À LA RECHERCHE DE BATAILLES INFINIES

Le jeu de la bataille française recèle des subtilités insoupçonnées. En particulier, la question de l'existence ou non de parties infinies en fonction de la stratégie des joueurs se révèle étonnamment difficile.

LES AUTEURS

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

PHILIPPE MATHIEU
directeur de l'équipe Smac (Systèmes-multi-agents et comportements) du laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Certains problèmes mathématiques sont considérés comme importants, car on pense que leur résolution nécessitera l'introduction d'idées nouvelles qui auront des conséquences fructueuses. Les célèbres vingt-trois problèmes énoncés par David Hilbert en 1900 sont bien évidemment dans cette catégorie, de même que les sept «problèmes du millénaire» listés en l'an 2000 par l'institut Clay de mathématiques – lesquels sont associés, chacun, à une récompense de un million de dollars. À l'inverse, on estime que la résolution de certaines questions, même difficiles, ne devrait pas avoir de conséquences majeures pour le reste des mathématiques. John Conway a donné un nom à ces problèmes: il les nomme «problèmes anti-Hilbert», en référence à la liste de 1900.

Le premier exemple donné par John Conway de ce type de problème concerne les cycles du jeu de cartes nommé *beggar my neighbour* («dépouiller mon voisin»), une variante anglaise du jeu de la bataille que tout le monde, en France, a pratiqué enfant (*voir l'encadré 1*). La question posée est: existe-t-il une distribution des cartes conduisant à une situation cyclique à la bataille anglaise, et donc à une partie se prolongeant indéfiniment? En dépit de l'apparente simplicité du problème, il a fallu attendre 2024 pour que le chercheur américain indépendant Brayden Casella, qui travaillait sur cette question depuis de nombreuses années, y apporte une réponse: oui, une telle distribution existe. Or la démonstration a nécessité de nombreuses idées pas si évidentes! Considérer qu'il s'agissait d'un problème anti-Hilbert n'était-il donc pas un jugement trop hâtif?

Dans cet article, nous défendons cette idée en étudiant le cas voisin de la bataille française. Nous montrons que la réponse à des questions en apparence très simples sur ce jeu se révèle plus compliquée qu'il n'y paraît, et énonçons quelques conjectures, à ce jour encore ouvertes.

LA BATAILLE FRANÇAISE

Il existe plusieurs variantes de la bataille française et nous nous concentrerons sur les plus simples. Un jeu de 32 cartes, ou parfois 52, est distribué également entre deux joueurs. Pour un jeu de 52 cartes, les forces des cartes par ordre croissant sont: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valet, Dame, Roi, As. On ne prend pas en compte leur couleur (cœur, carreau, pique ou trèfle). Dans le cas le plus général, auquel se ramène facilement le jeu avec 32 ou 52 cartes, nous envisagerons C couleurs et V valeurs de cartes qui, pour nous, seront simplement: 1, 2, ..., V. Nous décrirons soigneusement ce qui se passe dans le cas $C=1$ (une seule couleur de cartes), dans le cas du jeu usuel de 32 cartes ($C=4$, $V=8$) et celui du jeu usuel de 52 cartes ($C=4$, $V=13$). Nous verrons que, lorsque toutes les cartes ont des valeurs différentes ($C=1$), on obtient d'intéressants résultats mathématiques et une belle conjecture en attente de résolution.

Chacun des deux joueurs tient en main son paquet de cartes, face vers le bas – donc sans les voir. Tour à tour, chacun joue la carte

LE CYCLE INESPÉRÉ DE LA BATAILLE ANGLAISE

1

Le jeu *beggar my neighbour* est une variante anglaise de notre bataille. Comme dans la version française, un jeu de 52 cartes standard est séparé en deux paquets égaux, chacun attribué à un joueur. Les paquets sont placés sur la table, faces cachées. Le premier joueur joue la carte située sur le dessus de son paquet, face visible, pour commencer une pile centrale. À son tour, l'adversaire pose dessus la carte du dessus de son paquet, également face visible. On poursuit en alternant les joueurs jusqu'à ce que l'un des deux retourne une carte dite « pénalisante » : Valet, Dame, Roi ou As. Quand un des joueurs pose une telle carte, son adversaire doit payer une pénalité : une carte pour le Valet, deux pour une Dame, trois pour un Roi, quatre pour un As. Le joueur pénalisé retourne une à une le nombre de cartes adéquat sur la pile centrale, toujours en les prenant sur le dessus de son paquet. S'il découvre, lors du paiement, une nouvelle carte pénalisante, son paiement cesse et l'autre joueur doit payer la pénalité correspondant à la nouvelle carte pénalisante. Ce changement de joueur pénalisé peut se produire plusieurs fois. Si aucune des nouvelles cartes posées n'est une carte pénalisante, le joueur qui a posé la carte pénalisante remporte la main : il prend toutes les cartes de la pile et les range sous son paquet, sans en changer l'ordre. Le jeu se poursuit avec une nouvelle manche, avec la convention que le gagnant de la dernière manche pose la première carte d'une nouvelle série. Lorsqu'un joueur n'a plus de cartes, il a perdu.

