Courses-poursuites mathématiques

Jean-Paul Delahaye

La théorie des «jeux des gendarmes et du voleur», où fugitif et poursuivants jouent à cache-cache sur les sommets d'un graphe, est un champ mathématique riche, toujours très actif.

Nous avons toutes et tous vu des dizaines de séquences de films présentant des courses-poursuites aux rebondissements spectaculaires. À pied, à moto, au volant d'autos et même à bord d'avions, le cinéma adore ces scènes d'action. Rien de très mathématique à première vue… pourtant, cette dynamique de traque a inspiré des problèmes sur les graphes, qui se sont révélés constituer un domaine particulièrement intéressant de la théorie des jeux. Dans le monde anglo-saxon, ce domaine se nomme la théorie des *games of cops and robbers*, ce qu'en français on traduira par «jeux des gendarmes et du voleur».

Dès 1917, Henry Dudeney, créateur anglais de casse-tête mathématiques, expose un cas particulier d'un tel jeu, mais c'est en 1978 que le domaine naît véritablement, dans la thèse de doctorat d'Alain Quilliot. La théorie est reprise en 1983 par Richard Nowakowski, aujourd'hui à l'université Dalhousie, à Halifax, au Canada, et Peter Winkler, alors à l'université Emory, à Atlanta, aux États-Unis. Depuis, elle a donné lieu à des dizaines d'articles scientifiques ainsi qu'à plusieurs thèses et livres, en particulier du fait de l'existence de nombreuses variantes des problèmes considérés. À l'heure actuelle, elle fait toujours l'objet de recherches, en particulier autour de la «conjecture de Meyniel» que nous évoquerons plus loin. Le sujet est remarquable car d'une part il engendre un certain nombre de résultats faciles à conjecturer puis à démontrer, mais d'autre part il regorge de beaux et difficiles théorèmes, et même d'énigmes encore irrésolues.

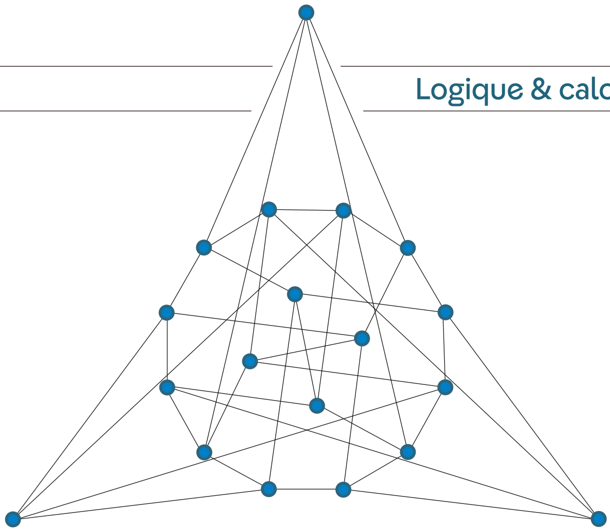
Commençons par fixer les règles de la version la plus simple du jeu. Ce dernier se déroule sur un graphe fini non orienté, c'est-à-dire un réseau de sommets et d'arêtes qui les relient. On supposera qu'il y a au plus une arête entre deux sommets différents et que chaque sommet est lié à lui-même. Pour simplifier les dessins, nous ne représenterons pas les arêtes liant un sommet à lui-même.

Au voleur!

Deux camps s'opposent: d'une part les gendarmes, au nombre de k – avec k un entier strictement positif – et d'autre part le voleur qui tente de leur échapper. Les acteurs occupent des sommets du graphe, et peuvent être à plusieurs sur un même sommet. À chaque instant, ils disposent tous d'une information parfaite sur la situation: ils connaissent entièrement le graphe et savent où sont placés les autres joueurs. Le voleur et les gendarmes jouent à tour de rôle. Au début du jeu, les k gendarmes se placent là où ils le souhaitent, puis le voleur choisit son sommet de départ. Ensuite, les k gendarmes se déplacent simultanément, chacun en suivant une arête du graphe – chacun ne peut donc se rendre que sur un sommet adjacent à sa position de départ. Le voleur se déplace ensuite, lui aussi en suivant une arête du graphe. Puis c'est de nouveau au tour des gendarmes de se déplacer, etc. Rester sur place est toujours possible pour les gendarmes comme pour le voleur, puisque nous avons supposé que chaque sommet est lié à lui-même par une arête du graphe.

