FLOCONS ET DRAGONS POUR PAVER LE PLAN

Les fractales sont des objets mathématiques qui défient l'intuition. Certaines d'entre elles poussent l'exotisme jusqu'à s'emboîter parfaitement pour former de beaux pavages du plan.

L'AUTEUR

JEAN-PAUL DELAHAYE
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)

Il existe une grande variété de formes fractales, engendrées par de nombreux procédés. En dépit de leur frontière ciselée à l'extrême, certaines d'entre elles pavent parfaitement le plan: on peut emboîter des copies d'une telle forme pour recouvrir entièrement le plan, sans laisser de trou et sans aucun chevauchement. Un tel recouvrement parfait du plan par des briques de base parfaitement emboîtées est appelé «pavage».

En toute rigueur, une fractale est une forme du plan dont la dimension ne vaut pas 1 (comme pour un cercle) ni 2 (comme pour un disque), mais un nombre réel non entier. Dans le cas où la dimension est comprise strictement entre 1 et 2, cela signifie qu'on a affaire à une forme de nature intermédiaire entre une courbe usuelle et une forme d'aire non nulle. La dimension non entière d'une fractale en fait un objet «infiniment découpé», et la plupart des fractales ont de plus la propriété d'être «autosimilaires»: en zoomant ou dézoomant autant qu'on le veut sur une partie quelconque de la forme, on observera toujours les mêmes motifs. C'est par exemple le cas de la célèbre courbe définissant le bord du flocon de von Koch (*voir l'encadré 1*), du tapis de Sierpinski, ou encore de la fractale de Mandelbrot.

Un des pavages les plus simples du plan, même si l'on oublie souvent de le mentionner, est celui qu'on obtient en exploitant un segment de droite S entre deux points A et B, dont on conserve une extrémité – par exemple, le point A – et pas l'autre, ce qu'on note $S = [A, B[$. Il est clair qu'en alignant des copies de ce segment les unes contre les autres, on obtient un pavage parfait de la droite D qui porte le segment $[A, B]$. En pavant de la même façon chaque droite parallèle à D dans le plan, on obtient un pavage du plan tout entier n'utilisant que des copies de S. Bien sûr, le nombre de copies de S utilisé pour ce pavage est infini non dénombrable, mais il s'agit bien d'un pavage au sens le plus strict, car tout point du plan est couvert par exactement une copie de S. On appelle «pavage fin» un tel découpage du plan en une quantité indénombrable de sous-parties disjointes d'intérieur vide. La question qui nous intéresse en premier lieu est celle de l'existence de pavages fins du plan utilisant non pas un segment, mais une forme fractale. De tels pavages existent bel et bien, et un premier exemple provient du tout premier objet fractal introduit en mathématiques: le graphe de la fonction de Weierstrass.

PAVAGES FINS

En 1872, le mathématicien allemand Karl Weierstrass présente à ses collègues de l'Académie des sciences de Berlin un exemple de fonction continue sur tout $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels, mais qui n'est pourtant dérivable en aucun point, ce qu'on pensait alors impossible. Plus précisément, il présente une famille de telles fonctions, famille indexée sur deux paramètres réels. Pour tous nombres a et b

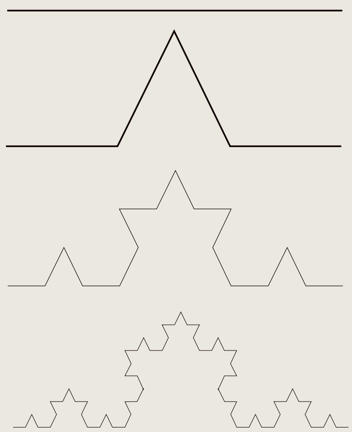
Jean-Paul Delahaye a également publié: **Aux frontières des mathématiques: Kurt Gödel et l'incomplétude** (Dunod, 2025).