Ce jeu très populaire, dont on notera qu'il est parfaitement déterministe, posait depuis plus de trente ans le problème suivant : une partie peut-elle durer infiniment ? Ce n'est qu'en 2024 que le chercheur indépendant Brayden Casella, qui réside aux États-Unis, apporte avec sept coauteurs une réponse positive à la question, fruit de nombreuses années de travail. Ce résultat n'est pas uniquement dû à des calculs massifs : il a aussi exigé la mise au point de toutes sortes de raccourcis, et de nombreuses astuces combinatoires et arithmétiques. En ce sens, le travail effectué présente un réel intérêt mathématique, à l'inverse de ce que pressentait John Conway pour qui la question des cycles à la bataille anglaise était le prototype de problème « anti-Hilbert ».

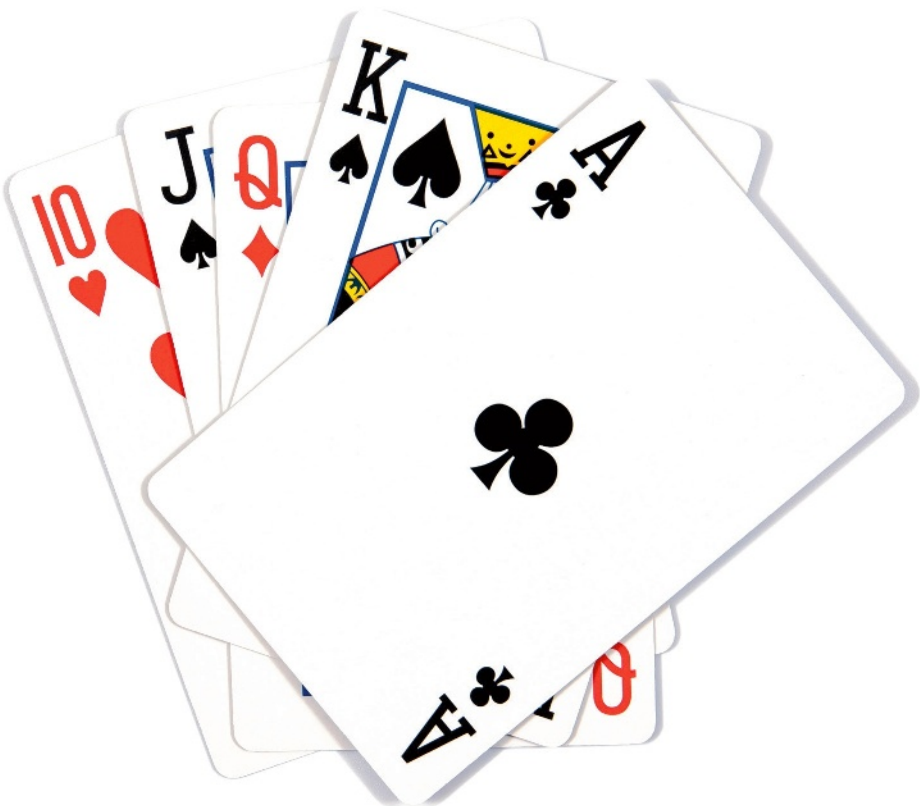
La partie cyclique trouvée par Brayden Casella et ses collaborateurs, et que nous avons vérifiée, est celle dans laquelle le paquet initial du premier joueur est [0, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 2, 0, 3, 2, 4, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 4, 4, 1, 0, 0, 1, 0, 0] et celui du second joueur [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 3, 2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 4]. Ici, on note les cartes pénalisantes 1, 2, 3 et 4 selon la pénalité associée, et les 36 autres cartes sont notées 0.

du dessus de son paquet en la retournant pour la rendre visible et en la posant sur la table. Le gagnant est celui dont la carte jouée est la plus forte ; il récupère sa carte et celle de son adversaire, et les range sous son paquet. En cas d'égalité des cartes retournées, il y a « bataille » : chaque joueur dévoile une nouvelle carte, toujours prise au-dessus de son paquet. Si les nouvelles cartes sont de forces différentes, la plus forte désigne le gagnant, qui récupère alors toutes les cartes sur la table et les range sous son paquet. En cas de nouvelle égalité, les joueurs dévoilent chacun une troisième carte, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'un des deux remporte la manche. Le perdant du jeu est le premier à ne plus avoir de cartes. Si les deux joueurs épuisent leur paquet au même moment, c'est alors une partie nulle. Ce cas est extrêmement rare, mais pas impossible : il intervient lorsque la distribution des cartes provoque, à un moment dans le jeu, une série de batailles consécutives épuisant toutes les cartes sans qu'aucun des deux joueurs n'emporte la manche.

