

Outils mathématiques pour les sciences

I. Géométrie euclidienne dans le plan ou l'espace

Les définitions et résultats de cette partie sont donnés sans démonstration, très souvent *dans le désordre par rapport à leur construction formelle rigoureuse*.

Ils correspondent à des cas particuliers de chapitres d'algèbre linéaire et bilinéaire plus généraux. Cependant, ils sont donnés ici sous une forme directement exploitable en physique ou en SII, mais aussi en maths, et c'est là l'objectif de ce document. Il est important d'avoir une vision géométrique des différentes situations rencontrées dans cette partie.

Sont à retenir et à savoir utiliser, les formules du produit scalaire (plan et espace) et du produit vectoriel (espace). Les formules des déterminants en dimension 2 et 3 ne sont pas nécessaires pour l'instant.

1. Géométrie élémentaire dans le plan

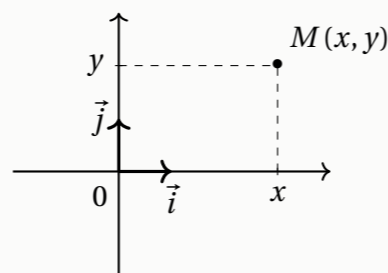
a) Coordonnées, orientation

📖 Définition (coordonnées cartésiennes).

Dans le plan \mathbb{R}^2 , on considère un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ où O est un point du plan et les vecteurs \vec{i} et \vec{j} sont non colinéaires.

À tout point M du plan, on peut associer le couple (x, y) de ses coordonnées dans le repère \mathcal{R} , qui correspond à l'unique décomposition : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Le couple (x, y) est appelé *couple des coordonnées cartésiennes* du point M dans le repère \mathcal{R} .



En général, en physique et en SII, on travaille avec des «repères orthonormés directs».

Pour cela, on fixe une orientation du plan, on décide *arbitrairement* que le sens direct est le sens anti-horaire (ou sens trigonométrique), c'est l'usage.

Une *base orthonormée directe* du plan \mathbb{R}^2 est un couple de vecteurs (\vec{i}, \vec{j}) de norme 1 tels que l'angle

orienté (\vec{i}, \vec{j}) est égal à $\frac{\pi}{2}$ modulo $[2\pi]$ (on se repose pour l'instant sur les notions «intuitives» de norme et d'angle); et si O est un point du plan que l'on appelle *origine*, alors le triplet (O, \vec{i}, \vec{j}) est un *repère orthonormé direct*.

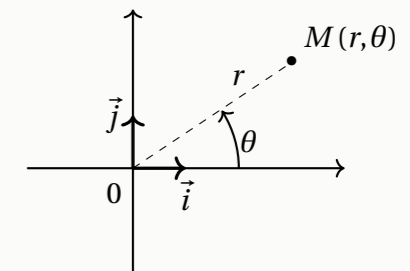
📖 Définition (coordonnées polaires).

Dans le plan \mathbb{R}^2 on considère un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

À tout point M du plan, on peut associer un couple (r, θ) où r est la norme du vecteur \vec{OM} et θ un angle orienté (\vec{i}, \vec{OM}) modulo 2π .

En d'autres termes, $\vec{OM} = r\vec{u}_\theta$ où $\vec{u}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ (\vec{u}_θ est l'image de \vec{i} par la rotation de centre O et d'angle θ).

Le couple (r, θ) est appelé *couple des coordonnées polaires* du point M .



b) Opérations

📖 Définition (produit scalaire).

Dans le plan \mathbb{R}^2 rapporté à une base orthonormée de deux vecteurs (\vec{i}, \vec{j}) , pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on appelle :

- *norme du vecteur* $\vec{u} = (x, y)$, le nombre $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- *produit scalaire* des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , le nombre $(\vec{u} | \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$ où θ est l'angle géométrique (\vec{u}, \vec{v}) si les vecteurs sont non nuls, et $(\vec{u} | \vec{v}) = 0$ si l'un des vecteurs est nul.

On dispose des propriétés suivantes :

▷ Le produit scalaire est une forme bilinéaire (i.e. linéaire par rapport à chaque variable) :

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} | \vec{w}) = \alpha (\vec{u} | \vec{w}) + \beta (\vec{v} | \vec{w}),$$

$$(\vec{u} | \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha (\vec{u} | \vec{v}) + \beta (\vec{u} | \vec{w})$$

et symétrique :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2, (\vec{u} | \vec{v}) = (\vec{v} | \vec{u})$$

▷ Dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) , si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$, alors

$$(\vec{u} | \vec{v}) = xx' + yy' \quad \text{et} \quad (\vec{u} | \vec{u}) = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Attention cependant, la formule devient fausse si le repère n'est pas orthonormé.

▷ **Caractérisation de l'orthogonalité.**

Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs du plan. Alors \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u} | \vec{v}) = 0$.

📖 Définition (déterminant en dimension 2).

Dans le plan \mathbb{R}^2 rapporté à une base orthonormée de deux vecteurs (\vec{i}, \vec{j}) , pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on appelle *déterminant* des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ où θ est l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) si les vecteurs sont non nuls, et $(\vec{u} | \vec{v}) = 0$ si l'un des vecteurs est nul.

On dispose des propriétés suivantes :

▷ Le déterminant est une forme bilinéaire :

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \det(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}, \vec{w}) = \alpha \det(\vec{u}, \vec{w}) + \beta \det(\vec{v}, \vec{w}),$$

$$\det(\vec{u}, \alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \det(\vec{u}, \vec{v}) + \beta \det(\vec{u}, \vec{w})$$

et antisymétrique :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2, \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$$

▷ Dans une base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) , si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$, alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y = \underset{\text{notation}}{\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}$$

Attention cependant, la formule devient fausse si le repère n'est pas orthonormé.

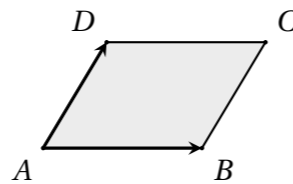
▷ **Caractérisation de la colinéarité.**

Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs du plan. Alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

▷ **Calculs d'aires.**

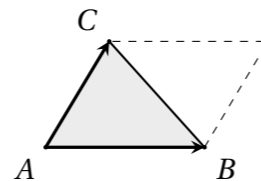
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Alors

$$\text{Aire}(ABCD) = |\det(\vec{AB}, \vec{AD})|$$



On en déduit l'aire d'un triangle ABC :

$$\text{Aire}(ABC) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})|$$



c) **Droites et cercles**

📖 Définition (équation cartésienne d'une droite).