FLOCON DE VON KOCH ET DIMENSION FRACTALE

1

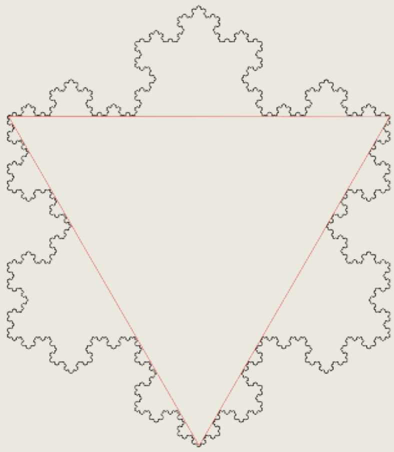
Le flocon de von Koch est défini à partir de la courbe présentée dans le dessin (a), qui est construite de manière itérée. On part d'un segment de longueur 1. On en retire le tiers central, qu'on remplace par deux sommets d'un triangle équilatéral de côté 1 / 3. On reproduit ces mêmes étapes de construction sur chacun des quatre segments de la figure obtenue, et on recommence le procédé indéfiniment. La courbe finalement obtenue est de longueur infinie, puisqu'à chaque itération de la construction on multiplie la longueur de la courbe par 4 / 3 > 1. Elle est également autosimilaire : si l'on zoome autant qu'on le veut sur n'importe quelle portion de cette courbe, ce qu'on obtiendra ressemblera à la courbe dans sa totalité.

a



Pour obtenir le flocon de von Koch complet, on prend trois exemplaires de cette courbe, qu'on joint à leurs extrémités autour d'un triangle équilatéral, comme montré dans le dessin (b). C'est une forme fractale : sa dimension, non entière, vaut $log(4) / log(3) = 1{,}261\,859...$

b

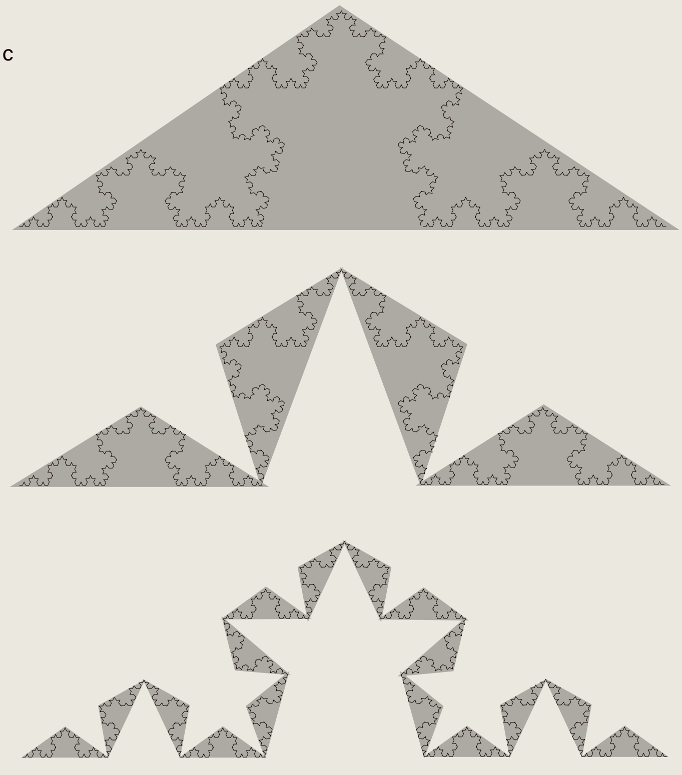


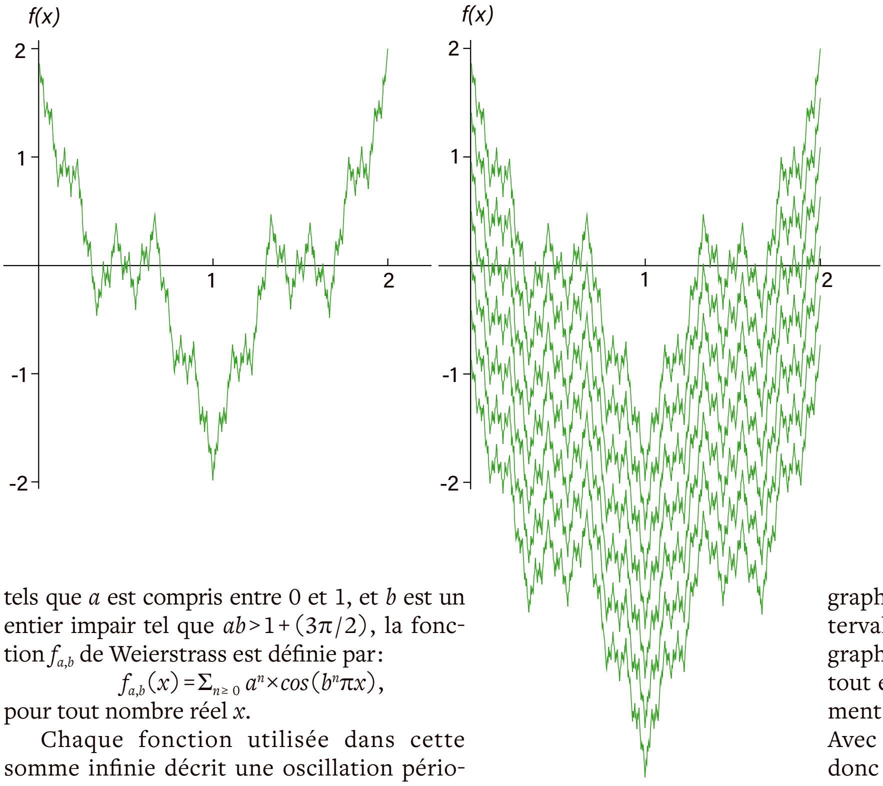
La dimension d'un sous-ensemble E du plan ou de l'espace peut être définie de plusieurs façons, qui heureusement coïncident dans la plupart des cas. L'une des méthodes de calcul de la dimension, appelée « méthode de Minkowski-Bouligand », ou « méthode box-counting », consiste à recouvrir E par des ensembles de taille décroissante. Si le nombre minimum de morceaux de taille inférieure ou égale à e – avec e un nombre réel strictement positif – nécessaires pour recouvrir E est $N(e)$, alors la dimension D de E est la limite, quand e tend vers zéro, de $log(N(e)) / \log(1 / e)$.

