Le réveil

Rubrique des **Paradoxes**

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences
et Technologies de Lille

Vous êtes le sujet d'une expérience dont le but est de tester vos capacités de raisonnement. Voici le protocole de l'expérience. Le dimanche soir, on vous endort et on lance une pièce de monnaie non truquée que vous avez pu examiner.

Si la pièce tombe sur FACE, le lendemain (lundi) on vous réveille et l'on a un entretien avec vous.

Si c'est PILE, le lundi on vous réveille, on a un entretien avec vous, puis on vous rendort, on vous soumet à un traitement qui provoque une amnésie totale de la journée du lundi, et enfin le mardi on vous réveille à nouveau et l'on a un entretien avec vous (vous ignorez donc que ce second entretien se déroule le mardi). Lors des entretiens, on vous demande : – quelles probabilités attribuez-vous à FACE et à PILE ? Deux raisonnements semblent possibles. Premier raisonnement : « Je suis certain que la pièce est normale et d'ailleurs je m'en suis assuré. Quand je suis réveillé, je n'ai aucune information en plus de celles dont je disposais le dimanche soir avant de m'endormir. Avant de m'endormir, la probabilité est 1/2 pour chaque éventualité FACE ou PILE. Donc, quand je suis réveillé lors de l'expérience, je dois attribuer la probabilité 1/2 à chaque éventualité. Je réponds donc que la probabilité pour que la pièce soit tombée sur FACE est 1/2, et c'est aussi 1/2 pour PILE. »

Deuxième raisonnement : « Imaginons qu'on fasse l'expérience 100 fois en opérant 100 semaines de suite. Dans environ la moitié des semaines (50), je serai réveillé le lundi après un tirage FACE. Les autres semaines (50 environ), PILE aura été tiré et je serai réveillé le lundi et le mardi (il y aura donc 100 réveils environ). Au total lors des 100 semaines, je serai réveillé environ 150 fois et, sur ces 150 réveils, FACE sera la bonne réponse 50 fois, et PILE sera la bonne réponse 100 fois. À chaque fois que je suis réveillé, la probabilité que la pièce lancée le dimanche soit tombée sur FACE est donc de 1/3, et pour PILE c'est 2/3. Ma réponse est donc : 1/3 pour FACE, et 2/3 pour PILE. »

Deux raisonnements parfaitement rigoureux conduisent à deux résultats différents. C'est absurde ! Quel est le bon raisonnement et quelle est précisément l'erreur dans le raisonnement faux ?