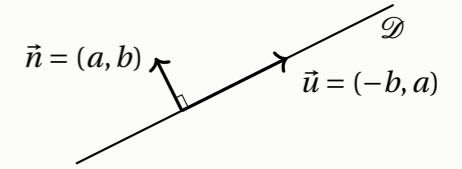
Dans le plan \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, toute droite \mathcal{D} admet une *équation cartésienne* de la forme :

$$ax + by + c = 0$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, a, b non tous deux nuls.

Le vecteur $\vec{u} = (-b, a)$ est un *vecteur directeur* de \mathcal{D} , le vecteur $\vec{n} = (a, b)$ est un *vecteur normal* à \mathcal{D} .

En particulier, pour tous A, B points distincts de \mathcal{D} , \vec{AB} et \vec{u} sont colinéaires, \vec{AB} et \vec{n} sont orthogonaux.

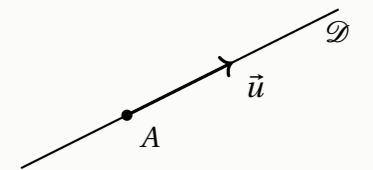


📖 Définition (représentation paramétrique d'une droite).

Dans le plan \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, une droite \mathcal{D} passant par un point $A = (x_A, y_A)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u} = (\alpha, \beta)$ a pour *équation paramétrique* :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Autrement dit : $\mathcal{D} = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$.



📖 Définition (équation cartésienne d'un cercle).

Dans le plan \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, tout cercle \mathcal{C} admet une *équation cartésienne* de la forme :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

où $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$ (si $r = 0$ le cercle est réduit à un point).

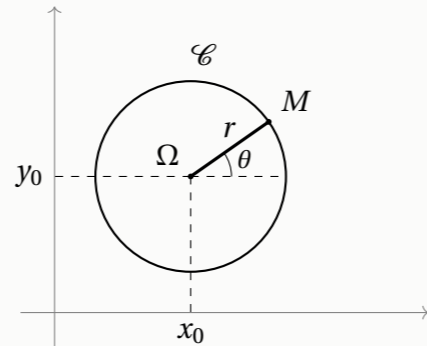
Le centre de \mathcal{C} est $\Omega = (x_0, y_0)$ et son rayon est r .

📖 Définition (représentation paramétrique d'un cercle).

Dans le plan \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, un cercle \mathcal{C} de centre $\Omega = (x_0, y_0)$ et rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$ a pour *équation paramétrique* :

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos(\theta) \\ y = y_0 + r \sin(\theta) \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}$$

Autrement dit : $\mathcal{C} = \{\Omega + r\vec{u}_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$, où \vec{u}_θ a été défini précédemment.



2. Géométrie élémentaire dans l'espace

a) Coordonnées, orientation

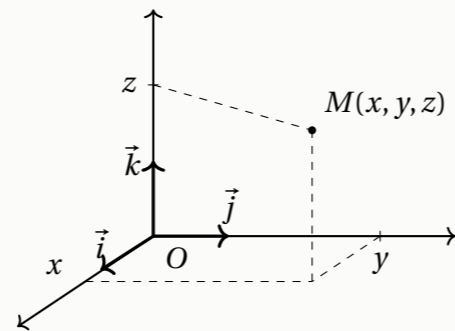
📖 Définition (coordonnées cartésiennes).

Dans l'espace \mathbb{R}^3 , on considère un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où O est un point de l'espace et les vecteurs \vec{i}, \vec{j} et \vec{k} sont non coplanaires.

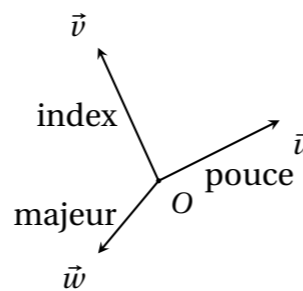
À tout point M de l'espace, on peut associer le triplet (x, y, z) de ses coordonnées dans le repère \mathcal{R} , qui correspond à l'unique décomposition :

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Le triplet (x, y, z) est appelé *triplet des coordonnées cartésiennes* du point M dans le repère \mathcal{R} .



Pour travailler avec des «repères orthonormés directs» ou des «bases orthonormées directes» dans l'espace \mathbb{R}^3 , il faut orienter l'espace. Pour cela, on décide *arbitrairement* qu'une famille de trois vecteurs non coplanaires $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe si l'on peut faire correspondre \vec{u} au pouce, \vec{v} à l'index et \vec{w} au majeur, de la main droite (c'est la «règle de la main droite»).



Une *base orthonormée directe* de l'espace \mathbb{R}^3 est un triplet de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de norme 1 tels que les angles orientés (\vec{i}, \vec{j}) , (\vec{j}, \vec{k}) et (\vec{k}, \vec{i}) sont égaux à $\frac{\pi}{2}$ modulo $[2\pi]$ (ainsi ils sont dans le sens direct que l'on vient de définir) ; et si O est un point de l'espace que l'on appelle *origine*, alors le quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un *repère orthonormé direct*.

On peut définir le système des coordonnées cylindriques et le système des coordonnées sphériques : vous le ferez en physique, ce n'est pas fait ici.

b) Opérations

📖 Définition (produit scalaire).

Dans l'espace \mathbb{R}^3 rapporté à une base orthonormée de trois vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on appelle :

- *norme du vecteur* $\vec{u} = (x, y, z)$, le nombre $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;
- *produit scalaire* des vecteurs \vec{u} et \vec{v} , le nombre $(\vec{u} \mid \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ où θ est l'angle géométrique (\vec{u}, \vec{v}) si les vecteurs sont non nuls, et $(\vec{u} \mid \vec{v}) = 0$ si l'un des vecteurs est nul.