Ainsi, comme il faut $N(1 / n) = n$ segments de taille $1 / n$ pour recouvrir un segment de droite de longueur 1, on calcule que $log(N(1 / n)) / log(1 / (1 / n)) = log(n) / log(n) = 1$. Donc la dimension du segment est 1. De même, comme il faut $N(1 / n) = n^2$ carrés de côté $1 / n$ pour recouvrir un carré plein de côté 1, le calcul montre que le carré plein de côté 1 est de dimension 2.

Pour calculer la dimension de la courbe qui sert à construire le flocon de von Koch, on considère par exemple une suite de triangles isocèles dont la base est de longueur $e_n = (1 / 3)^n$, qui recouvrent la courbe, comme dans les figures du dessin (c). Il faut $N(1) = 1$ triangle de base $e_0 = 1$ pour recouvrir la courbe ; puis $N(1 / 3) = 4$ triangles de base $e_1 = 1 / 3$; puis $N(1 / 9) = 16$ triangles de longueur $e_2 = 1 / 9$; etc. De manière générale, il faut $N(1 / 3^n) = 4^n$ triangles de longueur $e_n = (1 / 3)^n$ pour la courbe. On calcule donc que $log(N(e_n)) / log(1 / e_n) = log(4^n) / log(1 / (1 / 3^n)) = (n \times log(4)) / (n \times log(3)) = log(4) / log(3) = 1{,}261\,859...$ En faisant tendre n vers $+\infty$ – donc en faisant tendre la taille des triangles de la construction vers 0 –, on obtient que la limite de $log(N(e_n)) / log(1 / e_n)$ vaut $log(4) / log(3) = 1{,}261\,859...$ C'est la dimension, non entière, de la courbe définissant le flocon de von Koch. Cela justifie son caractère fractal.

c





À gauche, le graphe de la fonction de Weierstrass $f_{a,b}$ sur l'intervalle $[0, 2[$ avec les paramètres $a=1/2$ et $b=3$. Il s'agit d'une forme fractale, qui pave par translation la bande verticale entre les droites d'équation $x=0$ et $x=2$, comme le montre la figure de droite. En translatant vers la droite et vers la gauche la bande verticale ainsi obtenue, on pave alors parfaitement le plan tout entier avec le graphe fractal de Weierstrass. C'est un pavage fin du plan.

tels que a est compris entre 0 et 1, et b est un entier impair tel que $ab > 1 + (3\pi/2)$, la fonction $f_{a,b}$ de Weierstrass est définie par :

$$f_{a,b}(x) = \Sigma_{n \geq 0}\, a^n \times cos(b^n \pi x),$$

pour tout nombre réel x.

Chaque fonction utilisée dans cette somme infinie décrit une oscillation périodique, de plus en plus rapide à mesure que n augmente, ce qui explique la non dérivabilité de la somme.