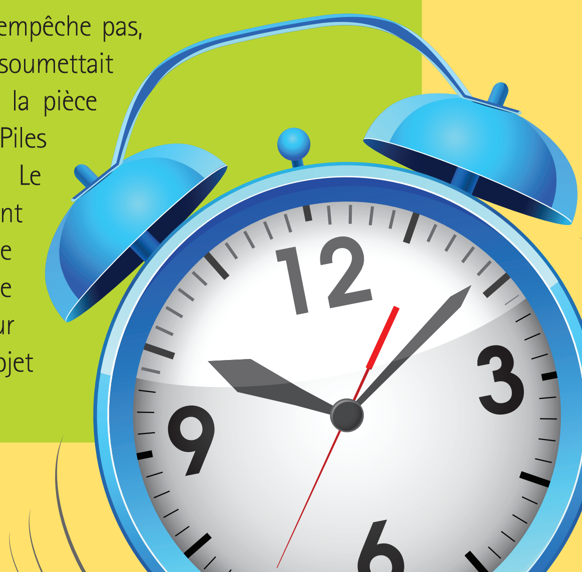
Solution du paradoxe précédent

Le réveil

La solution

Rappel de l'énoncé. Vous êtes le sujet d'une expérience dont le protocole est le suivant. Le dimanche soir, on vous endort et on lance une pièce de monnaie non truquée. Si la pièce tombe sur FACE, le lendemain (lundi) on vous réveille et l'on a un entretien avec vous. Si c'est PILE, on vous réveille, on a un entretien avec vous, et on vous rendort en vous soumettant à un traitement qui provoque une amnésie totale de la journée du lundi, et enfin le mardi, on vous réveille à nouveau et l'on a un entretien avec vous. Lors des entretiens, on vous demande « quelles probabilités attribuez-vous à FACE et à PILE pour le lancer de pièce du dimanche (qui est restée en place cachée sous un carton) ?». Deux raisonnements semblent possibles. Premier raisonnement : « Je suis certain que la pièce est normale. Je n'ai aucune information en plus de celles dont je disposais le dimanche soir avant de m'endormir. Avant de m'endormir, la probabilité est 1/2 pour chaque éventualité FACE ou PILE. Donc, quand je suis réveillé lors de l'expérience, je dois attribuer la probabilité 1/2 à chaque éventualité ». Deuxième raisonnement : « Imaginons qu'on fasse l'expérience 100 fois en opérant 100 semaines de suite. Dans environ la moitié des semaines (50), je serai réveillé le lundi après un tirage FACE. Les autres semaines (50 environ) PILE aura été tiré et je serai réveillé le lundi et le mardi (il y aura donc 100 réveils environ). Au total, lors des 100 semaines, je serai réveillé environ 150 fois et, sur ces 150 réveils, FACE sera la bonne réponse 50 fois, et PILE sera la bonne réponse 100 fois. À chaque fois que je suis réveillé, la probabilité que la pièce lancée le dimanche soit tombée sur FACE est donc de 1/3, et pour PILE c'est 2/3. Ma réponse est donc : 1/3 pour FACE, et 2/3 pour PILE ! ». Quel est le bon raisonnement et quelle est précisément l'erreur dans le raisonnement faux ?

Solution. Ce paradoxe (appelé « paradoxe de la Belle au Bois Dormant ») ne semble pas avoir trouvé de solution définitive et les partisans des deux options échangent leurs arguments aujourd'hui encore sans réussir à se mettre d'accord (chercher « sleeping beauty paradox » sur internet). Cependant, ma préférence va nettement vers la seconde solution à cause de l'argumentation suivante. Alors que le second raisonnement semble en tout point acceptable, le premier raisonnement pourrait bien être défectueux et n'est donc pas suffisant pour conclure 1/2 pour Pile et 1/2 pour Face. En effet, pour évaluer une probabilité ou, plus généralement, pour connaître la valeur numérique d'un paramètre que l'on mesure, il faut prendre en compte les modifications ou déformations de la grandeur que l'on mesure. Si, par exemple, vous mesurez la taille d'un timbre poste avec un double-décimètre placé au-dessus d'une loupe recouvrant le timbre, la valeur que vous trouverez sera exagérée par rapport à la réalité ; on parle de « l'effet de loupe ». Vous trouverez par exemple 2 cm alors que le timbre mesure réellement 1 cm. Autre exemple de déformation, si vous voulez mesurer « la proportion de poissons ayant une taille inférieure à 50 cm » dans un lac, en pêchant un échantillon de 100 poissons avec un filet dont les mailles ont une taille de 20 cm, vous allez trouver une valeur bien inférieure à la réalité, car votre filet laisse passer tous les poissons de moins de 20 cm. On parle d'un « effet de filtre ». Ici, lorsque vous vous soumettez au protocole expérimental, vous mesurez la probabilité de Pile et de Face en examinant la pièce le dimanche avant qu'elle soit lancée et vous trouvez 1/2 pour Pile, 1/2 pour Face. Il se trouve qu'ensuite cette propriété de la pièce (pour ce qui concerne le tirage du dimanche soir) est soumise à une sorte d'effet de loupe qui double vos observations de Piles (puisque, lorsque Pile est tiré, vous l'observez le lundi et le mardi) alors que ce n'est pas le cas lorsque Face est tiré. Comme dans le cas de la loupe – c'est-à-dire pour celui qui observe le timbre à travers la loupe – la probabilité observée et mesurée par vous est 2/3 pour Pile et 1/3 pour Face, bien que réellement – pour celui qui ne regarde pas à travers la loupe, c'est-à-dire pour celui qui n'est pas pris dans le protocole expérimental – la probabilité est de 1/2 pour Pile et de 1/2 pour Face. En conclusion : si vous acceptez ma façon de raisonner, lorsqu'on vous réveille vous devez répondre 2/3 pour Face, 1/3 pour Pile parce que vous êtes dans le protocole et donc soumis à un effet de loupe. Mais cela n'empêche pas, bien sûr, que si on soumettait la pièce à un test, la pièce donnerait 50% de Piles et 50% de Faces. Le second raisonnement est bon alors que le premier confond ce qui est mesuré « sur la loupe » avec l'objet situé sous la loupe.