On dispose des propriétés suivantes :

▷ Le produit scalaire est une forme bilinéaire (*i.e.* linéaire par rapport à chaque variable) :

$$\begin{aligned} \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad & (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \mid \vec{w}) = \alpha(\vec{u} \mid \vec{w}) + \beta(\vec{v} \mid \vec{w}), \\ & (\vec{u} \mid \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha(\vec{u} \mid \vec{v}) + \beta(\vec{u} \mid \vec{w}) \end{aligned}$$

et symétrique :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, (\vec{u} \mid \vec{v}) = (\vec{v} \mid \vec{u})$$

▷ Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$, alors

$$(\vec{u} \mid \vec{v}) = xx' + yy' + zz' \quad \text{et} \quad (\vec{u} \mid \vec{u}) = x^2 + y^2 + z^2 = \|\vec{u}\|^2$$

Attention cependant, la formule devient fautive si le repère n'est pas orthonormé.

▷ **Caractérisation de l'orthogonalité.**

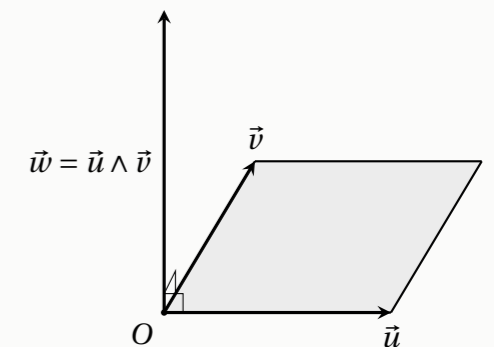
Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs de l'espace. Alors \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $(\vec{u} \mid \vec{v}) = 0$.

📖 Définition (produit vectoriel).

Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs de l'espace \mathbb{R}^3 . Le *produit vectoriel* des vecteurs \vec{u} et \vec{v} se note $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Sinon, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est l'unique vecteur \vec{w} de \mathbb{R}^3 qui vérifie :
 - ▷ (direction) \vec{w} est orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} (donc au plan qu'ils engendrent),
 - ▷ (sens) $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une famille directe,
 - ▷ (norme) $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| |\sin(\theta)|$ où θ est l'angle géométrique (\vec{u}, \vec{v}) .

En particulier $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = |\det(\vec{u}, \vec{v})|$, c'est aussi l'aire du parallélogramme formé sur les vecteurs \vec{u} et \vec{v} .



On dispose des propriétés suivantes :

▷ Le produit vectoriel est une forme bilinéaire :

$$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) \wedge \vec{w} = \alpha \vec{u} \wedge \vec{w} + \beta \vec{v} \wedge \vec{w},$$

$$\vec{u} \wedge (\alpha \vec{v} + \beta \vec{w}) = \alpha \vec{u} \wedge \vec{v} + \beta \vec{u} \wedge \vec{w}$$

et antisymétrique :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

▷ Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$, alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \right) = (yz' - y'z, zx' - z'x, xy' - x'y)$$

▷ **Caractérisation de la colinéarité.**

Soient \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs de l'espace. Alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$.

■ Définition (déterminant en dimension 3).

Dans l'espace \mathbb{R}^3 rapporté à une base orthonormée directe de trois vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, pour tous vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} , on appelle *déterminant* des vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} , le nombre $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v} | \vec{w})$.

Cette définition n'est pas à retenir, le déterminant sera introduit en toute généralité plus tard dans l'année.

On dispose des propriétés suivantes :

▷ Le déterminant est une forme trilinéaire (*i.e.* linéaire en chacune de ses 3 variables) et alternée (*i.e.* échanger deux vecteurs change le signe).

▷ Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, si $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (x', y', z')$ et $\vec{w} = (x'', y'', z'')$, alors

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \underset{\text{notation}}{=} \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x'' \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} + y'' \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} + z'' \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

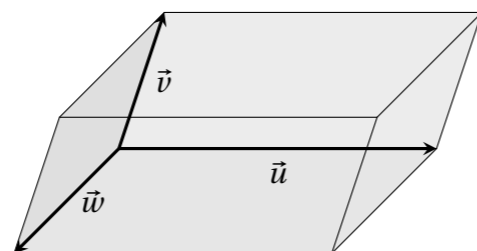
Formule qui n'est pas à retenir, mais que vous pourrez retrouver avec le cours sur les déterminants.

▷ **Caractérisation de la coplanarité.**

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 . Alors \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$.

▷ **Volume d'un parallélépipède.**

Le déterminant de trois vecteurs est égal en valeur absolue au volume du parallélépipède formé sur ces trois vecteurs.



c) **Plans, droites et sphères**

■ Définition (équation cartésienne d'un plan).

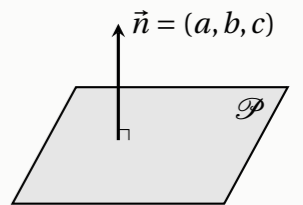
Dans l'espace \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, tout plan \mathcal{P} admet une *équation cartésienne* de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, a, b, c non tous trois nuls.

Le vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$ est un *vecteur normal* à \mathcal{P} .

En particulier, pour tous A, B points distincts de \mathcal{P} , \overrightarrow{AB} et \vec{n} sont orthogonaux.

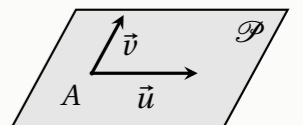


■ Définition (représentation paramétrique d'un plan).

Dans l'espace \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un plan \mathcal{P} passant par un point $A = (x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v} = (\alpha', \beta', \gamma')$ a pour *équation paramétrique* :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha + t'\alpha' \\ y = y_A + t\beta + t'\beta' \\ z = z_A + t\gamma + t'\gamma' \end{cases}, \quad t, t' \in \mathbb{R}$$

Autrement dit : $\mathcal{P} = \{A + t\vec{u} + t'\vec{v} \mid t, t' \in \mathbb{R}\}$.



📖 Définition (équation cartésienne d'une droite).

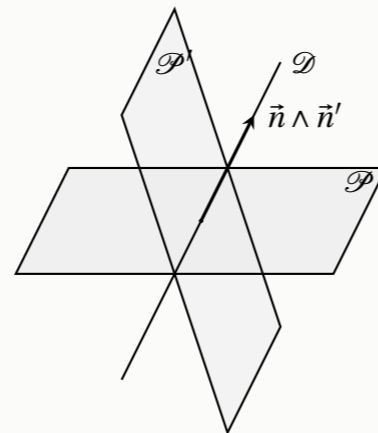
Dans l'espace \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, toute droite \mathcal{D} admet un système d'équations cartésiennes de la forme :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

où $\vec{n} = (a, b, c)$ et $\vec{n}' = (a', b', c')$ sont non colinéaires, et $d, d' \in \mathbb{R}$.