Conjecturée par Benoît Mandelbrot et démontrée seulement en 2017 par le mathématicien allemand Gerhard Keller, et indépendamment par le mathématicien chinois Weixiao Shen, la dimension fractale du graphe de la fonction $f_{a,b}$ est donnée par la formule : $D = 2 + log(a)/log(b)$. En prenant, par exemple, $a = 1/2$ et $b = 3$, on a donc : $D = 2 + log(1/2)/log(3) = 1{,}2690071...$

Le fait que le graphe de $f_{a,b}$ pave le plan est assez simple à démontrer. En translatant le graphe de la fonction $f_{a,b}$ verticalement de h, pour h un nombre réel quelconque non nul, on obtient le graphe de la fonction $f_{a,b,h}$ définie par $f_{a,b,h}(x) = f_{a,b}(x) + h$, qui ne coupe le graphe de $f_{a,b}$ en aucun point. L'ensemble des translatés du graphe quand on fait varier h de $-\infty$ à $+\infty$ pave donc parfaitement le plan. Ce pavage par le graphe d'une fonction continue n'est en rien extraordinaire : on a la même chose pour le graphe de toute fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. Toutefois, ce qui est étonnant dans ce cas précis, c'est que le graphe n'a pas une dimension égale à 1.

Notons que dans ce pavage, la brique de base – la courbe de $f_{a,b}$ – est de taille infinie, ce qu'on peut juger insatisfaisant. C'est cependant facile à corriger, car la fonction $f_{a,b}$ est périodique de période 2 : pour tout nombre réel x, $f_{a,b}(x+2) = f_{a,b}(x)$. Pour définir un pavage par des formes bornées, il suffit donc de ne retenir que le morceau du graphe correspondant aux abscisses de l'intervalle $[0, 2[$. Cela fournit un morceau du graphe qui pave le graphe de la fonction $f_{a,b}$ tout entier – de la même manière que le segment $[A, B[$ pave toute la droite qui le porte. Avec les translations verticales, cela permet donc de paver tout le plan (*voir la figure ci-dessus*). Cette méthode s'adapte à tout graphe fractal d'une fonction continue définie sur un intervalle borné de nombres réels.

Il existe cependant des courbes fractales qui ne sont pas des graphes de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle. C'est par exemple le cas de la frontière du célèbre flocon de von Koch, qui est une courbe de dimension $log(4)/log(3)$ (*voir l'encadré 1*). Est-il possible de paver le plan avec cette courbe ?

On peut prouver qu'un cercle de rayon non nul, même si l'on accepte d'en faire varier la taille, ne pave pas le plan. Le raisonnement s'adapte facilement pour démontrer que la frontière du flocon de von Koch ne pave pas non plus le plan. Peut-on, en revanche, y parvenir si l'on ne prend qu'une partie de cette courbe – par exemple son tiers supérieur ? Cette question est plus subtile. Pour chercher à y répondre, on peut s'autoriser à n'utiliser que des copies exactes de ce tiers supérieur, ou au contraire s'autoriser à utiliser des copies de tailles différentes. Dans aucun des deux cas je ne connais la réponse : voilà un beau défi pour les lecteurs et lectrices qui souhaiteraient se pencher sur la question !

PAVAGES GÉNÉRALISÉS

Poursuivons avec le flocon de von Koch, mais en le considérant cette fois-ci avec son intérieur. Nous noterons vK la forme ainsi obtenue. Ce flocon rempli n'est pas une forme fractale, car il contient un disque de rayon non nul – donc sa dimension est supérieure ou égale à 2 – et qu'il est par ailleurs contenu dans le plan – sa dimension est donc inférieure ou égale à 2. Il est par conséquent de dimension exactement 2. Toutefois, sa frontière, elle, est fractale. Que se passe-t-il si l'on cherche à paver le plan avec de telles formes aux bords infiniment découpés?

Précisons tout d'abord que, lorsqu'on parle de pavage du plan par une forme *F* de dimension 2, on considère qu'on réalise un pavage si chaque point du plan est recouvert par au moins une copie de *F*, mais l'on accepte que les points sur la frontière des copies de la forme *F* soient couverts plusieurs fois. C'est le cas quand on considère le pavage du plan par des carrés pleins: la frontière de chaque carré est couverte deux fois, et les coins des carrés sont même couverts quatre fois.

La forme *vK* ne pave pas le plan: on constate aisément qu'il n'existe aucune façon de placer côte à côte deux copies de *vK* sans laisser d'espace non couvert entre elles. En revanche, et c'est une chose tout à fait étonnante, en combinant des copies de *vK* et des copies de *vK* de taille $1/\sqrt{3}$, on peut paver le plan (*voir l'encadré 2*). Cette utilisation de la même forme mais dans deux tailles différentes amène la notion de «pavage généralisé».