L'hôtel paradoxal

Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences
et Technologies de Lille

Accromath Vol. 8 • été – automne 2013

Un hôtel infini dont les chambres sont numérotées par les entiers 0, 1, 2, 3, … est complet pour la nuit.

(A) Arrive un client : « pas de problème » lui répond le responsable de l'accueil « installez-vous dans la chambre 0, je demande au client de la chambre 0 de passer dans la chambre 1, à celui de la chambre 1 de passer dans la chambre 2, etc. ». L'accueil dispose bien sûr d'un téléphone infinitaire qui permet de téléphoner simultanément à toutes les chambres en demandant au client de la chambre n de passer en $n + 1$. Le nouveau client peut donc être accueilli, et cela sans qu'aucun client ne soit privé de chambre.

(B) Dix minutes plus tard arrive un car (bien sûr infini) de nouveaux clients qui demandent à passer la nuit dans l'hôtel. « Pas de problème » répond le responsable de l'accueil au chauffeur du car. Il utilise son téléphone infinitaire pour demander au client de la chambre n de passer dans la chambre $2n$. Il indique alors au chauffeur du car que le voyageur numéro i ($i = 0, 1, 2, …$) de son autocar peut disposer de la chambre $2i + 1$ – qui est effectivement libre puisque toutes les chambres de numéro impair ont été libérées. Chaque nouvel arrivant a trouvé à se caser et aucun de ceux qui occupaient l'hôtel (pourtant complet avant l'arrivée du car) n'a été chassé !

Cela semble étonnant, mais relisez bien les situations décrites en (a) et en (b), rien n'y est vraiment absurde. L'infini permet ce genre de petit miracle. Le nouveau problème est lié à cet hôtel infini, appelé *Hôtel de Hilbert* en l'honneur de David Hilbert, un des plus grands mathématiciens du XX^{e} siècle.

(C) Une demi-heure plus tard arrive un groupe plus important encore, car constitué d'une infinité d'autocars chacun ayant à son bord une infinité de passagers. La question est : Comment le responsable de l'accueil doit-il procéder pour résoudre le problème posé par cette brusque arrivée de clients (une infinité d'autocars infinis !) et offrir une chambre à chaque nouvel arrivant sans chasser aucun de ses clients ?

Solution du paradoxe précédent

L'hôtel paradoxal

La solution

Un hôtel infini dont les chambres sont numérotées par les entiers 0, 1, 2, 3, ... est complet pour la nuit.

a) Arrive un client : « pas de problème » lui répond le responsable de l'accueil, « installez-vous dans la chambre 0, je demande au client de la chambre 0 de passer dans la chambre 1, à celui de la chambre 1 de passer dans la chambre 2, etc. » Le nouveau client peut donc être accueilli, et cela sans qu'aucun client ne soit privé de chambre.

b) Dix minutes plus tard, arrive un autocar infini de nouveaux clients qui demandent à passer la nuit dans l'hôtel. « Pas de problème » répond le responsable de l'accueil. Il demande au client de la chambre n de passer dans la chambre $2n$. Il indique alors au chauffeur du car que le voyageur numéro i (i = 0, 1, 2, ...) de son autocar peut disposer de la chambre $2i + 1$ – qui est effectivement libre puisque toutes les chambres de numéro impair ont été libérées. Chaque nouvel arrivant a trouvé à se caser et aucun de ceux qui occupaient l'hôtel n'a été chassé !

c) Une demi-heure plus tard arrive un groupe plus important encore, car constitué d'une infinité d'autocars chacun ayant à son bord une infinité de passagers. Le responsable affirme qu'il peut loger tout le monde. Comment fait-il ?

La réponse – proposée par plusieurs lecteurs – consiste à utiliser une bijection entre $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, l'ensemble des paires de nombres entiers.

Très concrètement, le responsable de l'accueil téléphone au client de la chambre i et lui demande de passer dans la chambre $2i+1$ (ce qui libère toutes les chambres ayant un numéro pair) et donne la consigne suivante au responsable du groupe d'autocars : le passager numéro i du bus numéro j doit se rendre dans la chambre $2^{j+1}(2i + 1)$.