L'AUTEUR

Jean-Paul Delahaye
professeur émérite à l'université de Lille et chercheur au laboratoire Cristal (Centre de recherche en informatique, signal et automatique de Lille)



Le graphe de Robertson comporte 19 sommets et possède un *cop number* de 4. On sait que 19 est le nombre minimal de sommets d'un graphe dont le *cop number* est 4, mais on ignore si le graphe de Robertson est le seul graphe à 19 sommets ayant un tel *cop number*.

Le voleur qui tente d'échapper aux gendarmes est capturé si un gendarme réussit à occuper le même sommet du graphe que lui. S'il existe une méthode de jeu permettant au voleur de ne jamais se faire attraper, le graphe est dit «gagnant pour le voleur face à k gendarmes». Sinon le graphe est dit «gagnant pour k gendarmes».

D'innombrables variantes sont possibles: quand c'est son tour, le voleur pourrait suivre deux arêtes ou plus (voleur rapide); l'information dont disposent les gendarmes et/ou le voleur pourrait être imparfaite; plusieurs gendarmes pourraient être exigés pour capturer le voleur; le graphe pourrait présenter des sens uniques (un graphe orienté, dans lequel certaines arêtes ne peuvent être parcourues que dans un sens); certaines parties du graphe pourraient être réservées aux gendarmes, etc. Nous nous contenterons, ici, de considérer le cas le plus classique du jeu.

Pour tout graphe fini, en plaçant un gendarme à chaque sommet le voleur est immédiatement attrapé: cela signifie que pour un graphe G ayant n sommets, il existe un plus petit entier $1 \leq k \leq n$ tel que k gendarmes attrapent le voleur.

«Cop number»

Ce nombre est appelé le *cop number* de G, et sera noté $c(G)$. Le problème principal de la théorie consiste à déterminer ce nombre pour chaque graphe G. Si un graphe G possède plusieurs composantes connexes (morceaux non reliés entre eux) $G_1, G_2, ..., G_m$, il est évident que $c(G) = c(G_1) + ... + c(G_m)$. Nous nous restreindrons donc, à partir de maintenant, à l'étude des graphes connexes, suffisante pour retrouver l'ensemble des cas.

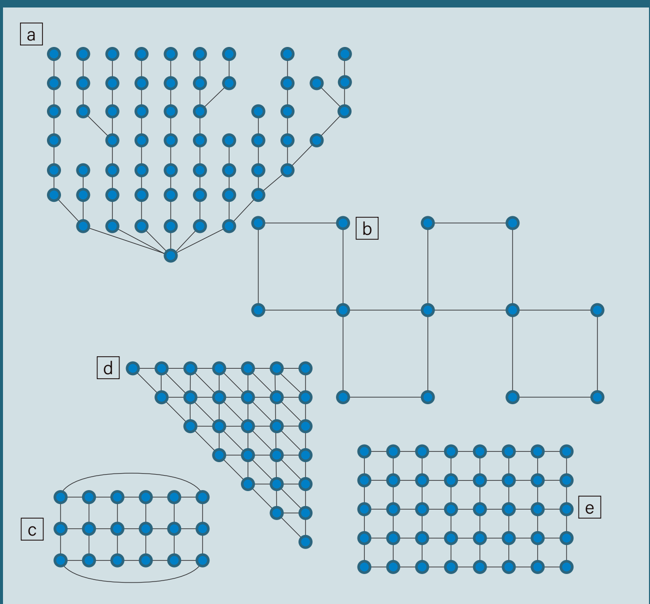
Si le graphe est une ligne finie – un sommet s_1 lié à un sommet s_2, lui-même lié à un sommet s_3, etc., jusqu'à un sommet s_n –, on se convainc aisément qu'un seul gendarme attrape le voleur, car ce dernier finit coincé à une extrémité de la ligne. Une ligne finie est par conséquent un graphe «gagnant pour un gendarme», et a donc un *cop number* de 1.

Si le graphe est un cycle de 4 sommets ou plus (s_1 lié à s_2, s_2 lié à s_3, ..., s_n lié à s_1, et aucune autre arête), alors le voleur gagne s'il n'y a qu'un gendarme, et perd s'il y a deux gendarmes. En effet, dans le cas où il n'y a qu'un seul gendarme, le voleur réussit à lui échapper en maintenant toujours au moins un sommet vide entre son poursuivant et lui.