MÉTHODES DE RANGEMENT

Chaque joueur peut choisir la façon dont il range ses cartes sous son paquet, lorsqu'il remporte une manche. Il existe trois stratégies principales.

Le « rangement naturel » a été étudié en 1995 dans un article de cette rubrique. Le gagnant place en premier sous son paquet, la carte qui l'a fait gagner, puis celle prise à son

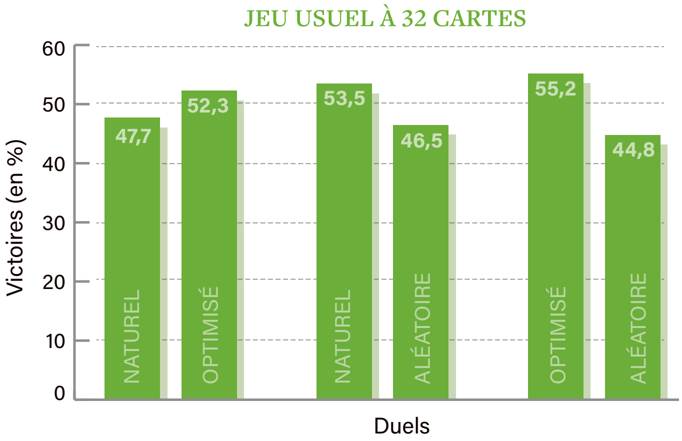


adversaire, puis le cas échéant les deux cartes de la dernière bataille de la manche, les deux cartes de la bataille précédente, etc. Cette façon de procéder semble naturelle, car le gagnant souhaite que sa carte victorieuse revienne rapidement: il la replace donc en premier sous son paquet.

Par exemple, si le paquet du premier joueur est constitué des cartes [3, 2, 1, 1, 2, 1], où le sommet du paquet est à gauche, et que le second joueur a pour paquet [3, 2, 1, 2, 3, 3], la première manche consiste en une bataille (carte de valeur 3 contre carte de valeur 3), puis une deuxième bataille (carte de valeur 2 contre carte de valeur 2), puis une troisième (carte de valeur 1 contre carte de valeur 1), et enfin une carte de valeur 1 contre une carte de valeur 2, qui fait gagner la manche au second joueur. Si ce dernier range ses cartes avec la méthode du rangement naturel, les nouveaux jeux sont alors respectivement [2, 1] pour le premier joueur et [3, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3] pour le second.

Pour une partie utilisant un jeu de 8 cartes ($C = 4$, $V = 2$) et où les joueurs utilisent la méthode naturelle de rangement des cartes gagnées, les lecteurs pourront vérifier que la distribution initiale dans laquelle le premier joueur a pour paquet [1, 1, 1, 2] et le second joueur [2, 2, 1, 2] conduit rapidement à une victoire de ce dernier. On peut aussi vérifier que dans le cas où les paquets initiaux sont respectivement [1, 1, 2, 2] et [2, 2, 1, 1], la partie est nulle.

Une deuxième méthode simple de rangement des cartes est le «rangement optimisé». L'idée est d'exploiter le mieux possible la liberté dont dispose un joueur pour ranger les cartes gagnées. Il les classe donc de la plus forte à la moins forte, et les place dans cet ordre sous son



2 MÉTHODES DE RANGEMENT ET DURÉES DES PARTIES

Quand on s'intéresse à l'existence ou non de parties infinies en fonction de la méthode de rangement des cartes adoptée communément par les deux joueurs, il peut être intéressant de regarder quelles situations produisent les parties finies les plus longues. Les quatre records principaux, calculés par Philippe Mathieu, sont indiqués dans le premier tableau ci-contre. Nous invitons les lecteurs à tenter de battre ces records et d'autres présentés sur la page web https://github.com/cristal-smac/bataille. Au-delà de ces records, nous avons cherché à étudier la durée moyenne des parties en fonction de la méthode de rangement adoptée par les joueurs. Pour cela, nous avons programmé ces différentes stratégies et simulé un grand nombre de parties dans lesquelles les deux joueurs utilisent la même méthode de rangement. Les deux autres tableaux ci-contre indiquent le nombre moyen de cartes posées par un joueur au cours d'une telle partie, dans différentes situations. Ils ont été obtenus en programmant 100 000 parties pour chaque cas. On note que, dans le cas où il n'y a qu'une seule couleur (*C* = 1), il ne peut pas y avoir de bataille lors d'une manche, par conséquent le rangement optimisé et le rangement naturel sont équivalents. On constate qu'en moyenne, le rangement optimisé semble produire des parties plus courtes, devant le rangement naturel puis le rangement aléatoire.

