x = 0$$

$$\iff x^b - x^a = 0 \text{ ou } \ln x = 0 \iff x^b = x^a \text{ ou } x = 1 \iff e^{b \ln x} = e^{a \ln x} \text{ ou } x = 1$$

$$\iff b \ln x = a \ln x \text{ ou } x = 1 \iff (b - a)\ln x = 0 \text{ ou } x = 1$$

$$\iff \ln x = 0 \text{ ou } x = 1 \iff x = 1$$

Donc \mathcal{C}_a et \mathcal{C}_b ont un unique point commun qui est $(1, h_a(1)) = (1, 1)$

(c) On a :

$$\frac{h_a(x)}{h_b(x)} > 1 \iff e^{(x^b-x^a)\ln x} > 1 \iff (x^b-x^a)\ln x > 0 \iff x^a(x^{b-a}-1)\ln x > 0$$

$$\iff \underbrace{x^a}_{>0} (e^{(b-a)\ln x} - 1)\ln x > 0$$

Si $a \geq b$, alors $e^{(b-a)\ln x} - 1$ est du signe opposé à celui de $\ln x$, donc $\frac{h_a(x)}{h_b(x)} \leq 1$.

Si $b > a$, alors $e^{(b-a)\ln x} - 1$ est du signe de $\ln x$, donc $\frac{h_a(x)}{h_b(x)} > 1$ (inégalité stricte si et seulement si $x \neq 1$ car $h_a(1) = h_b(1)$ d'après la question précédente).

Ainsi \mathcal{C}_a est en dessous de \mathcal{C}_b si $b > a$

6. (a) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $h_a(x) = e^{(1-x^a)\ln x}$. Or, $x \mapsto 1-x^a$ et $x \mapsto \ln x$ sont dérivable sur \mathbb{R}_+^* , $X \mapsto e^X$ est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(1-x^a)\ln x \in \mathbb{R}$, donc par composition

h_a est dérivable sur \mathbb{R}_+^*

On calcule alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'_a(x) = \left(-ax^{a-1}\ln x + \frac{1-x^a}{x}\right)e^{(1-x^a)\ln x} = \frac{x^a(-a\ln x + x^{-a}-1)}{x}e^{(1-x^a)\ln x}$$

(b) Comme pour tout $x > 0$, $x^a > 0$ et $e^{(1-x^a)\ln x} > 0$, $h'_a(x)$ est du signe de $\phi_a(x) = -a\ln x + x^{-a} - 1$

(c) ϕ_a est dérivable sur \mathbb{R}_+^* (combinaison linéaire de fonctions dérivables). On calcule :

$$\forall x > 0, \quad \phi'_a(x) = -ax^{-a-1} - a\frac{1}{x} = -a\frac{x^{-a}+1}{x}$$

qui est du signe de $-a$ (et est non nul).

— si $a > 0$, ϕ_a est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* et comme $\phi_a(1) = 1^{-a} - a\ln 1 - 1 = 0$, ϕ_a est positive sur $]0, 1[$ et négative sur $]1, +\infty[$.

— si $a < 0$, les variations sont opposées donc le signe est opposé.

On résume :

— Si $a > 0$:

x	0	1	$+\infty$
$\phi'_a(x)$		-	-
ϕ_a		0	
h'_a		+ 0 -	
h_a	0	1	0

— Si $a < 0$:

x	0	1	$+\infty$
$\phi'_a(x)$		+	+
ϕ_a		0	
h'_a		- 0 +	
h_a	$+\infty$	1	$+\infty$

7. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé :

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad H_x(a) = e^{(1-e^{a\ln x})\ln x}$$

donc H_x est dérivable sur \mathbb{R}^* par composition (à écrire en détail...) et on calcule (en dérivant par rapport à a !) :

$$\forall a \in \mathbb{R}^*, \quad H'_x(a) = \left(-\ln x e^{a\ln x} \times \ln x\right) e^{(1-e^{a\ln x})\ln x} = -\underbrace{(\ln x)^2}_{\geq 0} \underbrace{x^a}_{>0} \underbrace{h_a(x)}_{>0} \leq 0$$

donc H_x est décroissante sur \mathbb{R}_-^* et sur \mathbb{R}_+^* .

Si $x = 1$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $H_1(a) = 1$.

Si $x > 1$, alors

$$e^{a\ln x} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} +\infty \quad e^{a\ln x} \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} 0 \quad e^{a\ln x} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 1$$

Si $x < 1$, alors

$$e^{a\ln x} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0 \quad e^{a\ln x} \xrightarrow{a \rightarrow -\infty} +\infty \quad e^{a\ln x} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 1$$

Ceci permet de calculer les limites en $+\infty$, $-\infty$ et 0 de H_x . On donne les tableaux, en dehors du cas $x = 1$ où H_1 est constante :

Si $x > 1$	a	$-\infty$	0	$+\infty$
	H_x	x	1	0

Si $x < 1$	a	$-\infty$	0	$+\infty$
	H_x	$+\infty$	1	x

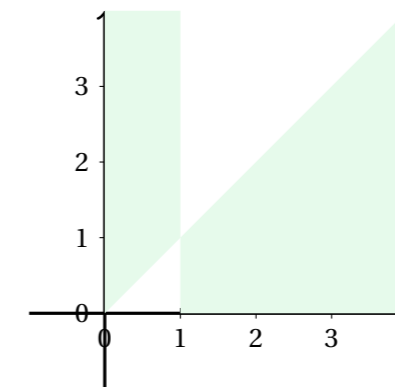
8. On s'appuie sur les variations de H_x : par continuité et stricte monotonie on justifie la bijectivité de H_x sur certains intervalles dont il ne reste qu'à calculer l'image.

— Si $x \in]0, 1[$, alors H_x est à valeurs dans $]x, +\infty[$, pour tout $y \in]x, +\infty[$, il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = H_x(a) = h_a(x)$.

— Si $x = 1$, alors pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $h_a(1) = 1$.

— Si $x \in]1, +\infty[$, alors H_x est à valeurs dans $]0, x[$, pour tout $y \in]0, x[$, il existe $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $y = H_x(a) = h_a(x)$.

Graphiquement cela correspond aux régions :



Pour ces couples (x, y) tels que $x \neq 1$, on résout :

$$h_a(x) = y \iff x^{1-x^a} = y \iff (1-x^a)\ln(x) = \ln(y) \iff 1-x^a = \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \iff x^a = 1 - \frac{\ln(y)}{\ln(x)}$$

Si $x \in]0, 1[$, $\ln(x) < 0$ et $x < y$ donc $\ln(x) < \ln(y)$, puis $1 - \frac{\ln(y)}{\ln(x)} > 0$; si $x \in]1, +\infty[$, $\ln(x) > 0$ et $x > y$ donc

$\ln(x) > \ln(y)$, puis $1 - \frac{\ln(y)}{\ln(x)} > 0$; ainsi

$$h_a(x) = y \iff x^a = 1 - \frac{\ln(y)}{\ln(x)} \iff a\ln(x) = \ln\left(1 - \frac{\ln(y)}{\ln(x)}\right) \iff a = \frac{\ln\left(1 - \frac{\ln(y)}{\ln(x)}\right)}{\ln(x)}$$

9. On trace avec les données des questions précédentes :