À ce stade, précisons un peu le vocabulaire. Pour nous, «un pavé» *P* du plan désigne une forme bornée (c'est-à-dire qui tient dans un disque de rayon fini), fermée au sens topologique (elle contient sa frontière), qui a au moins un point intérieur *p* (*i.e.* il existe un disque de rayon non nul de centre *p*, entièrement contenu dans *P*) et qui est telle qu'un point est sur la frontière de *P* si et seulement s'il est la limite d'une suite de points intérieurs à *P*. Ainsi, un carré plein avec sa frontière ou un flocon de von Koch rempli constituent des pavés. Un 9 dont on remplit le trou, en revanche, n'en est pas un, car la queue du 9 est composée de points qui sont sur sa frontière mais ne sont pas la limite de suites de points intérieurs.

Un «pavage généralisé» d'un sous-ensemble Q du plan (par exemple, le plan tout entier) par un pavé *P* est un pavage du plan obtenu non plus en emboîtant parfaitement des exemplaires de *P*, mais des exemplaires d'un ensemble fini de formes distinctes P_1, P_2, ..., P_n tel que chaque P_i est obtenu en appliquant une ou plusieurs opérations de rotation, de translation ou d'homothétie à *P*. Autrement dit, chaque P_i a la même forme que *P*, mais sa taille peut être différente. On exige aussi que deux formes du pavage n'aient en commun, au plus, que des points de leurs frontières, et que tout point de Q soit un point d'un des P_i ou la limite de points pris dans les P_i – cette dernière condition est un peu délicate, mais elle est importante, car il arrive que certains points ne soient pas inclus dans les P_i, mais soient seulement limites de points inclus dedans.

On peut démontrer les deux étonnants résultats ci-dessous:

(a) Quel que soit le pavé *P*, il existe un pavage généralisé du plan par *P*.

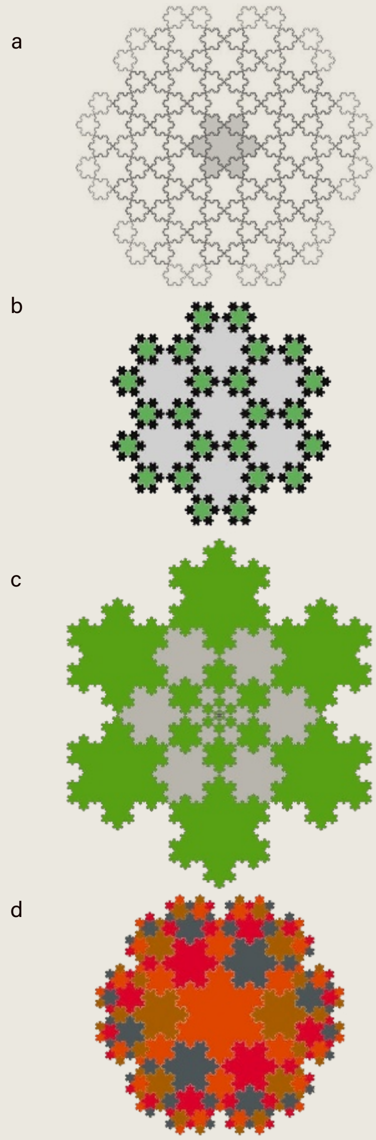
(b) Si *P* et Q sont deux pavés, il existe un pavage généralisé de Q par *P*.

Revenons au flocon de von Koch plein, *vK*. En manipulant le pavage du plan par deux flocons de tailles respectives 1 et $1/\sqrt{3}$, on obtient un pavage de *vK* par des flocons de plus en plus petits (*voir l'encadré 2*). Il s'agit bien d'un pavage généralisé de *vK* par *vK*, au sens indiqué ci-dessus.

Reste une question naturelle: s'il n'existe pas de pavage du plan avec un unique flocon de