Ainsi :

- Le vecteur $\vec{u} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$ est un vecteur directeur de \mathcal{D} .
- La première ligne du système est l'équation d'un plan \mathcal{P} de vecteur normal \vec{n} , la deuxième celle d'un plan \mathcal{P}' de vecteur normal \vec{n}' , et \mathcal{D} est leur intersection.

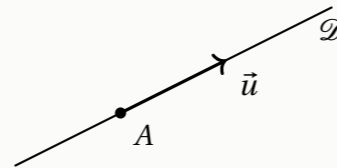


📖 Définition (représentation paramétrique d'une droite).

Dans l'espace \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une droite \mathcal{D} passant par un point $A = (x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u} = (\alpha, \beta, \gamma)$ a pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Autrement dit : $\mathcal{D} = \{A + t\vec{u} \mid t \in \mathbb{R}\}$.



📖 Définition (équation cartésienne d'une sphère).

Dans l'espace \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, toute sphère \mathcal{S} admet une équation cartésienne de la forme :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

où $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}_+$ (si $r = 0$ la sphère est réduite à un point). Le centre de \mathcal{S} est $\Omega = (x_0, y_0, z_0)$ et son rayon est r .

On peut obtenir une représentation paramétrique d'une sphère à l'aide des coordonnées sphériques.

II. Équations différentielles réelles

1. Premier ordre

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est une équation de la forme :

$$ay' + by = c$$

où a, b, c sont des fonctions définies sur un intervalle I et y une fonction dérivable sur I qui est l'inconnue. Une solution de cette équation est une fonction y dérivable sur I qui vérifie :

$$\forall t \in I, a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$$

Notons que le cas où a est la fonction nulle l'équation s'écrit simplement $by = c$, ce qui se résout immédiatement, et si b est la fonction nulle, alors l'équation s'écrit simplement $ay' = c$, ce qui relève du calcul direct d'une primitive.

On s'intéresse donc au cas où ni a ni b n'est la fonction nulle, et afin de normaliser l'équation, on suppose de plus que a ne s'annule pas sur I (quitte à faire des études sur plusieurs intervalles séparés). L'équation différentielle s'écrit alors : $y' + \frac{b}{a}y = \frac{c}{a}$.

Quitte à renommer les fonctions, on va donc s'intéresser aux équations différentielles linéaires d'ordre 1 normalisées, elles s'écrivent sous la forme

$$(E) \quad y' + ay = b$$

où a, b sont des fonctions définies sur un intervalle I et où y est une fonction inconnue dérivable sur I .

Méthode de résolution.

- La première étape consiste à résoudre l'équation homogène associée : $y' + ay = 0$.

Lorsque a est une fonction continue sur I , elle admet une primitive A sur l'intervalle I , et alors les solutions de l'équation homogène sont exactement les fonctions de la forme

$$\varphi_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-A(t)} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Ce résultat est admis. Ainsi résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus est un «simple» problème de primitivation.

- La deuxième étape consiste à trouver une solution particulière de l'équation (E), que l'on note y_0 . Plusieurs méthodes sont possibles :

- ▷ On trouve une solution «évidente» de l'équation : pour l'instant le principal moyen de procéder de façon autonome.
- ▷ S'agissant d'une équation où a est une constante et b est un second membre de la forme «polynôme fois une exponentielle» ou «polynôme fois une fonction trigonométrique», on cherche une solution particulière de «la même forme», ou bien «de la même forme fois $t \mapsto t$ » si le second membre est solution de l'équation homogène.

La recherche systématique d'une solution particulière dans ce cas n'est pas exigible pour l'instant, mais ce sera l'un des enjeux du chapitre sur les équations différentielles de début de sup.

- ▷ Dans le cas général, on utilise la méthode de «variation de la constante». Mais comme le point précédent, cette méthode ne sera développée que dans le chapitre dédié aux équations différentielles.

À ce stade les solutions de l'équation (E) sont exactement les fonctions de la forme :

$$y_\lambda : t \mapsto y_0(t) + \varphi_\lambda(t) = y_0(t) + \lambda e^{-A(t)} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

- Si l'énoncé propose de plus une condition initiale, sous la forme $y(t_0) = k$ où $t_0 \in I$ et k est une constante réelle, alors il existe une unique solution au *problème de Cauchy* :

$$\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = k \end{cases}$$

On la trouve en résolvant :

$$y(t_0) = k \iff y_0(t_0) + \lambda e^{-A(t_0)} = k \iff \lambda = (k - y_0(t_0))e^{A(t_0)}$$

(formule évidemment à ne pas apprendre!)

Exemple.

Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'(t) + ty(t) = t \\ y(0) = 2 \end{cases}$

- L'équation homogène associée est $(E_H) : y'(t) + ty(t) = 0$; une primitive de $t \mapsto t$ sur \mathbb{R} est $t \mapsto \frac{t^2}{2}$, si bien que l'ensemble des solutions de (E_H) est :

$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{-\frac{t^2}{2}} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- Une solution particulière est $y_0 : t \mapsto 1$. L'ensemble des solutions de $(E) : y'(t) + ty(t) = t$ est :

$$S = \left\{ t \mapsto 1 + \lambda e^{-\frac{t^2}{2}} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

- On résout enfin l'équation d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$y(0) = 2 \iff 1 + \lambda e^{-0^2/2} = 2 \iff 1 + \lambda = 2 \iff \lambda = 1$$

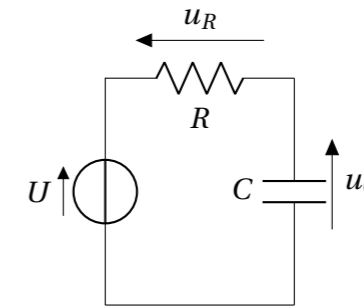
Ainsi l'unique solution de ce problème de Cauchy est : $t \mapsto 1 + e^{-\frac{t^2}{2}}$.

? Exercice 1.

1. Résoudre l'équation différentielle : $(E) y'(t) + 2y(t) = te^t$.
On pourra chercher une solution particulière de l'équation sous la forme $t \mapsto (at + b)e^t$ où $a, b \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre le problème de Cauchy : $\begin{cases} y'(t) + \frac{1}{t}y(t) = 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$
On pourra chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto at$ où $a \in \mathbb{R}$.