1. Premiers exemples

Au jeu des gendarmes et du voleur, k gendarmes se positionnent où ils le souhaitent sur les sommets d'un graphe. Le voleur choisit ensuite son sommet de départ, puis chaque gendarme peut se déplacer sur un sommet adjacent à son sommet de départ. Ensuite, le voleur, qui cherche à échapper à ses poursuivants, peut à son tour se déplacer sur un sommet adjacent à sa position, et ainsi de suite. On appelle *cop number* d'un graphe le nombre minimum de gendarmes nécessaire pour garantir que le voleur sera attrapé, quand le jeu se déroule sur ce graphe.

Pour le graphe *a*, un seul gendarme suffit: il suffit qu'il se place tout en bas de l'arbre. Le voleur, où qu'il décide d'aller, finira coincé par le gendarme qui avancera sur la branche qu'a choisi le bandit, jusqu'à l'attraper. Pour le graphe *b*, deux gendarmes sont nécessaires et suffisants. À cause des cycles de longueur 4 présents dans le graphe, le voleur placé sur l'un de ces cycles peut en effet échapper à un gendarme seul en tournant en rond indéfiniment. En revanche, avec deux gendarmes, le voleur ne peut pas s'échapper car une fois dans un cycle les gendarmes peuvent l'y bloquer et s'approcher de lui jusqu'à le saisir. Pour le graphe *c*, la réponse est encore deux: il faut placer les deux gendarmes sur la ligne du milieu, respectivement sur le deuxième et le cinquième sommet. Sur le graphe *d*, un gendarme seul peut attraper le voleur en s'en approchant progressivement. Pour *e*, deux gendarmes sont nécessaires et suffisants pour coincer le voleur dans un coin.



S'il y a deux gendarmes, il suffit que l'un parcoure le cycle dans le sens des aiguilles d'une montre et l'autre dans le sens inverse pour que cela piège le voleur. Le *cop number* d'un cycle C de 4 sommets ou plus est donc 2 : $c(C) = 2$.

Un arbre est un graphe connexe ne comportant aucun cycle. Le *cop number* d'un tel graphe est toujours 1, car si le gendarme se place à la racine de l'arbre, quelle que soit la branche que choisit le voleur, le poursuivant pourra s'y rendre et il finira par coincer le fugitif tout au bout de la branche.

Notons que ce jeu des gendarmes et du voleur pourrait être envisagé sur des graphes infinis. Les résultats, même les plus simples, sont alors très différents. En particulier, sur un arbre infini, il peut exister des branches de longueur infinie. Dans ce cas, en se plaçant sur une telle branche suffisamment loin des gendarmes, un voleur pourra toujours s'échapper, quel que soit le nombre de ses poursuivants. Dans l'ensemble de ce texte, les résultats évoqués ne concernent que les graphes finis et connexes.

En 1898, le mathématicien danois Julius Petersen introduit un graphe qui porte aujourd'hui son nom (*voir l'encadré 2*). Initialement construit pour aborder un problème de coloriage, ce graphe à 10 sommets s'est révélé particulièrement intéressant pour notre jeu. Une équipe de chercheurs autour de William Baird, de l'université Ryerson, à Toronto, au Canada, a en effet démontré, en 2014, qu'il s'agit du plus petit graphe, en termes de nombre de sommets, dont le *cop number* est 3, et que c'est l'unique graphe à 10 sommets dont le *cop number* est 3.

La recherche de la taille du plus petit graphe ayant un *cop number* de 4 est loin d'être facile. Dès 1964, le mathématicien américain Neil Robertson présente un tel graphe à 19 sommets, qui porte aujourd'hui son nom (*voir la figure page 71*). Pourtant, ce n'est qu'en 2021 que Jérémie Turcotte et Samuel Yvon démontrent que ce nombre de 19 sommets est minimal : ils établissent qu'aucun graphe possédant 18 sommets ou moins ne peut atteindre un *cop number* de 4. On ignore encore aujourd'hui si le graphe

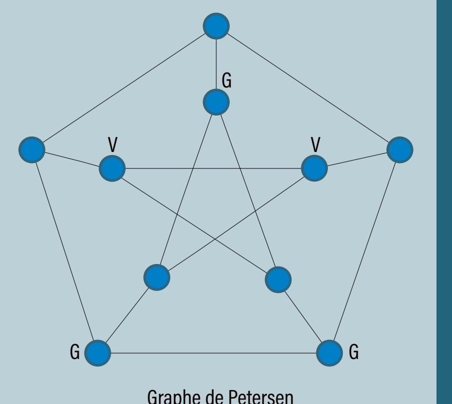
2. Le graphe de Petersen

Le graphe de Petersen, qui possède 10 sommets, est le plus petit graphe, en termes de nombre de sommets, dont le *cop number* est 3. C'est de plus le seul graphe à 10 sommets ayant un tel *cop number*. Il est représenté dans la figure ci-contre.