2 PAVAGES AVEC DES FLOCONS DE VON KOCH

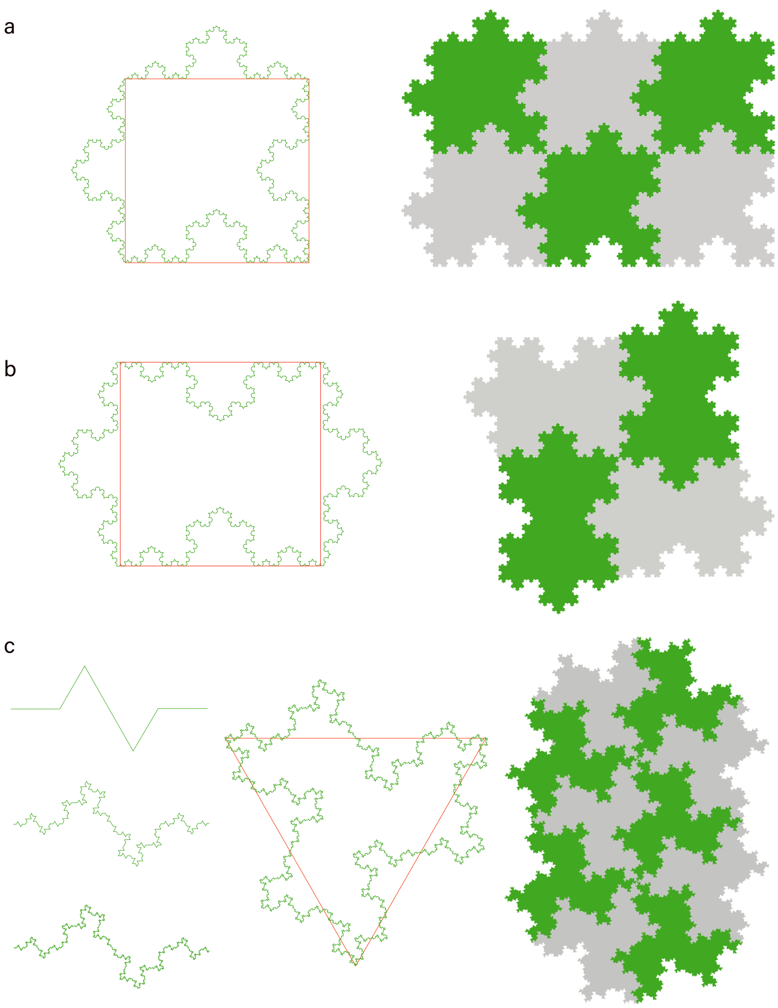
Le flocon de von Koch avec son intérieur, qu'on note *vK*, permet de paver le plan si l'on s'autorise à utiliser deux tailles différentes de *vK* (taille 1 et taille $1/\sqrt{3}$), comme le représente le dessin (a). La démonstration de ce résultat n'est pas évidente du tout, mais elle a été magistralement expliquée par Mickaël Launay dans une vidéo de sa chaîne YouTube « Micmaths ».
En regardant attentivement ce pavage, on constate qu'un gros flocon est toujours entouré de 6 petits, et que l'ensemble de ces 7 flocons forme 1 flocon encore plus gros. Réciproquement, cela signifie qu'un flocon peut être découpé en 7 « sous-flocons » : un gros au centre et 6 petits autour. On en déduit la construction d'un pavage du plan avec des *vK* de trois tailles différentes, comme le montre le dessin (b).
En réitérant le procédé on trouve bien sûr un pavage avec quatre tailles différentes de flocons, et l'on peut poursuivre et obtenir des pavages avec *n* tailles différentes de flocons, pour tout $n \geq 2$.
On en déduit également un pavage du flocon par lui-même avec des séries de flocons de plus en plus petits à mesure que l'on s'approche du centre – plus précisément, pour un flocon de taille 1, on obtient un pavage par des séries de flocons de taille $(1/\sqrt{3})^n$ pour tout $n \geq 1$, comme le montre le dessin (c). C'est un pavage généralisé de *vK* par *vK*.
Ces emboîtements parfaits de flocons de plus en plus petits permettent par ailleurs de paver n'importe quelle partie *Q* du plan « ouverte » au sens topologique – c'est-à-dire une partie *Q* du plan dont chaque point est le centre d'un disque entièrement contenu dans *Q*. Le dessin (d) montre, par exemple, le début d'un tel pavage pour un disque ouvert.



von Koch, est-il néanmoins possible de paver le plan avec un unique pavé de dimension 2 à frontière fractale? La réponse est positive, et l'on peut construire un tel pavé en utilisant la courbe définie par le tiers supérieur du flocon de von Koch. Les procédés permettant de construire de tels pavés fournissent en réalité une infinité de pavages du plan par des formes de dimension 2 à frontière fractale.

À PARTIR D'UN PAVAGE QUELCONQUE

Une première idée consiste à partir d'un pavage du plan par des carrés et à modifier les carrés en remplaçant chacun de leurs quatre côtés par le tiers supérieur de la frontière de *vK*. De la sorte, on obtient bien une forme de dimension 2 à frontière fractale. Pour que cette forme pave le plan, il faut de plus que les courbes fractales utilisées à la place des côtés du carré s'emboîtent, ce qu'on garantit en orientant ces morceaux de courbe alternativement «vers l'intérieur» et «vers l'extérieur» du carré initial (*voir la figure ci-dessous*).