Un exemple issu de la physique.

On étudie la charge d'un condensateur dans le circuit suivant :



Les règles de la physique donnent les relations :

- ▷ $u_R = Ri$ (i est l'intensité) d'après la loi d'Ohm.
- ▷ $u_C = \frac{q}{C}$, où q est la quantité de charge, liée à i par la relation : $i = \frac{dq}{dt}$.
- ▷ $u_R + u_C = U$ d'après la loi de mailles.

On obtient alors l'équation différentielle :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U \iff \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{U}{R}$$

où q est la fonction inconnue. On note $\tau = RC$ (la constante de temps du circuit RC).

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme : $t \mapsto \lambda e^{-\frac{t}{\tau}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière de l'équation est $t \mapsto UC$ (correspond physiquement à l'équilibre : le condensateur est chargé).

Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

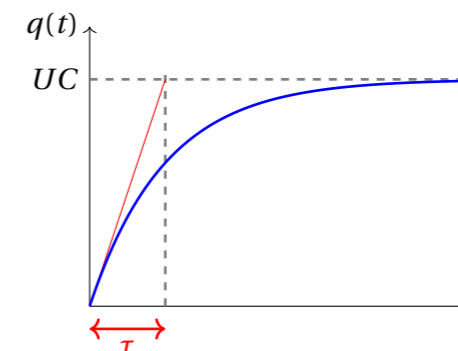
$$t \mapsto UC + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Enfin, considérant le condensateur non chargé au moment initial, c'est-à-dire $q(0) = 0$, on dispose d'un problème de Cauchy. On détermine λ en résolvant :

$$UC + \lambda e^{-\frac{0}{\tau}} = 0 \iff \lambda = -UC$$

Finalement : $q : t \mapsto UC(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$.

Courbe caractéristique de la charge d'un condensateur :



2. Second ordre

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = f$$

où a, b, c sont des réels, f une fonction définie sur un intervalle I et y une fonction deux fois dérivable sur I qui est l'inconnue. Une solution de cette équation est une fonction y deux fois dérivable sur I qui vérifie :

$$\forall t \in I, ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$$

Notons que seuls les cas où a et c ne sont pas nuls sont à traiter, les autres se ramènent à des équations d'ordre 1 pour y ou y' .

On associe à l'équation (E) $ay'' + by' + cy = f$, son équation homogène (E_H) $ay'' + by' + cy = 0$, et son équation caractéristique (E_c) $ar^2 + br + c = 0$ (c'est un trinôme du second degré en r , on sait résoudre!).

Méthode de résolution.

- La première étape consiste encore à résoudre l'équation homogène associée. Cela passe ici par la résolution de l'équation caractéristique, on distingue 3 cas :

- Si (E_c) admet deux solutions (réelles) distinctes r_1 et r_2 , alors les solutions de l'équation homogène sont exactement les fonctions de la forme

$$\varphi_{\lambda, \mu} : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si (E_c) admet une unique solution (réelle) r_0 , alors les solutions de l'équation homogène sont exactement les fonctions de la forme

$$\varphi_{\lambda, \mu} : t \mapsto (\lambda t + \mu) e^{r_0 t} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si (E_c) n'a pas de solution réelle, elle admet alors deux solutions complexes conjuguées qui s'écrivent sous la forme $\tau \pm i\omega$ où $\tau, \omega \in \mathbb{R}$, $\omega \neq 0$. Les solutions de l'équation homogène sont exactement les fonctions de la forme

$$\varphi_{\lambda, \mu} : t \mapsto (\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)) e^{\tau t} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Ce résultat est admis.

- La deuxième étape consiste à trouver une solution particulière de l'équation (E), que l'on note y_0 . Plusieurs méthodes sont possibles :

- On trouve une solution «évidente» de l'équation : pour l'instant le principal moyen de procéder de façon autonome.
- S'agissant d'une équation où f est un second membre de la forme «polynôme fois une exponentielle» ou «polynôme fois une fonction trigonométrique», on cherche une solution particulière de «la même forme», ou bien «de la même forme fois $t \mapsto t$ » si le second membre est solution de l'équation homogène.

La recherche systématique d'une solution particulière dans ce cas n'est pas exigible pour l'instant, mais ce sera l'un des enjeux du chapitre sur les équations différentielles de début de sup.

- Dans le cas général, on utilise la méthode de «variation des deux constantes». Mais celle-ci n'est qu'au programme de MP, donc elle ne sera pas vue cette année.

À ce stade les solutions de l'équation (E) sont exactement les fonctions de la forme :

$$y_{\lambda, \mu} : t \mapsto y_0(t) + \varphi_{\lambda, \mu}(t) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si l'énoncé propose de plus une condition initiale, sous la forme $(y(t_0), y'(t_0)) = (k_1, k_2)$ où $t_0 \in I$ et k_1 et k_2 sont des constantes réelles, alors il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f \\ (y(t_0), y'(t_0)) = (k_1, k_2) \end{cases}$$

On la trouve en résolvant le système :

$$(y(t_0), y'(t_0)) = (k_1, k_2) \iff \begin{cases} y_0(t_0) + \varphi_{\lambda, \mu}(t_0) = k_1 \\ y_0'(t_0) + \varphi'_{\lambda, \mu}(t_0) = k_2 \end{cases}$$

Exemple.

Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) - 4y(t) = t^2 \\ y(0) = \frac{1}{8} \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

- L'équation caractéristique est (E_c) $r^2 - 4 = 0$, de solutions $r = \pm 2$, si bien que l'ensemble des solutions de (E_H) est :

$$\mathcal{S}_H = \{t \mapsto \lambda e^{-2t} + \mu e^{2t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

- Une solution particulière se trouve en cherchant une solution sous la forme $y_0 : t \mapsto at^2 + bt + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$, puisque c'est la «forme» du second membre et que ce second membre n'est pas solution de l'équation homogène.

On calcule : $y_0' : t \mapsto 2at + b$ et $y_0'' : t \mapsto 2a$, si bien que :

$$y_0''(t) - 4y_0(t) = t^2 \iff -4at^2 - 4bt + 2a - 4c = t^2$$

Il suffit de résoudre le système :

$$\begin{cases} -4a = 1 \\ -4b = 0 \\ 2a - 4c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = 0 \\ c = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

Ainsi $y_0 : t \mapsto -\frac{t^2}{4} - \frac{1}{8}$ est solution particulière de (E).