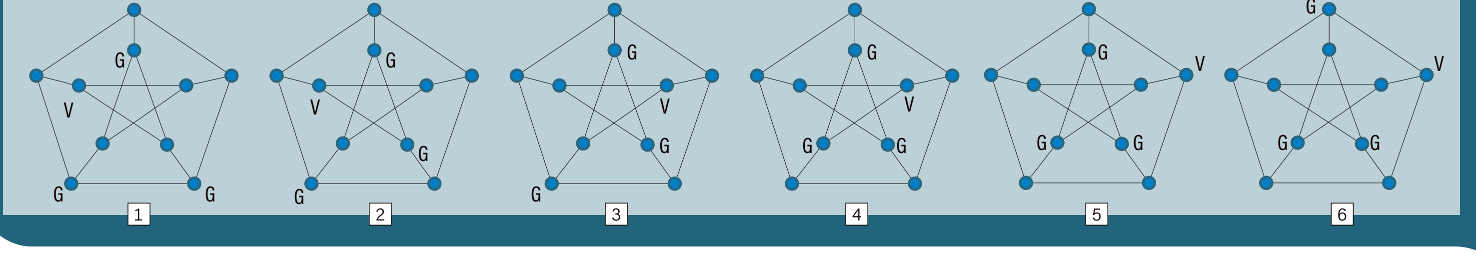
Sur ce graphe, un unique gendarme ne suffit pas à attraper le voleur. En effet, quel que soit l'endroit où il se place, le voleur peut, en choisissant un des cinq sommets extérieurs, se mettre à distance 2 du gendarme. Ensuite, après chaque mouvement du gendarme, le voleur peut rétablir cette distance 2, soit en restant à sa place soit en passant à un sommet extérieur voisin. Il ne sera ainsi jamais attrapé.

Deux gendarmes sont également insuffisants. En effet, où qu'ils se placent, le voleur pourra se positionner à distance 2 de chacun d'eux. On vérifie ensuite que, quels que soient les mouvements des gendarmes, le voleur peut se déplacer et rétablir cette distance de 2 entre chacun de ses poursuivants et lui.

Trois gendarmes, en revanche, peuvent toujours attraper le voleur. Il suffit pour cela qu'ils se placent sur les sommets marqués *G* dans le dessin ci-contre. Le voleur ne peut alors échapper aux gendarmes qu'en choisissant l'un des deux sommets marqués *V* (par exemple, celui à gauche, comme sur le *dessin 1* ci-dessous). L'un des gendarmes du bas s'avance alors pour le menacer *(dessin 2)*, ce qui force le voleur à aller sur l'autre case marquée *V (dessin 3)*. Le gendarme resté en bas s'avance alors *(dessin 4)* ce qui oblige le voleur à se déplacer vers l'extérieur *(dessin 5)*. Le gendarme du haut s'approche alors du voleur *(dessin 6)*, ce qui ne lui laisse plus aucune issue.