RECORDS DE DURÉES

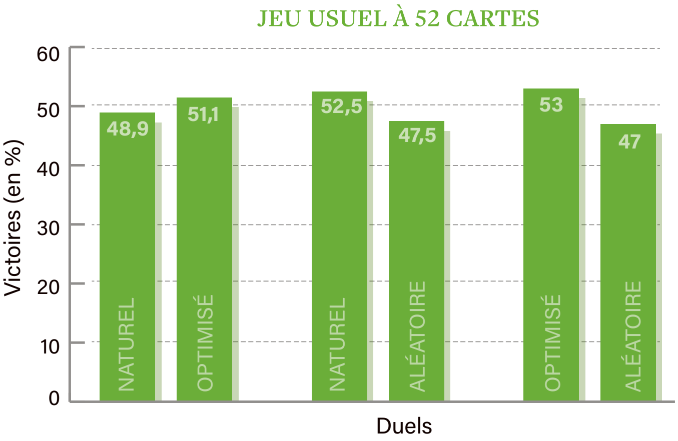
	Rangement naturel	Rangement optimisé
Jeu usuel de 32 cartes ($C = 4$, $V = 8$)	Partie de 1 999 plis	Partie de 1 645 plis
Jeu usuel de 52 cartes ($C = 4$, $V = 13$)	Partie de 5 506 plis	Partie de 4 060 plis

DURÉES MOYENNES DANS LE CAS $C=1$

V	2	4	10	32	52
Rangement naturel ou optimisé	1,0	3,33	14,47	129,93	338,12
Rangement aléatoire	1,0	3,52	24,83	256,22	674,90

DURÉES MOYENNES DANS LE CAS $C=4$

V	2	3	4	5	8	10	13
Rangement optimisé	5,37	12,10	24,04	41,66	118,22	189,70	328,03
Rangement naturel	5,37	13,43	28,53	48,44	131,87	207,37	349,44
Rangement aléatoire	6,20	18,65	41,32	72,77	216,79	352,92	620.73



Statistiques de victoire pour les différentes méthodes de rangement des cartes à la bataille française, pour les jeux usuels à 32 cartes ($C=4$, $V=8$) et 52 cartes ($C=4$, $V=13$). Les chiffres sont obtenus en opposant deux à deux les stratégies, en simulant 100 000 parties pour chaque duel, et en comptant la proportion de victoires de chacune des stratégies. Les observations statistiques sont valables à plus ou moins 0,3 point.

paquet. Les meilleures cartes reviendront ainsi le plus rapidement possible, ce dont le joueur peut espérer tirer bénéfice. Ainsi, si le premier joueur a pour paquet initial [3, 2, 1, 1, 2, 1] et le second [3, 2, 1, 2, 3, 3], à l'issue de la première manche (gagnée par ce dernier), si le second joueur applique la méthode du rangement optimisé, les paquets deviennent respectivement [2, 1] et [3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1].

Une troisième méthode intuitive est celle du «rangement aléatoire»: le gagnant d'une manche prend les cartes qu'il vient de remporter, les mélange parfaitement, et les replace sous son paquet.

Les histogrammes ci-dessus fournissent un comparatif de l'efficacité, en termes de probabilité de victoire, de ces trois méthodes de rangement pour les jeux usuels à 32 et 52 cartes.

PARTIES INFINIES

La question la plus intrigante et donnant lieu aux recherches les plus intéressantes est celle de l'existence de parties infinies, c'est-à-dire de parties tombant dans une boucle ramenant périodiquement et indéfiniment aux mêmes situations. C'est à cette question, posée pour la bataille anglaise, que répond l'article publié en 2024 par Brayden Casella et ses sept collaborateurs. Nous allons, quant à nous, présenter des éléments de réponse pour la bataille française.

Le cas de la méthode du rangement aléatoire est vite résolu: lorsque le hasard fait bien les choses, il est possible d'avoir des cycles (*voir l'encadré 3*). Pour les deux autres méthodes, plusieurs résultats ont été établis dans le cas où $C=1$ (une seule couleur dans le paquet de cartes) et dans les cas des jeux usuels avec 4 couleurs ($C=4$, $V=8$ ou 13).

Commençons par le cas $C=1$ avec V cartes – qui sont donc toutes de valeurs différentes. Pour un tel jeu de cartes, la méthode de rangement naturel est équivalente à la méthode de rangement optimisé puisqu'il n'existe pas deux cartes de même valeur dans le jeu; chaque pli est donc résolu dès les deux premières cartes posées, ce qui entraîne le même rangement pour les deux méthodes. Le principal résultat pour ce cas a été obtenu en 2010 par Michael Spivey, alors chercheur au département de mathématiques et d'informatique de l'université de Puget Sound à Tacoma, aux États-Unis. Il indique qu'il existe des cycles pour tous les entiers V qui ne sont ni de la forme 2^k avec $k\geq1$ ni de la forme 3×2^k avec $k\geq0$. Notons que pour les entiers positifs, cela est équivalent à la condition que V soit de la forme $m\times2^k$, avec $k\geq0$ et m impair strictement supérieur à 3.