En clair :

- Les passagers du bus 0 occupent les chambres : 2, 6, 10, 14, 18, ..., $2\times(2i + 1)$, ...
- Les passagers du bus 1 occupent les chambres : 4, 12, 20, 28, 36, ..., $4\times(2i + 1)$, ...
- Les passagers du bus 2 occupent les chambres : 8, 24, 40, 56, 72, ..., $8\times(2i + 1)$, ...

etc.

Toutes les chambres sont occupées et jamais deux voyageurs différents ne se retrouvent dans la même chambre, car :

$$\text{si } 2^{i+1}(2j + 1) = 2^{i'+1}(2j' + 1)$$

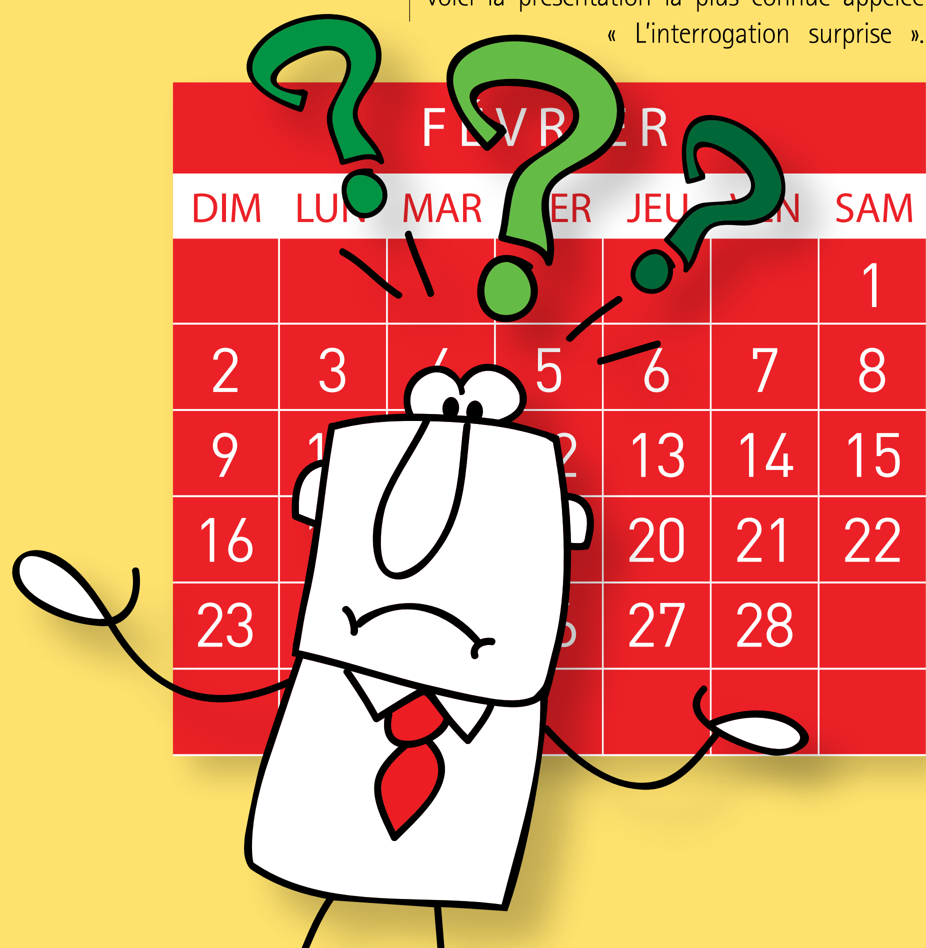
alors nécessairement $i = i'$ et $j = j'$.

L'interrogation surprise

Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences
et Technologies de Lille

Ce paradoxe a été découvert pendant la seconde guerre mondiale. Les autorités suédoises, voulant organiser un exercice de défense civile, firent annoncer à la radio qu'un exercice d'alerte se déroulerait la semaine suivante et que, de façon à ce que l'épreuve se déroule dans des conditions proches des conditions réelles, personne ne pourrait connaître à l'avance la date de l'exercice. Le mathématicien Lennart Ekbom réalisa qu'un délicat paradoxe logique résultait de l'annonce. Le problème est maintenant connu dans le monde entier, et donne toujours lieu à un débat entre spécialistes de logique. En voici la présentation la plus connue appelée « L'interrogation surprise ».