L'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\left\{ t \mapsto -\frac{t^2}{4} - \frac{1}{8} + \lambda e^{-2t} + \mu e^{2t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

- On résout enfin le système donné par les conditions initiales en calculant :

$$y : t \mapsto -\frac{t^2}{4} - \frac{1}{8} + \lambda e^{-2t} + \mu e^{2t} \quad y' : t \mapsto -\frac{t}{2} - 2\lambda e^{-2t} + 2\mu e^{2t}$$

puis :

$$\begin{cases} y(0) = \frac{1}{8} \\ y'(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{8} + \lambda + \mu = \frac{1}{8} \\ -2\lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \iff \lambda = \frac{1}{8}, \mu = \frac{1}{8}$$

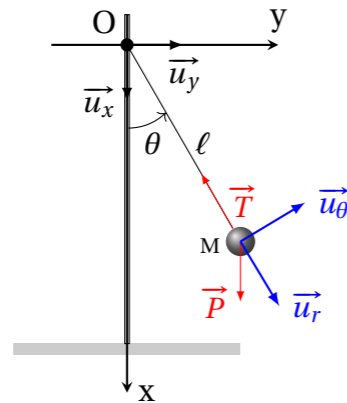
Ainsi l'unique solution de ce problème de Cauchy est : $t \mapsto -\frac{t^2}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} e^{-2t} + \frac{1}{8} e^{2t}$.

? Exercice 2.

Résoudre l'équation différentielle : $y''(t) + y'(t) + y(t) = \cos(t)$.
On pourra chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto a \cos(t) + b \sin(t)$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Un exemple issu de la physique.

On s'intéresse au mouvement du pendule simple pour de petites oscillations.



On écarte de sa position d'équilibre une masse ponctuelle m suspendue à un fil inextensible de longueur ℓ . On repère la position de la masse par l'angle θ entre la verticale et la direction du fil. Le théorème fondamental de la dynamique nous dit que :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{P},$$

avec \overrightarrow{P} le poids et \overrightarrow{T} la tension du fil. On projette cette relation selon $\overrightarrow{u_\theta}$ et on obtient l'équation : $m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin\theta$, soit :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0.$$

Cette équation différentielle n'est pas linéaire, mais dans l'approximation des petits angles, le physicien écrit : $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$ ou avec les notations mathématiques usuelles : $\theta'' + \omega^2 \theta = 0$, où $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \in \mathbb{R}_+$ la pulsation.

L'équation caractéristique a pour solutions les complexes conjugués $\pm i\omega$. Les solutions de l'équation différentielle sont donc exactement les fonctions :

$$t \mapsto \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t), \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

On a donc une trajectoire périodique de la masse.

3. Solution des exercices

Solution de 1.

1. Une primitive de $t \mapsto 2$ sur \mathbb{R} est $t \mapsto 2t$, si bien que les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{-2t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On écrit y sous la forme $y : t \mapsto (at + b)e^t$ où $a, b \in \mathbb{R}$. En particulier y est dérivable (par produit) sur \mathbb{R}

et $y' : t \mapsto (at + b + a)e^t$, si bien que :

$$y'(t) + 2y(t) = te^t \iff (at + a + b + 2at + 2b)e^t = te^t \iff (3at + a + 3b)e^t = te^t$$

Il suffit alors de résoudre le système :

$$\begin{cases} 3a = 1 \\ a + 3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1/3 \\ b = -1/9 \end{cases}$$

Ainsi une solution particulière de l'équation est $y_0 : t \mapsto (\frac{t}{3} - \frac{1}{9})e^t$.

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$\left\{ y_\lambda : t \mapsto \left(\frac{t}{3} - \frac{1}{9}\right)e^t + \lambda e^{-2t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur \mathbb{R}_+^* est $t \mapsto \ln(t)$ (attention, on cherche une primitive sur un **intervalle**, et \mathbb{R}^* où est défini $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est **pas** un intervalle; on choisit \mathbb{R}_+^* et non \mathbb{R}_-^* car il faut que l'intervalle contienne 1 à cause de la condition initiale). Ainsi les solutions de l'équation homogène sont de la forme $t \mapsto \lambda e^{-\ln(t)} = \frac{\lambda}{t}$.

$y_0 : t \mapsto \frac{t}{2}$ est une solution particulière de l'équation différentielle. Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $t \mapsto \frac{t}{2} + \frac{\lambda}{t}$.

Enfin, on, résout :

$$y(1) = 1 \iff \frac{1}{2} + \lambda = 1 \iff \lambda = \frac{1}{2}$$

La solution du problème de Cauchy est donc $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{t}{2} + \frac{1}{2t}$.

Solution de 2.

L'équation caractéristique associée est : $r^2 + r + 1 = 0$, et ses solutions sont complexes : $r = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme : $t \mapsto \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) e^{-\frac{t}{2}}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière sous la forme $y_0 : t \mapsto a \cos(t) + b \sin(t)$, où $a, b \in \mathbb{R}$. On calcule pour cela $y_0' : t \mapsto -a \sin(t) + b \cos(t)$ et $y_0'' : t \mapsto -a \cos(t) - b \sin(t)$. Ainsi :

$$y_0''(t) + y_0'(t) + y_0(t) = \cos(t) \iff -a \sin(t) + b \cos(t) = \cos(t)$$

$a = 0$ et $b = 1$ conviennent : $y_0 : t \mapsto \sin(t)$ est une solution particulière de l'équation.

Finalement les solutions de l'équation différentielle sont exactement les fonctions de la forme :

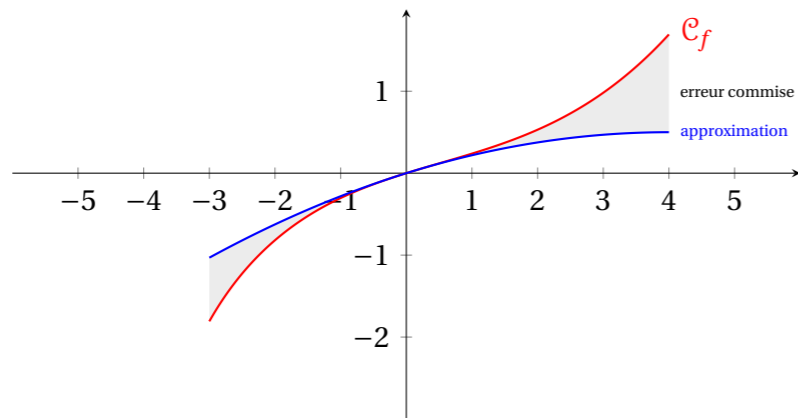
$$y_{\lambda, \mu} : t \mapsto \sin(t) + \left(\lambda \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \mu \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) e^{-\frac{t}{2}} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

III. Développements limités et équivalents

1. Développements limités

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et soit x_0 un point de I ou l'une de ses extrémités finies (donc x_0 ne peut pas être $\pm\infty$, mais x_0 peut être une extrémité ouverte de I donc un point où f n'est pas définie).