On donne ci-dessous quelques exemples de distributions conduisant à des cycles:

– Pour $V=5$, si le premier joueur a en mains le paquet [5, 3] et le second [2, 4, 1], la partie boucle en six plis: [5, 3] / [2, 4, 1] → [3, 5, 2] / [4, 1] → [5, 2] / [1, 4, 3] → [2, 5, 1] / [4, 3] → [5, 1] / [3, 4, 2] → [1, 5, 3] / [4, 2] → [5, 3] / [2, 4, 1].

– Pour $V=7$, si le premier joueur a en mains le paquet [1, 7, 4] et le second [5, 3, 6, 2], la partie boucle en huit plis.

– Pour $V=9$, si le premier joueur a en mains le paquet [9, 5, 8, 4] et le second [3, 7, 2, 6, 1], la partie boucle en vingt plis.

– Pour $V=10$, si le premier joueur a en mains le paquet [8, 6, 3, 10, 5] et le second [2, 9, 7, 4, 1], la partie boucle en soixante plis.

Une méthode générale pour construire des parties cycliques, qui fonctionne pour tous les entiers V impairs supérieurs ou égaux à 5,

3

DES PARTIES INFINIES AVEC LE RANGEMENT ALÉATOIRE

À la bataille française, il est assez facile d'imaginer des distributions initiales des cartes qui, combinées à des méthodes de rangement bien spécifiques, produisent des parties infinies. Par conséquent, le rangement aléatoire peut bel et bien mener à des parties aussi longues qu'on le veut : il est tout à fait possible qu'avec les bonnes distributions initiales, le hasard produise une méthode de rangement générant une telle partie cyclique. Donnons un exemple pour $C = 1$ et $V = 4$. On part de la distribution dans laquelle le premier joueur a pour paquet initial [4, 1] et le second [2, 3], et on imagine que le rangement aléatoire des cartes gagnées produit la séquence suivante : [4, 1] / [2, 3] → [1, 4, 2] / [3] → [4, 2] / [1, 3] → [2, 4, 1] / [3] → [4, 1] / [2, 3].

Le premier joueur a utilisé (par hasard) la méthode du rangement naturel, mais pas le second, qui a rangé ses cartes en plaçant (au hasard) la meilleure derrière la moins bonne. De la sorte, en quatre plis, les joueurs retrouvent la situation de départ. Il est possible que le hasard reproduise indéfiniment les mêmes stratégies de rangement, ce qui conduira à répéter éternellement ce cycle, produisant ainsi une partie infinie.

En 2012, Evgeny Lakshtanov a proposé un autre exemple avec le jeu usuel de 52 cartes : une partie dans laquelle le premier joueur a pour paquet initial [13, 12, 13, 12, 11, 10, 11, 10, 9, 8, 9, 8, 7, 6, 7, 6, 5, 4, 5, 4, 3, 2, 3, 1, 2, 1], le second joueur [12, 13, 12, 13, 10, 11, 10, 11, 8, 9, 8, 9, 6, 7, 6, 7, 4, 5, 4, 5, 2, 3, 1, 3, 1, 2], et le hasard fait que la carte du joueur 1 est toujours rangée avant celle du joueur 2 quand un joueur prend ses cartes. On vérifie que cela conduit bien à un cycle.

4

LA MÉTHODE DES CYCLES ALIGNÉS

En 1995, nous avions consacré un article de la rubrique « Logique et calcul » à l'étude de la bataille française lorsque les deux joueurs utilisent le rangement naturel. Pour réaliser cette étude, nous avions introduit la méthode des « cycles alignés », que nous détaillons de nouveau ici.

On présente ci-dessous les premiers plis d'une bataille avec un jeu de 16 cartes (C = 4, V = 4), dans laquelle le premier joueur a pour paquet initial [2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3], le second [4, 2, 4, 1, 3, 2, 3, 1], et où tous deux utilisent le rangement naturel.