Le professeur Martin annonce à ses élèves :

a) je ferai une interrogation la semaine prochaine ;

b) vous ne pourrez pas savoir quel jour elle se déroulera ; ce sera une surprise.

Jacques, le meilleur élève en mathématiques de la classe, raisonne alors ainsi :

Nous avons cours avec Monsieur Martin le lundi, le mardi, le mercredi, le jeudi, le vendredi et le samedi. Puisqu'il nous dit que nous ne pourrons pas connaître le jour de l'interrogation, celle-ci ne se déroulera pas le samedi, car samedi matin, sachant que l'interrogation se fera dans la semaine (affirmation a), elle ne pourrait avoir lieu que le samedi et donc nous saurions de manière certaine qu'elle va avoir lieu. Il est donc acquis que l'interrogation n'aura pas lieu le samedi. Mais alors, le vendredi, elle ne peut pas avoir lieu non plus, car sachant qu'elle ne peut pas avoir lieu le samedi, quand nous arriverons dans la classe le vendredi, nous saurons qu'elle va avoir lieu. Il est donc acquis aussi que l'interrogation n'aura pas lieu le vendredi.

En poursuivant de la même manière, Jacques en déduit que l'interrogation ne peut avoir lieu ni le jeudi, ni le mercredi, ni le mardi, ni le lundi et donc qu'elle n'aura pas lieu.

Pourtant, le mercredi de la semaine suivante, Monsieur Martin fait son interrogation à la grande surprise de Jacques. Monsieur Martin n'a pas menti puisque (a) l'interrogation s'est bien déroulée dans la semaine prévue comme il l'avait annoncé, et que (b) Jacques a été surpris le jour de l'interrogation. Le raisonnement de Jacques semble pourtant parfaitement rigoureux.

Comment expliquer ce paradoxe ?

Solution du paradoxe précédent

L’interrogation surprise

La solution

Le professeur Martin affirme à ses élèves :

« (a) je ferai une interrogation la semaine prochaine et (b) vous ne pourrez pas savoir quel jour elle se déroulera ; ce sera une surprise ». Jacques, le meilleur élève en mathématiques de la classe, raisonne alors ainsi : « Nous avons cours avec Monsieur Martin le lundi, le mardi, le mercredi, le jeudi, le vendredi et le samedi. Puisqu’il nous dit que nous ne pourrons pas connaître le jour de l’interrogation, celle-ci ne se déroulera pas le samedi, car samedi matin, sachant que l’interrogation se fera dans la semaine (affirmation a), elle ne pourrait avoir lieu que le samedi et donc nous saurions de manière certaine qu’elle va avoir lieu. Il est donc acquis que l’interrogation n’aura pas lieu le samedi. Mais alors, le vendredi, elle ne peut pas avoir lieu non plus car, sachant qu’elle ne peut pas avoir lieu le samedi, quand nous arriverons dans la classe le vendredi, nous saurons qu’elle va avoir lieu. Il est donc acquis aussi que l’interrogation n’aura pas lieu le vendredi. » En poursuivant de la même manière, Jacques en déduit que l’interrogation ne peut avoir lieu ni le jeudi, ni le mercredi, ni le mardi, ni le lundi et donc qu’elle n’aura pas lieu. Pourtant, le mercredi de la semaine suivante, Monsieur Martin fait son interrogation à la grande surprise de Jacques. Monsieur Martin n’a pas menti puisque (a) l’interrogation s’est bien déroulée dans la semaine prévue comme il l’avait affirmé, et que (b) Jacques a été surpris le jour de l’interrogation.

Le raisonnement de Jacques semble parfaitement rigoureux. Comment expliquer ce paradoxe ?