Le principe d'un développement limité de f en x_0 , c'est d'**approcher** f au voisinage de x_0 par une fonction polynomiale, **tout en mesurant l'erreur commise**.



Un *développement limité* de f à l'ordre n en x_0 est une égalité de la forme :

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

La notation « $\underset{x \rightarrow x_0}{=}$ » suivie d'une expression dont un terme s'écrit sous la forme « $o(g(x))$ » (g étant une fonction, généralement une puissance), signifie que l'égalité a lieu au voisinage de x_0 avec une erreur en «petit o de $g(x)$ ».

Avec les développements limités, le terme d'erreur sera toujours écrit sous la forme $o((x - x_0)^n)$ (souvent $x_0 = 0$, on peut s'y ramener par translation) : si $|x - x_0| < 1$, ce qui est vrai au voisinage de x_0 , plus n est grand, plus $(x - x_0)^n$ est petit, donc plus le développement limité est précis (au voisinage de x_0 !).

Si l'on s'éloigne de x_0 , l'erreur commise augmente significativement ($(x - x_0)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$) et «l'égalité» n'a plus aucun sens. Il faut retenir qu'un développement limité est une **approximation locale** de f au voisinage de x_0 .

Le physicien fera l'hypothèse simplificatrice, au voisinage de x_0 , que $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$ et ne s'encombrera pas du terme en o (tout au plus il écrira \approx au lieu de $=$, mais dans les deux cas le terme d'erreur, nécessaire en mathématiques, ne sera pas écrit).

C'est le parti pris dans l'exemple du pendule : on remplace $\sin(\theta)$ par θ car on dispose du développement limité au voisinage de 0 : $\sin(\theta) \underset{\theta \rightarrow 0}{=} \theta + o(\theta)$. Il faut bien être conscient par la suite si des termes en puissances de x apparaissent dans les calculs, il faut les négliger : pour tout $\alpha > 1$, $x^\alpha = o(x)$, ces termes sont plus grands que l'erreur commise, il faut les compter comme 0.

Il n'est pas question ici de donner les résultats théoriques permettant d'obtenir un développement limité à l'ordre n en x_0 d'une fonction «régulière», ni de présenter les techniques de calculs relatives aux développements limités : tout ceci fera l'objet d'un chapitre au second semestre.

Néanmoins voici quelques précisions mathématiques sur le sens de la notation « $o(g(x))$ » et quelques développements limités de référence à de petits ordres, que vous pourrez utiliser en physique ou SII.

📖 Définition.

Soient f, g deux fonctions définies au voisinage d'un réel x_0 . On dit que $f(x)$ est *négligeable* devant $g(x)$ au voisinage de x_0 si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0$.

On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x))$

De façon équivalente, si $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de x_0 , alors $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ où ε est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers x_0 : heuristiquement $f(x)$ est «beaucoup plus petit» que $g(x)$ au voisinage de x_0 .

📖 Théorème.

On dispose des développements limités usuels :

- $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
- $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $\frac{1}{1 + x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$
- $(1 + x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}x^2 + o(x^2)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est fixé.
- En conséquence : $\sqrt{1 + x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} + o(x)$
- $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
- $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

Enfin, on peut tronquer un DL, cela revient à renoncer à un peu de précision, c'est-à-dire à abaisser son ordre :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{donc} \quad e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{ou encore} \quad e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$$

En revanche on ne peut pas augmenter l'ordre d'un DL : toute perte d'information locale est définitive! C'est le même principe qu'en physique avec les erreurs commises.

📖 Exemple.

On utilise les DL en mathématiques pour calculer, souvent, des limites. Observons que d'après la définition, si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(1)$, alors $\frac{f(x)}{1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

La difficulté principale consiste à déterminer l'ordre pertinent pour un DL : à l'ordre 0 c'est une

limite non indéterminée, un DL est inutile ; à l'ordre 1 c'est une limite que l'on peut obtenir par taux d'accroissement, c'est plus efficace mais pas indispensable ; à partir de l'ordre 2 on «débloque» des calculs infaisables auparavant.

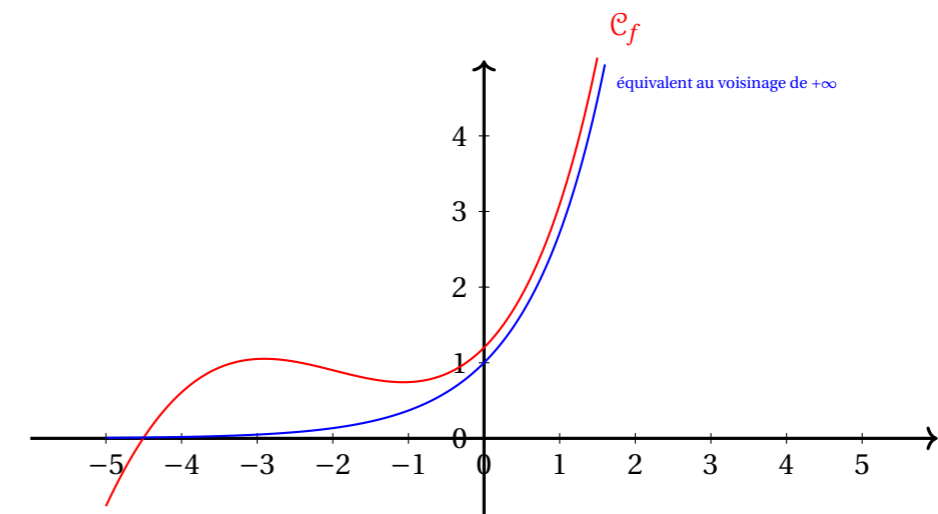
1. Pour déterminer la limite éventuelle de $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0, on peut utiliser un taux d'accroissement, mais avec un DL voilà comment faire plus efficace :

$$\frac{\sin(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x + o(x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x(1 + o(1))}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

(on peut factoriser les «o»).