Graphe de Petersen



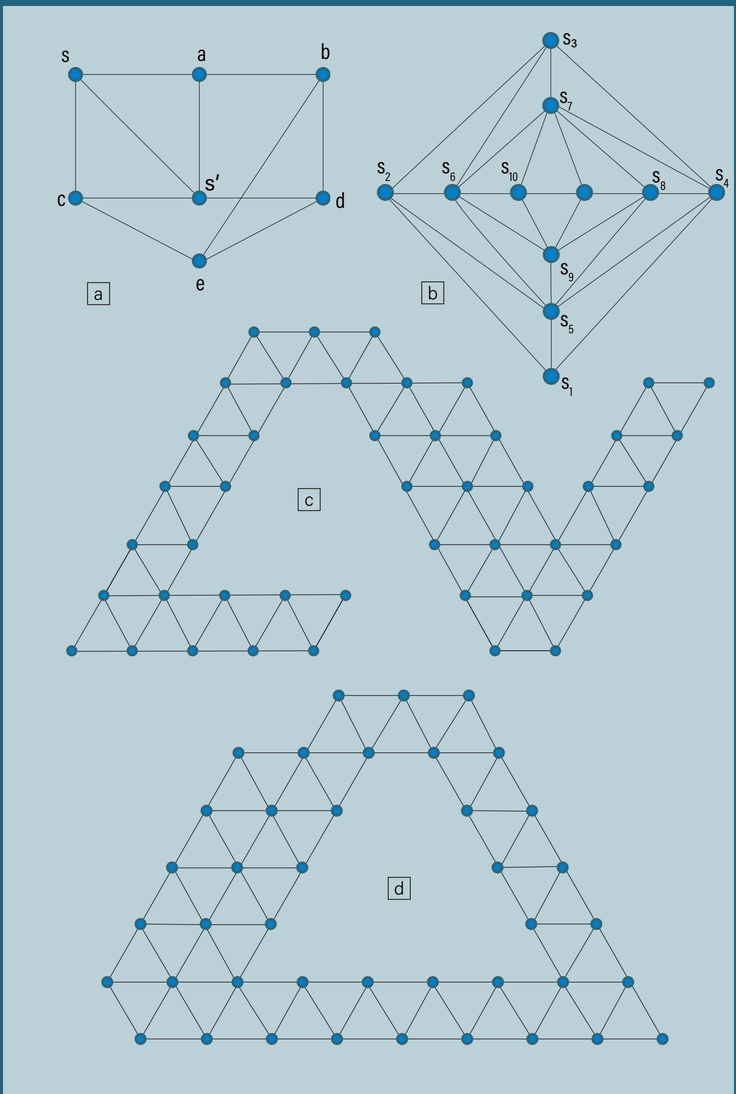
3. Graphes démontables

On dit qu'un sommet *s* d'un graphe *G* est un « coin » de *G* s'il existe un sommet *s'* de *G* ayant pour voisins tous les voisins de *s* et éventuellement plus. Dans la figure *a*, le sommet *s* a pour voisins les sommets *s*, *a*, *s'* et *c*.
Le sommet *s'* a quant à lui pour voisins les sommets *s'*, *c*, *s*, *a* et *e*. Donc *s* est un coin. Pour ce graphe, c'est le seul coin.

Par définition un graphe *G* est « démontable » si l'on peut numéroter ses sommets, s_1, s_2, …, s_n de sorte que s_1 soit un coin de *G*, s_2 un coin de $G - \{s_1\}$, s_3 un coin de $G - \{s_1, s_2\}$, etc., jusqu'à ce qu'il ne reste plus que s_n.
La figure *b* présente un tel graphe.

On démontre qu'un graphe *G* a un *cop number* de 1 si et seulement si *G* est démontable.

Les arbres finis sont démontables, de même que les graphes tirés du pavage du plan par des triangles équilatéraux en ne gardant qu'un nombre fini de triangles, et en vérifiant que l'ensemble des triangles conservés n'a pas de trou. La figure *c* montre un exemple de tel graphe. La figure *d* montre, au contraire, un graphe qui présente un trou, et dont on peut vérifier qu'il n'est pas démontable.



de Robertson est le seul graphe à 19 sommets dont le *cop number* est 4.

Démontage, rétraction et genre

Dès le début des recherches sur le jeu, aussi bien en France qu'en Amérique du Nord, on a su caractériser les graphes *G* où le voleur se fait attraper par un gendarme seul : ce sont les graphes dits « démontables ».

Dans un graphe, on dit qu'un sommet *s* est un coin s'il existe un autre sommet *s'* qui a pour voisins tous les voisins de *s* (y compris *s*). Un graphe est dit démontable si et seulement si on peut lui retirer un à un des coins jusqu'à obtenir un graphe réduit à un sommet unique – on dit qu'on « démonte » le graphe. Les graphes dont le *cop number* est 1 sont exactement les graphes démontables (*voir l'encadré 3*).

L'idée qu'en fusionnant des sommets d'un graphe on rend ce dernier plus favorable aux gendarmes est naturelle. Cette intuition est effectivement formalisée dans un beau résultat, qui repose sur la notion de « rétraction » de la théorie des graphes (*voir l'encadré 4*) : on démontre que si *H* est une rétraction de *G*, alors $c(H) \leq c(G)$. On déduit de cette inégalité un cas particulier très utile : puisque tout cycle de longueur au moins 4 a un *cop number* de 2, si un graphe *G* peut être rétracté en un tel cycle, alors son *cop number* sera au moins 2.