[2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3] / [4, 2, 4, 1, 3, 2, 3, 1] →
[1, 4, 4, 2, 1, 3, 3] / [2, 4, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 2] →
[4, 4, 2, 1, 3, 3] / [4, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 2, 2, 1] →
[2, 1, 3, 3, 4, 1, 4, 4] / [3, 2, 3, 1, 4, 2, 2, 1] →
[1, 3, 3, 4, 1, 4, 4] / [2, 3, 1, 4, 2, 2, 1, 3, 2] →
[3, 3, 4, 1, 4, 4] / [3, 1, 4, 2, 2, 1, 3, 2, 2, 1] →
[4, 1, 4, 4, 3, 1, 3, 3] / [4, 2, 2, 1, 3, 2, 2, 1] →
[4, 4, 3, 1, 3, 3] / [2, 1, 3, 2, 2, 1, 2, 1, 4, 4] →
[4, 3, 1, 3, 3, 4, 2] / [1, 3, 2, 2, 1, 2, 1, 4, 4] →
[3, 1, 3, 3, 4, 2, 4, 1] / [3, 2, 2, 1, 2, 1, 4, 4] →
[3, 3, 4, 2, 4, 1] / [2, 1, 2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3] →
[3, 4, 2, 4, 1, 3, 2] / [1, 2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3] →
[4, 2, 4, 1, 3, 2, 3, 1] / [2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3] →
...

On constate qu'en douze plis, les deux joueurs ont complètement échangé leurs jeux. Ainsi, en vingt-quatre plis, la partie boucle en revenant au point de départ.

Ce cycle possède une propriété remarquable : quand chacune des cartes des deux paquets initiaux a été jouée une fois – *i.e.* à l'issue du sixième pli, indiqué en bleu ci-contre – les paquets de cartes des deux joueurs se retrouvent de la même longueur. Six étapes plus tard, c'est à nouveau le cas, etc. On appelle cela la propriété de « bon alignement ».

Cette propriété permet de créer de nouveaux cycles en construisant des paquets initiaux constitués de k fois la même distribution, les cartes étant accolées les unes à la suite des autres. Par exemple, avec k = 2, on obtient les paquets de départ [2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3, 2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3] et [4, 2, 4, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 2, 4, 1, 3, 2, 3,1]. Cela produit un cycle de k fois la longueur du cycle initial. Lorsqu'un cycle n'est pas aligné, cette méthode de concaténation des paquets initiaux ne produit pas de nouveau cycle.

La distribution obtenue avec k = 2 n'est pas très intéressante, car elle concerne le cas C = 8 et V = 4. En revanche, on peut augmenter chaque valeur des deuxièmes moitiés des paquets initiaux de 4 unités, ce qui fournit un cycle de longueur 48 pour le jeu usuel de 32 cartes (C = 4, V = 8). Les paquets initiaux sont alors respectivement [2, 1, 4, 4, 2, 1, 3, 3, 6, 5, 8, 8, 6, 5, 7, 7] et [4, 2, 4, 1, 3, 2, 3, 1, 8, 6, 8, 5, 7, 6, 7, 5].

Il se trouve que l'on connaît aussi un cycle aligné pour le cas C = 4, et V = 6. Il correspond aux paquets initiaux [2, 1, 5, 5, 6, 2, 6, 6, 4, 1, 4, 4] et [5, 3, 5, 1, 6, 3, 3, 2, 4, 2, 3, 1].

On dispose donc de deux cycles alignés : l'un pour le cas C = 4 et V = 4 et l'autre pour le cas C = 4 et V = 6. En dupliquant, accolant et modifiant de la bonne manière les paquets initiaux correspondants, on obtient de nouveaux paquets initiaux produisant des cycles alignés pour tous les cas où C = 4 et V est de la forme $4a + 6b$, avec a et b des entiers positifs non simultanément nuls. Par conséquent, on a des cycles alignés pour tous les cas où C = 4 et V est pair et supérieur ou égal à 4. En revanche, cela ne recouvre pas le cas du paquet usuel de 52 cartes où C = 4 et V = 13. Remarquons que si l'on trouvait un cycle aligné pour le jeu C = 4 et V = 5, cela permettrait de conclure, en combinant adéquatement les paquets initiaux ! Malheureusement, en dépit de nombreux calculs (nous avons essayé plusieurs milliards de parties), le problème reste aujourd'hui ouvert.

consiste à prendre des paquets initiaux de la forme [A, B, A, B, ..., A, B] (n fois [A, B]) pour le premier joueur et de la forme [B, A, B, A, ..., B, A, B] (n fois [B, A], suivi de B, ou n+1 fois [B, A] suivi de B) pour le second. En considérant que toute valeur A est supérieure à toute valeur B, on observe qu'un tel début conduit bien à un cycle en termes de A et de B. L'exemple suivant le fait aisément comprendre: [A, B, A, B] / [B, A, B, A, B] → [B, A, B, A, B] / [A, B, A, B] → [A, B, A, B] / [B, A, B, A, B], la partie boucle en deux plis.