2. Voici une limite plus délicate à calculer, car les taux d'accroissements ne permettent pas de faire le calcul :

$$\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} -\frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$



On formalise :

📖 Définition.

Soient f, g deux fonctions définies au voisinage de x_0 , où x_0 est un réel ou $\pm\infty$. On dit que $f(x)$ est *équivalent* à $g(x)$ au voisinage de x_0 si $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1$.

On note alors $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$.

De façon équivalente, si $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ au voisinage de x_0 , alors $f(x) = \eta(x)g(x)$ où η est une fonction qui tend vers 1 quand x tend vers x_0 : heuristiquement $f(x)$ est «à peu près égal» à $g(x)$ au voisinage de x_0 .

Notons que la définition est symétrique : si $f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x)$, alors $g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} f(x)$.

Observons aussi que :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\sim} g(x) &\iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1 \iff \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \iff \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0 \iff f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} o(g(x)) \\ &\iff f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} g(x) + o(g(x)) \end{aligned}$$

Ceci fournit un critère pratique : si l'on peut écrire $f(x)$ comme la somme de $g(x)$ et d'une fonction négligeable devant $g(x)$ au voisinage de x_0 , alors $f(x)$ est équivalente à $g(x)$ au voisinage de x_0 . Cela montre aussi qu'un équivalent pertinent n'est pas une somme de plusieurs termes, on ne garde que le terme «prépondérant».

⚠ Attention.

Manipuler des équivalents nécessite plus de précautions que manipuler les DL : en effet, l'erreur commise n'étant pas indiquée, on perd de vue celle-ci et certains calculs ont un résultat plus petit que cette erreur, ils sont donc faux même en physique. On retiendra :

- ▷ Il n'est pas pertinent d'avoir un équivalent à 0 (problème avec la définition).
- ▷ On ne somme pas des équivalents (problème avec l'erreur commise).

? Exercice 3.

$$\text{Soit } f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{matrix}$$

1. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en 0 de e^x , démontrer que f est continue en 0.

On rappelle qu'une fonction f est continue en un point x_0 si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$.

2. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 en 0 de e^x , démontrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

2. Équivalents

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et soit x_0 un point de I ou l'une de ses extrémités éventuellement infinie (donc x_0 peut être $\pm\infty$, ou un point où f n'est pas définie).

Le principe d'un équivalent de f en x_0 , c'est de dire que f «se comporte comme» l'équivalent au voisinage de x_0 (l'erreur commise étant négligeable devant l'équivalent).

▷ On ne compose pas les équivalents à gauche.

Avec les équivalents, les seules opérations possibles sont :

- ▷ Le produit.
- ▷ Le quotient.
- ▷ Les puissances.

Si l'on a besoin de faire d'autres opérations (typiquement celles citées précédemment comme étant interdites), on revient à des DL pour contrôler l'erreur commise.

Exemple.

- Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $f(x) = e^x - x - \ln(x)$.
Il s'agit de chercher le terme «le plus fort», de la même façon qu'on procède pour le calcul des limites. Ici c'est e^x , on peut écrire :

$$f(x) = e^x \underbrace{\left(1 - \frac{x}{e^x} - \frac{\ln(x)}{e^x}\right)}_{\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1-0-0} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$$

car on a écrit $f(x) = \eta(x)e^x$ où $\eta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Au passage les indéterminations des limites dans la parenthèse ont été levées par croissances comparées.

On peut aussi, et c'est plus souple donc préférable à terme, utiliser le critère pratique : $-x - \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^x)$ (par croissances comparées en vérifiant avec la limite du quotient), si bien que :

$$f(x) = e^x - x - \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} e^x + o(e^x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$$

- Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x)$.
La méthode précédente ne s'applique pas, il n'y a pas de «terme le plus fort» directement visible. Mais comme l'étude est en 0, on peut faire un DL.

$$f(x) = e^x - 1 - \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{=} x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^2$$

On retient la méthode : pour obtenir un équivalent en un point qui n'est pas $\pm\infty$, on effectue un DL, l'équivalent est le premier terme **non nul** du DL. Seul un calcul explicite comme le précédent sert de justification.

- Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\sqrt{\frac{x+1}{x^2-x+1}}$.
On a : $x+1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$, $x^2-x+1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$, donc par quotient $\frac{x+1}{x^2-x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$, puis par passage à la racine carrée (c'est la «puissance 1/2») : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}}$.

? Exercice 4.

- Pour tout $x > 0$, on note $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2 + x + \ln(x)}$.
 - Déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
 - Déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 0.
- Déterminer un équivalent de $\frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sqrt{1+x} - 1}$ au voisinage de 0.

3. Solutions des exercices

Solution de 3.

- On calcule :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + x + o(x) - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = f(0)$$

donc f est continue en 0.

- On calcule :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1}{x} - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Remarque : puisque f est dérivable en 0, alors elle est continue en 0, ce qui répond à la question 1 une nouvelle fois : on aurait pu répondre aux deux questions à la fois avec ce seul calcul.

Solution de 4.

- On traite le numérateur : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} e^x + o(e^x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$.
On traite le dénominateur : $x^2 + x + \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^2 + o(x^2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ par croissances comparées.
Par quotient : $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2}$.
 - On traite le numérateur : $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.
On traite le dénominateur : $x^2 + x + \ln(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \ln(x) + o(\ln(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$ par croissances comparées.
Par quotient : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}$.
- On traite le numérateur :

$$\sin(x) - x \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^3}{3}$$

car $x o(x^2) = o(x^3)$ et $o(x^3) + o(x^3) = o(x^3)$ car c'est le même ordre d'erreur (revenir à la définition si besoin pour s'en convaincre).

On traite le dénominateur :

$$\sqrt{1+x}-1 \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 1 + \frac{1}{2}x + o(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{1}{2}x + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

Par quotient : $\frac{\sin(x) - x \cos(x)}{\sqrt{1+x}-1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{6}}{\frac{x}{2}} = \frac{x^2}{3}$