Une surprise du domaine fut la démonstration, dès 1984, par Martin Aigner et Michael Fromme, de l'université de Berlin, d'un énoncé remarquablement simple : si un graphe est planaire – c'est-à-dire dessinable sur un plan sans que les arêtes se croisent –, alors son *cop number* est au plus 3.

Ce résultat a fait l'objet d'une généralisation. En topologie, on s'intéresse aux surfaces *S* compactes (c'est-à-dire fermées et bornées), connexes (deux points différents de *S* sont toujours joignables par un chemin continu dans *S*) et sans bord (autour de tout point de *S*, il existe un disque entièrement contenu dans *S*). On définit le genre d'une telle surface comme son nombre de « trous » : la sphère est de genre 0, le tore est de genre 1, etc. On dit alors qu'un graphe *G* est de genre *k* si *k* est le genre minimal d'une surface sur laquelle on peut dessiner *G* sans que deux de ses arêtes ne se croisent. Les graphes planaires, par exemple, sont de genre 0, car tout graphe fini dessinable sur le plan l'est aussi sur la sphère.

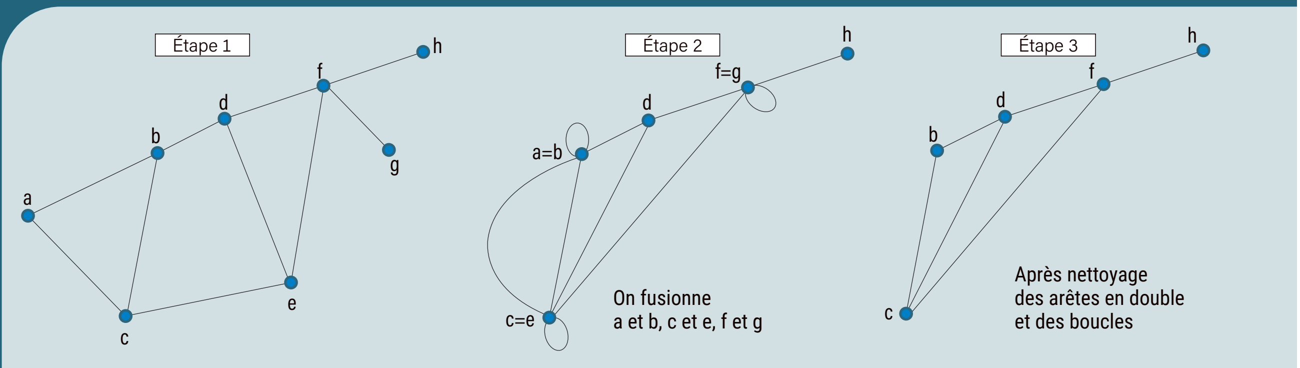
En 2001, Bernd Schröder, de l'université de Louisiana Tech, aux États-Unis, a démontré que pour tout graphe *G* de genre *g*, on a l'inégalité : $c(G) \leq [3g/2] + 3$, où $[x]$ désigne la partie entière

4. Rétraction

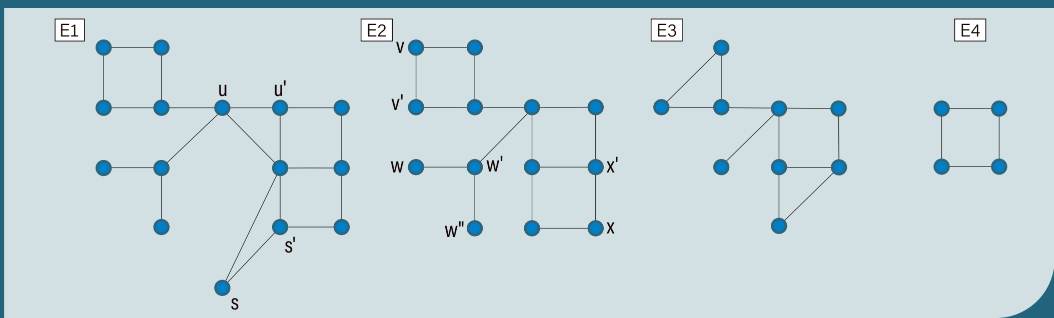
La notion de « rétraction » pour les graphes est au cœur d'un remarquable résultat de la théorie du jeu des gendarmes et du voleur. Un graphe *H* est une rétraction d'un graphe *G* si et seulement si *H* est obtenu à partir de *G* à la suite d'une opération de fusion entre sommets suivie d'une opération de « nettoyage » :

– Fusion : On identifie certains sommets entre eux, sans supprimer d'arête.
– Nettoyage : Si des arêtes sont maintenant en double, on ne garde qu'une arête de chaque type. De même, puisque c'est la convention adoptée dans tout cet article, on ne représente pas les arêtes liant un sommet à lui-même.

