Fonctions

1 Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 4x + 1}{3x^2 + 3}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 2x}{1 - x^2}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$.

2 Étudier les variations et le signe de la fonction définie par $f(x) = \frac{3x+2}{4-x}$.

3 On pose $f(x) = x \ln x - x$.

- Calculer la dérivée de f en précisant sur quel intervalle elle est définie.
- En déduire la valeur de $\int_1^2 \ln(t) dt$.

Suites et récurrences

4 On pose $f : \begin{cases} [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{e^x} \end{cases}$ et on définit, pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{n}{e^n}$.

- Calculer le signe de f' sur $[1, +\infty[$.
- En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

- Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
- Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{2}{2n+1}$.

6 Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.

Trigonométrie

7 On pose $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \end{cases}$

- Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
- Calculer f' et en déduire les variations de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.
- Tracer la courbe de f sur $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$, puis sur $[-3\pi, 3\pi]$.

8 On rappelle la formule de trigonométrie : $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$.

- Calculer $2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$.
- En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Complexes

Pour ceux qui n'ont pas fait maths expertes, nous reprendrons toutes ces notions : ne cherchez pas ces exercices.

9 Calculer la partie réelle et imaginaire de $z_1 = \frac{1-i}{i-2}$ et $z_2 = \left(3 - \frac{i}{2}\right) \left(-\frac{1}{3} - \frac{i}{3}\right)$.

10 Calculer le module et un argument de $\omega_1 = (1 - \sqrt{3}i)^{10}$ et $\omega_2 = 1 + e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

11 Le complexe $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

- On définit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Calculer j^2 et j^3 .
- Représenter dans le plan complexe 1, j et j^2 . Que remarquez-vous ?
- Calculer $1 + j + j^2$.
- Représenter les points M dont l'affixe z vérifie $|z - j| = 1$.