On peut obtenir un pavé à frontière fractale en partant d'un carré et en remplaçant ses côtés par des courbes fractales. En utilisant, pour ce faire, le tiers supérieur de la frontière du flocon de von Koch, il y a deux façons d'opérer cette substitution des côtés, montrées dans les dessins *(a)* et *(b)*. Pour le dessin *(a)*, on a orienté la courbe fractale «vers l'extérieur du carré» pour deux côtés adjacents, et «vers l'intérieur» pour les deux autres côtés. Pour le dessin *(b)*, on a alterné «vers l'extérieur» et «vers l'intérieur». Si l'on souhaite appliquer la même méthode en partant d'un triangle équilatéral, on peut exploiter une courbe fractale possédant un centre de symétrie, construite par substitutions répétées, comme le montre le dessin *(c)*.

En appliquant le même procédé mais en partant, cette fois-ci, du pavage du plan par des hexagones réguliers, on obtient un autre pavé à frontière fractale. Cette méthode ne fonctionne pas, en revanche, si l'on part du pavage du plan par des triangles équilatéraux. En effet, 3 est un nombre impair, ce qui interdit d'équilibrer la forme: en utilisant cette méthode de substitution, on obtiendrait soit un pavé où la substitution se serait faite deux fois vers l'extérieur et une fois vers l'intérieur, soit un pavé où la substitution se serait faite deux fois vers l'intérieur et une fois vers l'extérieur. Dans ces deux cas, les formes obtenues ne s'emboîtent pas pour paver le plan. En revanche, on peut exploiter ce pavage du plan par des triangles équilatéraux si l'on remplace les bords des triangles non pas par le tiers supérieur de la frontière de *vK*, mais par une courbe fractale possédant un centre de symétrie (*voir la figure ci-contre*). On peut facilement construire une telle courbe en utilisant une méthode de substitution répétée, comme pour le flocon de von Koch, mais avec un motif de base possédant un centre de symétrie. Une telle courbe fractale symétrique permet d'ailleurs de construire des pavés à frontière fractale à partir de n'importe quel pavé polygonal ayant tous ses côtés de même longueur, même quand ce pavé polygonal a un nombre impair de côtés.

LES DRAGONS

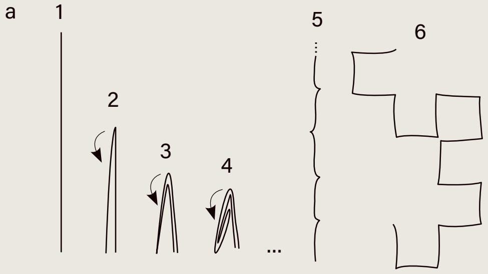
Une méthode entièrement différente fournit une autre famille infinie de formes à frontière fractale pavant le plan: celle du «dragon de Heighway» et de ses variantes. Découvert en 1966 par John Heighway, Bruce Banks et William Harter, des physiciens de la Nasa, le «dragon de Heighway» a été popularisé en 1967 par Martin Gardner, par le biais d'un article dans le magazine *Scientific American*. Il est toujours l'objet de recherche à l'heure actuelle: en 2025 de nouvelles propriétés lui ont encore été découvertes!

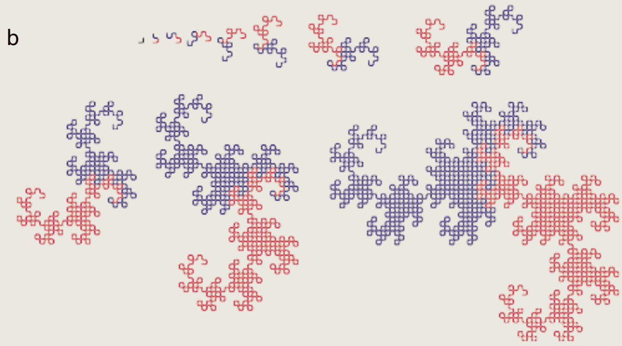
Le procédé pour engendrer le dragon est élémentaire. On part d'une bande de papier, qu'on plie en deux en rabattant «par le dessus» la

3

LES DRAGONS

En pliant quatre fois « par le dessus » une bande de papier, puis en la dépliant en transformant les plis creux et bosses en angles droits, on obtient une courbe nommée « courbe du dragon à l'ordre 4 ».
En opérant la même série d'opération *n* fois au lieu de 4, pour tous les entiers *n*, on obtient une suite de courbes qui, à l'infini, converge vers une forme à deux dimensions et à frontière fractale : le « dragon de Heighway ».