Dans la figure ci-dessous, entre l'étape 1 et l'étape 2, on fusionne le sommet *a* avec le sommet *b*, le sommet *c* avec le sommet *e* et le sommet *f* avec le sommet *g*. Puis, entre l'étape 2 et l'étape 3, on effectue l'opération de nettoyage et l'on obtient un graphe *H* qui est une rétraction du graphe initial *G*.



Bien sûr, plusieurs rétractions successives peuvent être opérées. Dans la figure ci-dessous, on fusionne d'abord *u* et *u'* ainsi que *s* et *s'* (entre les étapes E1 et E2) puis *w*, *w'* et *w"* ainsi que *v* et *v'* et enfin *x* et *x'* (entre les étapes E2 et E3) et finalement tous les sommets autres que les quatre formant un carré (entre les étapes E3 et E4).



En 1993, une équipe réunie autour d'Alessandro Berarducci, de l'université de Pise, démontre que si *H* est une rétraction de *G*, alors le *cop number* de *H* est inférieur ou égal à celui de *G*.

Supposons en effet que $c(G) = k$, et soit *H* une rétraction de *G*. Une partie jouée dans *H* peut être considérée comme jouée dans *G*, puisque *H* est un sous-graphe de *G*. Cependant la stratégie des gendarmes dans *G* pourrait ne pas être suffisante dans *H* : pour attraper le voleur, les gendarmes pourraient avoir besoin qu'il quitte *H* et se fasse coincer ailleurs. Pour obtenir une stratégie gagnante pour les gendarmes valable dans *H*, nous définissons la « stratégie image » de leur stratégie gagnante dans *G*. Lorsqu'un sommet *x* de *G* a été fusionné avec un sommet *y* qui reste dans *H*, nous dirons que *x* a pour image *y*. Dans la stratégie image dans *H*, les *k* gendarmes commencent sur les sommets de *H* qui sont les images des points de départ de la stratégie gagnante dans *G*. Ils jouent ensuite en se déplaçant sur les images des sommets prescrits par la stratégie gagnante dans *G* : si, dans *G*, un gendarme doit se déplacer d'un sommet *u* vers un sommet *v*, alors dans *H* le gendarme doit se déplacer depuis l'image de *u* vers l'image de *v*. Ces déplacements sont toujours possibles, car les arêtes n'ont pas été supprimées quand on a opéré les fusions de la rétraction.

Cette stratégie image dans *H* est gagnante pour les *k* gendarmes. En effet, supposons que les *k* gendarmes soient sur le point d'attraper le voleur dans *G* ; cela signifie que le sommet où se trouve le voleur ainsi que chacun de ses voisins sont adjacents, dans *G*, à un sommet où se trouve un gendarme. Comme toutes les arêtes ont été gardées dans la rétraction, cela signifie que le sommet où se trouve le voleur dans *H* et chacun de ses voisins dans *H* sont adjacents à un sommet dans *H* où se trouve un gendarme image. Le voleur perd donc la partie jouée dans *H*.

Notons que la stratégie image n'est peut-être pas celle utilisant le moins de gendarmes possible. Ce qu'établit ce raisonnement, c'est que le nombre de gendarmes nécessaire pour assurer une stratégie gagnante dans *H* est inférieur ou égal à celui nécessaire dans *G* : $c(H) \leq c(G)$.

Une conséquence simple de ce résultat est que si une rétraction de *G* est un cycle de longueur supérieure ou égale à 4, alors le graphe est gagnant pour le voleur face à un seul gendarme.

de x (c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x). En 2021, ce résultat a été amélioré par une équipe de chercheurs réunie autour de Florian Lehner, de l'université d'Auckland, en Nouvelle-Zélande : on sait maintenant que si G est un graphe de genre g, alors $c(G) \leq [4g/3] + 10/3$.

Une question naturelle est de savoir s'il existe une limite supérieure au nombre de gendarmes nécessaires pour attraper un voleur sur un graphe quelconque – autrement dit, s'il existe un nombre K tel que, pour tout graphe G, on ait $c(G) \leq K$. La réponse est non : pour tout entier k, il existe des graphes dont le *cop number* dépasse k. Plus précisément, si un graphe G ne possède pas de cycle de taille 4 ou moins, alors son *cop number* est supérieur ou égal au nombre minimum de voisins (différents de lui-même) d'un sommet de G. Cela permet de construire des graphes dont le *cop number* est aussi grand qu'on le veut.