Pour comprendre le paradoxe il faut simplifier l’histoire. Imaginons que les élèves de Monsieur Martin n’ont cours avec lui que le lundi et qu’il leur dise « (a) je ferai une interrogation la semaine prochaine et (b) vous ne pourrez pas savoir quel jour elle se déroulera ; ce sera une surprise ». Jacques pourra alors raisonner ainsi : « Le lundi matin, je saurai que l’interrogation va avoir lieu aujourd’hui (car Monsieur Martin nous dit qu’il fera une interrogation cette semaine et que nous n’avons cours avec lui que le lundi) et qu’elle n’aura pas lieu aujourd’hui (car Monsieur Martin nous dit que nous serons surpris de l’interrogation or si elle a lieu le lundi nous ne serons pas surpris) ». Il y a contradiction entre les conclusions qu’on tire des affirmations de Monsieur Martin. Notons que, dans le cas d’une semaine complète, il y a aussi une telle contradiction : on déduit que l’interrogation aura lieu dans la semaine – Monsieur Martin l’affirme – et qu’elle n’aura pas lieu dans la semaine – raisonnement de Jacques. Donc ce que dit Monsieur Martin est contradictoire : il affirme une chose et son contraire à la fois. Dans le cas de la semaine complète de cours, cette contradiction est masquée, mais il y a bien une contradiction dans les affirmations de Monsieur Martin. Que peut-on déduire des propos de quelqu’un qui se contredit lui-même ? Tout et n’importe quoi. Il n’y a pas de paradoxe, seulement un drôle de professeur qui tient des propos incohérents – contradictoires – auquel on ne peut donc pas se fier. Il n’a aucune raison d’être fier de nous surprendre puisque quiconque se contredit surprend forcément ceux qui croient à la vérité de ses propos.

L'arithmétique malmenée par la géométrie

Rubrique des Paradoxes

Jean-Paul Delahaye
Université des Sciences
et Technologies de Lille

Les paradoxes suivants proviennent de la géométrie du découpage.

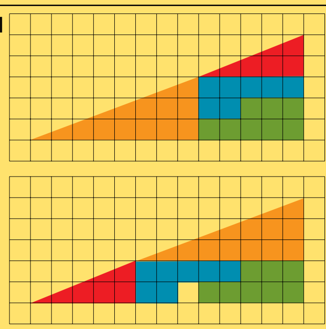
Si vous regardez attentivement la figure 1, vous devrez admettre qu'elle est étrange.

a) Un triangle est découpé en quatre morceaux ;

b) Les morceaux sont placés d'une nouvelle façon dans le triangle initial ;

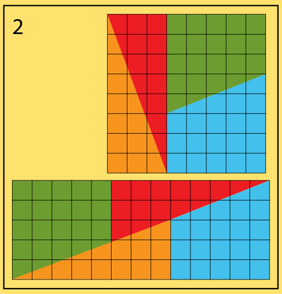
c) Surprise ! Il manque maintenant un carré pour en occuper totalement la surface.

1



Ce type de paradoxe est parfois attribué au magicien prestidigitateur Paul Curry (on parle de paradoxe de Curry) qui, en 1953, en aurait proposé un. Des traces plus anciennes ont cependant été trouvées de ce type de découpage dont l'origine reste mal connue.

2



La figure ci-contre est une démonstration par déplacements géométriques que 8 x 8 (l'aire du carré) est égal à 5 x 13 (l'aire du rectangle).

Pourtant 8 x 8 = 64 et 5 x 13 = 65. Aurait-on démontré que : 64 = 65 ?

La figure 3 montre de même que

$$10 \times 13 = 8 \times 8 + 8 \times 8,$$

c'est-à-dire que :

$$130 = 128.$$

La figure 4 (due au psychiatre L. Vosburgh) montre que :

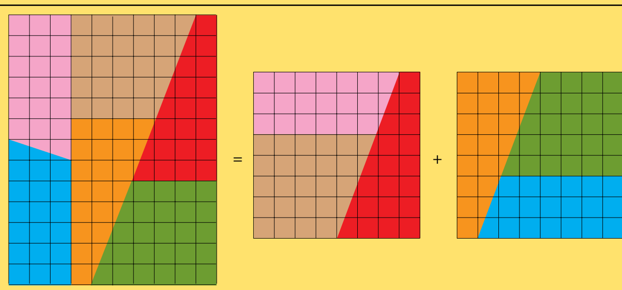
$$12 \times 10/2 = 12 \times 10/2 - 2 = 7 \times 9 - 4.$$

C'est-à-dire que :

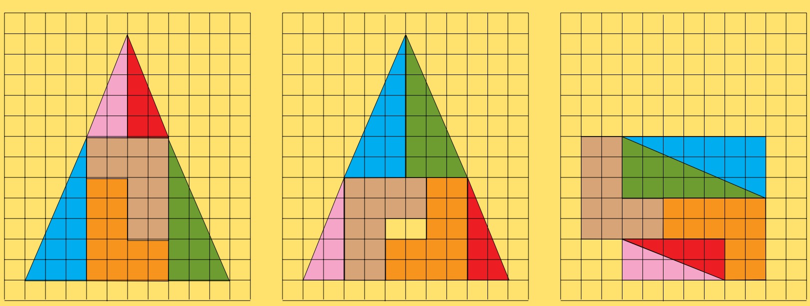
$$60 = 58 = 59.$$

Comment tout cela est-il possible ?