On observe qu'à tout ordre, un dragon est composé exactement de deux « sous-dragons » identiques, plus petits, orthogonaux l'un à l'autre – cela résulte de la construction. C'est ce constat qui permet de démontrer que le dragon de Heighway pave le plan.

moitié droite de la bande. On recommence en rabattant «par le dessus» la moitié droite de la bande pliée. On recommence, par exemple, 4 fois. On déplie alors la bande en s'arrangeant pour que chacun de plis marqués – en creux ou en bosse – forme un angle droit. La forme obtenue après n étapes de pliage puis le dépliage est une courbe continue qui ne se recoupe pas. Quand on fait tendre n vers l'infini on obtient le «dragon de Heighway» (*voir l'encadré 3*). Phénomène remarquable: la forme obtenue à l'infini est de dimension 2. En effet, à force de «se replier sur elle-même» au fil des étapes de construction, la courbe finit par remplir complètement une partie du plan d'intérieur non vide H, chaque point de H étant la limite d'une suite de points pris sur la courbe. Comme le flocon de von Koch, le dragon a une frontière fractale, de dimension:

$$\log_2(1/3\times[1+\sqrt[3]{(73-6\sqrt{87})}+\sqrt[3]{(73+6\sqrt{87})}]) = 1{,}5236...$$

Si, au lieu de plier «par le dessus» à chaque étape de la construction, on plie une fois sur deux «par le dessus» et une fois sur deux «par le dessous», on obtient à chaque étape une autre courbe qui ne se recoupe pas, qui à l'infini fournit un autre dragon. Il y a bien évidemment une infinité de façons de choisir une suite alternant des pliages «par le dessus» et «par le dessous», ce qui donne une infinité de dragons différents.

Un très beau résultat assure que chaque dragon engendré par une suite périodique de pliages pave le plan. N'importe quel dragon est en effet composé de deux parties identiques liées l'une à l'autre et tournées d'un angle droit l'une par rapport à l'autre, car le premier pli de la construction a superposé la partie droite et la partie gauche de la bande et par la suite les deux parties ont été soumises exactement aux mêmes pliages. En revanche, ces deux sous-parties ne sont, *a priori*, pas nécessairement identiques au dragon dans son ensemble. Cependant, si la suite qui a engendré le dragon est périodique, en décomposant de la même façon chacun des deux demi-dragons en deux autres sous-parties, puis en réitérant l'opération, on finira par trouver une décomposition en 2^k parties identiques au dragon dans son ensemble, avec k la période de la suite génératrice. Un tel dragon est donc pavé par des dragons identiques à lui-même mais plus petits. Inversement, on peut donc assembler 2^k exemplaires du dragon pour créer une forme identique au dragon, mais en plus gros. En réitérant l'opération, on recouvre une partie du plan de plus en plus grande avec un assemblage de dragons. En particulier, on recouvre des disques de taille de plus en plus grande, car le dragon de départ couvre un disque de rayon non nul. Or un résultat général concernant les pavages indique que si des assemblages de copies d'un pavé P couvrent des disques de rayons aussi grands qu'on le veut, alors P pave le plan tout entier. Par conséquent, chacun des dragons obtenus à partir d'une suite périodique de pliages pave le plan. Ce résultat fournit une infinité de pavés à 2 dimensions et à frontière fractale.

Nous avons décrit quelques procédés permettant de paver le plan avec des fractales ou des formes à frontières fractales, mais ce champ des mathématiques ne s'arrête pas là. Régulièrement de nouvelles constructions sont proposées et étudiées, ce qui entraîne des développements parfois très riches mathématiquement. Si les pavages fractals, en définitive, ne sont pas rares, leur intérêt mathématique est indiscutable. ■

BIBLIOGRAPHIE

S. Akiyama *et al.*, Non-self-intersective Dragon curves, *Indagationes Mathematicae*, 2025.

R. Sargent, A gasket construction of the Koch snowflake and variations, *arXiv preprint*, 2025.

K. Scheicher *et al.*, Fractal tiles induced by tent maps, *arXiv preprint*, 2025

Y. Demichel, Who invented von Koch's snowflake curve ?, *The American Mathematical Monthly*, 2024.

S. Correa-Erazo *et al.*, An algorithm since the vector approach in mathematica to generate the von Koch curve and islands in a general way, *Cisetc*, 2023.

J. P. Delahaye, *Jeux finis et infinis*, Seuil, 2010.

H. von Koch, Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes, *Acta Mathematica*, 1906.