Attention cependant: en remplaçant les A et les B par des nombres entiers entre 1 et V, en prenant soin de ne pas prendre deux fois le même et en respectant la règle «tout nombre utilisé à la place d'un A est supérieur à tout nombre utilisé à la place d'un B», on obtiendra bien une configuration produisant un cycle en termes de A et de B, mais on ne retombera pas nécessairement sur la configuration initiale en termes de valeurs numériques au bout d'une période de ce cycle. En effet, au bout d'une seule période du cycle en termes de A et de B, les nombres remplaçant les A seront peut-être dans un ordre différent de celui de départ (et de même pour les nombres remplaçant les B). Cependant, il n'existe qu'un nombre fini de façons de classer les nombres utilisés pour remplacer les A et les B: cela garantit qu'au bout d'un certain nombre de périodes du cycle en termes de A et de B, on retombera bel et bien sur une configuration déjà rencontrée pour les valeurs numériques.

GÉNÉRALISATION

Considérons un exemple où V=9, où les paquets initiaux sont de la forme [A, B, A, B] pour le premier joueur et [B, A, B, A, B] pour le second, et où l'on prend les entiers 9, 8, 7, 6 pour remplacer les A et les entiers 5, 4, 3, 2, 1 pour remplacer les B. Il y a plusieurs façons de procéder au remplacement des A et des B par ces valeurs numériques – précisément, il y a $5!\times 4!=2880$ manières de le faire, et toutes fonctionnent. L'une d'entre elles consiste à prendre pour paquets initiaux [9, 1, 6, 2] pour le premier joueur et [5, 8, 4, 7, 3] pour le second joueur. Dans cette situation, la partie boucle en vingt plis: [9, 1, 6, 2] / [5, 8, 4, 7, 3] → [1, 6, 2, 9, 5] / [8, 4, 7, 3] → [6, 2, 9, 5] / [4, 7, 3, 8, 1] → [2, 9, 5, 6, 4] / [7, 3, 8, 1] → [9, 5, 6, 4] / [3, 8, 1, 7, 2] → [5, 6, 4, 9, 3] / [8, 1, 7, 2] → [6, 4, 9, 3] / [1, 7, 2, 8, 5] → [4, 9, 3, 6, 1] / [7, 2, 8, 5] → [9, 3, 6, 1] / [2, 8, 5, 7, 4] → [3, 6, 1, 9, 2] / [8, 5, 7, 4] → [6, 1, 9, 2] / [5, 7, 4, 8, 3] → [1, 9, 2, 6, 5] / [7, 4, 8, 3] → [9, 2, 6, 5] / [4, 8, 3, 7, 1] → [2, 6, 5, 9, 4] / [8, 3, 7, 1] → [6, 5, 9, 4] / [3, 7, 1, 8, 2] → [5, 9, 4, 6, 3] / [7, 1, 8, 2] → [9, 4, 6, 3] / [1, 8, 2, 7, 5] → [4, 6, 3, 9, 1] / [8, 2, 7, 5] → [6, 3, 9, 1] / [2, 7, 5, 8, 4] → [3, 9, 1, 6, 2] / [7, 5, 8, 4] → [9, 1, 6, 2] / [5, 8, 4, 7, 3].

L'idée de passer par des regroupements de type «A et B» se généralise pour obtenir des cycles pour toutes les valeurs de V couvertes par le théorème de Michael Spivey. On introduit pour cela une nouvelle catégorie, qu'on note C, et l'on insère d'abord derrière chaque B un C puis derrière chaque A un B. Cela donne un paquet initial de la forme [A, B, B, C, A, B, B, C] pour le premier joueur, et un paquet initial de la forme [B, C, A, B, B, C, A, B, B, C] pour le second.

Si l'on impose que toute valeur numérique utilisée pour remplacer la lettre A est supérieure à toute valeur numérique utilisée pour remplacer la lettre B et que toute valeur numérique utilisée pour remplacer la lettre B est supérieure à toute valeur numérique utilisée pour remplacer la lettre C, alors on vérifie sans mal que la configuration initiale décrite ci-dessus produit un cycle en termes de A, B et C. Dans cet exemple, ce cycle dure quatre plis. Comme précédemment, un argument de finitude permet de démontrer qu'on obtient ainsi un cycle en termes de valeurs numériques de 1 à V. Par exemple, si le premier joueur a pour paquet initial [18, 14, 13, 5, 17, 12, 11, 4] et le second joueur [10, 3, 16, 9, 8, 2, 15, 7, 6, 1], la partie boucle en 360 plis.

En réitérant autant de fois que nécessaire cette opération d'insertion d'une nouvelle catégorie de nombres, on peut obtenir des cycles pour tous les nombres V qui ne sont pas de la forme 2^k avec $k \geq 1$ ni de la forme 3×2^k avec $k \geq 0$. C'est le principe de la démonstration de Michael Spivey.

La méthode de Michael Spivey ne permet pas de traiter les cas des nombres V de la forme 2^k avec $k \geq 1$ ni de ceux de la forme 3×2^k avec $k \geq 0$. Existe-t-il des cycles lorsque $C=1$, que les joueurs utilisent tous les deux le rangement naturel (ou optimisé) et que V est de cette forme?