3



4

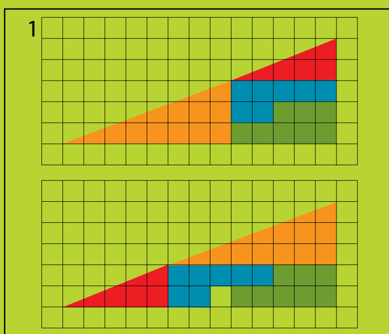


Solution du paradoxe précédent

L'arithmétique malmenée par la géométrie

La solution

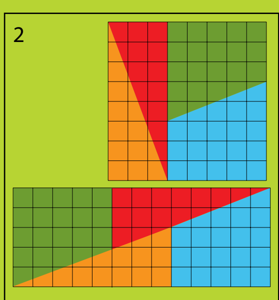
Les paradoxes du dernier numéro étaient de simples découpages comme celui-ci.



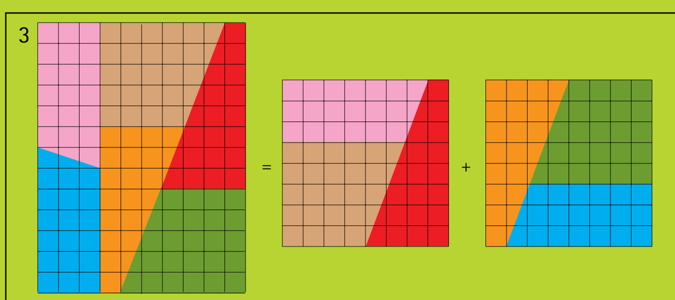
En apparence le même triangle est rempli deux fois par les mêmes pièces, bien que la seconde fois un carré blanc supplémentaire soit présent. Cela semble impossible puisque déplacer des pièces ne peut pas diminuer ou augmenter la surface qu'elles occupent !

Il s'agit d'une arnaque assez élémentaire qu'un regard attentif permet de dénoncer facilement. En réalité, aucune des deux figures n'est un vrai triangle. En effet, la pente de l'hypoténuse du petit triangle rectangle rouge est 2/5 = 0,4 (il y a 2 cases de hauteur et 5 de largeur) alors que celle du petit triangle orangé est de 3/8 = 0,375 : les deux hypoténuses ne s'alignent pas l'une avec l'autre. Dans le premier dessin, le « pseudo-triangle » est légèrement creusé, alors que le second « pseudo-triangle » est légèrement gonflé (ce qui explique qu'on puisse y loger un carré blanc de plus).

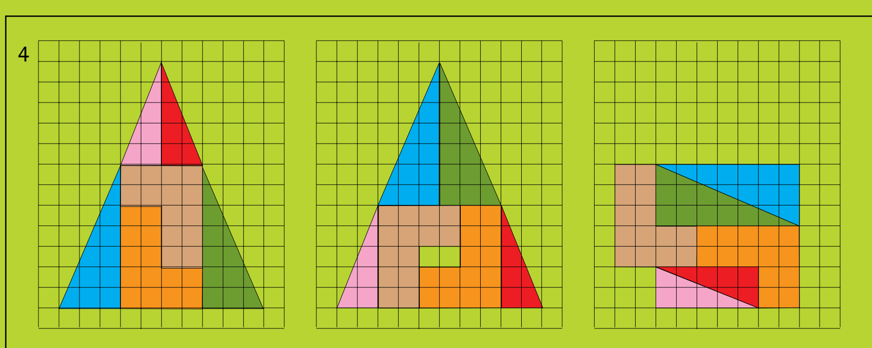
Le même genre d'explications s'applique aux autres figures.



$5 \times 13 = 8 \times 8$?



$10 \times 13 = 8 \times 8 + 8 \times 8$?



$12 \times 10/2 = 12 \times 10/2 - 2 = 7 \times 9 - 4$?