Conjecture de Meyniel

On peut préciser encore ce résultat en étudiant certains graphes construits à partir d'objets géométriques particuliers : les plans projectifs finis. On démontre que ces graphes ont un nombre de sommets de la forme $2q^2 + 2q + 2$ avec q un entier, et que le *cop number* d'un tel graphe est alors $q + 1$. Cela signifie que le *cop number* maximal pour un graphe à n sommets augmente au moins proportionnellement à $\sqrt{n}$, quand n augmente.

Puisque les graphes à n sommets sont en nombre fini, pour tout entier n il existe un nombre $c(n)$ qui est le *cop number* maximum pour ces graphes. Le résultat précédent et les graphes dont on a pu évaluer exactement le *cop number* suggèrent qu'il pourrait exister une constante positive C telle que pour tout n et tout graphe à n sommets, $c(n) \leq C\sqrt{n}$. Cette affirmation est la « conjecture d'Henri Meyniel ». C'est une très belle et intrigante conjecture, la plus difficile peut-être de la théorie. Si elle est vraie cela signifie que le nombre de gendarmes nécessaires pour garantir qu'un voleur se fait attraper sur un graphe quelconque à n sommets augmente bien moins vite que n.

La conjecture est encore ouverte à l'heure actuelle, néanmoins certaines avancées ont été faites au cours des dernières décennies. Depuis 1989, on sait par exemple qu'il existe une constante positive C telle que, pour tout entier n, $c(n) \leq C \times n \times log(log(n)) / log(n)$. Un autre résultat a été publié en 2012 par trois équipes de recherche indépendantes les unes des autres : il existe une constante positive D et une fonction g définie sur les entiers, qui tend vers 0 à l'infini, telles que pour tout entier n, $c(n) \leq D \times n / 2^{(1-g(n)) \times \sqrt{log_2(n)}}$. Ce résultat reste cependant très éloigné de ce qu'affirme la conjecture : pour $n = 1\,000\,000$, l'inégalité assure que $c(1\,000\,000)$ est inférieur à 42 millions, alors que la conjecture indique une majoration par 32 000.

Puisque la conjecture résiste, les spécialistes se sont penchés sur une version affaiblie, la *soft Meyniel conjecture*. Cette dernière affirme seulement qu'il existe une constante positive E et une constante e comprise entre 0 et 1 telles que pour tout entier n, $c(n) \leq E \times n^e$. Pour l'heure, cette conjecture reste elle aussi hors de portée.

Sous-catégories de graphes

En se limitant à certaines catégories de graphes, divers résultats ont toutefois été établis. On sait par exemple que si G est un graphe tel que la distance entre deux sommets est au plus 2 (on parle de graphe de diamètre 2), alors pour tout entier n, $c(G) \leq 2 \times (-1 + \sqrt{n})$.

En 2020, Peter Bradshaw, de l'université Simon Fraser, au Canada, a démontré la conjecture de Meyniel pour une classe de graphes utilisée en algèbre appelée « classe de graphes de Cayley ». En 2025, Arindam Biswas, qui travaille pour l'entreprise française Polynom, et Jyoti Prakash Saha, chercheur à l'Institut indien d'enseignement et de recherche scientifiques de Bhopal, en Inde, ont démontré la version faible de la conjecture pour les « graphes algébriques », qui apparaissent en théorie des groupes.

Une multitude d'autres résultats concernant soit le jeu des gendarmes et du voleur soit ses variantes contribuent au bouillonnement de ce domaine où, partant d'une question élémentaire, on en vient à étudier des problèmes mathématiques difficiles, exigeant l'utilisation de méthodes issues de domaines variés et parfois très éloignés. ■

BIBLIOGRAPHIE

A. Biswas et J. P. Saha, On the cop number and the weak Meyniel conjecture for algebraic graphs, *European Journal of Combinatorics*, 2025.

A. Bonato, *An invitation to pursuit-evasion games and graph theory*, American Mathematical Society, 2022.

J. Turcotte et S. Yvon, 4-cop-win graphs have at least 19 vertices, *Discrete Applied Mathematics*, 2021.

N. Bowler *et al.*, Bounding the cop number of a graph by its genus, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 2021.