Nous avons mené des recherches exhaustives de cycle pour $V=2$, 3, 4, 6, 8 et 12, et n'en avons pas trouvé. Pour les autres valeurs de V de la forme souhaitée, des calculs massifs par essais aléatoires ont été menés et n'ont pas permis, eux non plus, de trouver de cycle. Cela pousse à formuler la conjecture que, dans le cas où $C=1$ et où les joueurs utilisent tous les deux le rangement naturel (ou optimisé), la condition «V n'est pas de la forme 2^k avec $k \geq 1$ ni de la forme 3×2^k, avec $k \geq 0$» est non seulement suffisante pour qu'il existe des cycles, mais aussi nécessaire. Il semble que Michael Spivey ait sérieusement tenté de prouver cette conjecture, sans succès: elle reste donc ouverte à l'heure actuelle.

AVEC LES JEUX DE CARTES USUELS

Le cas $C=1$, pour lequel on dispose des intéressants résultats présentés ci-dessus, n'est pas celui des parties qu'on pratique réellement avec un jeu de 32 cartes ($C=4$, $V=8$) ou 52 cartes ($C=4$, $V=13$). Dans ces cas réels, la question des cycles est aussi partiellement résolue. La méthode utilisée pour traiter le rangement naturel est celle des cycles alignés (*voir l'encadré 4*). À notre connaissance, cette technique a été décrite pour la première fois dans notre article de 1995 . Elle prouve l'existence de cycles, avec des joueurs pratiquant le rangement naturel, pour $C=4$ et V un entier pair quelconque – donc en particulier pour le jeu usuel de 32 cartes. En revanche, cette méthode ne permet pas de traiter le cas où V est impair – donc en particulier, elle ne permet pas de conclure pour le jeu usuel de 52 cartes.

En outre, lorsque $C=4$ et que les joueurs pratiquent le rangement optimisé, la situation est encore plus mystérieuse. Nous avons réalisé des calculs massifs pour étudier les cas $C=4$ et V compris entre 2 et 13, quand les deux joueurs pratiquent le rangement optimisé. Nous avons trouvé des cycles pour $V=3$, $V=5$ et $V=11$:

– Pour $V=5$, lorsque le premier joueur a pour paquet initial [3, 1, 5, 4, 3, 2, 4, 3, 3, 2] et le second joueur [1, 1, 5, 4, 2, 2, 5, 4, 5, 1], la partie boucle en 28 plis.

– Pour $V=7$, lorsque le premier joueur a pour paquet initial [3, 5, 1, 7, 6, 6, 2, 4, 2, 3, 1, 7, 7, 6, 4, 5, 2, 3, 1] et le second [5, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 7, 6], la partie boucle en 2050 plis.

– Pour $V=11$, lorsque le premier joueur a pour paquet initial [11, 6, 6, 2, 8, 3, 4, 1, 11, 10, 9, 5, 9, 7, 3, 1, 10, 10, 8, 4, 8, 6, 5, 2] et le second [10, 4, 6, 1, 11, 8, 7, 5, 9, 2, 5, 1, 11, 7, 7, 3, 9, 4, 3, 2], la partie boucle en 1125 plis.

Pour des valeurs de V supérieures à 4, il ne nous a pas été possible de mener des explorations exhaustives de toutes les parties réalisables, et nous ne pouvons donc pas conclure rigoureusement. Notons toutefois que nos tests n'ont permis d'identifier aucun cycle pour le jeu usuel à 32 cartes ($C=4$, $V=8$) ni pour le jeu usuel à 52 cartes ($C=4$, $V=13$).

On peut s'étonner qu'en 2024, des conjectures de nature très mathématique et en apparence assez simples – comme celles au sujet de l'existence de cycles dans le cas $C=1$, ou pour le jeu usuel de 52 cartes – restent en suspens. Peut-être ces problèmes attendent-ils de nouveaux outils mathématiques pour être traités… ce qui remettrait sérieusement en question leur nature de «problèmes anti-Hilbert». ■

BIBLIOGRAPHIE

B. Casella *et al.,* A non-terminating game of beggar-my-neighbor, *arXiv preprint*, 2024.

P. Mathieu et J.P. Delahaye, *Simulations massives de parties de jeu de bataille*, Université de Lille, 2024.

E. Lakshtanov et V. Roshchina, On finiteness in the card game of war, *The American Mathematical Monthly,* 2012.

M. Spivey, Cycles in war, *INTEGERS*, 2010.

M. Paulhus, Beggar My Neighbour, *The American Mathematical Monthly,* 1999.

J.P. Delahaye et P. Mathieu, La bataille enfin analysée, *Pour la Science,* 1995.